Συναρτήσεις 1-1

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέμε ότι είναι 1-1 (ένα προς ένα) , αν και μόνο αν:
για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ισοδύναμος ορισμός (χρησιμοποιείται κυρίως στις ασκήσεις)

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέμε ότι είναι 1-1 (ένα προς ένα) , αν και μόνο αν:
για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: [-2, +\infty) \to R$ με $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ είναι 1-1.

Λύση

Έστω $x_1, x_2 \in [-2, +\infty)$.

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 + 8x_1 - 7 = 2x_2^2 + 8x_2 - 7 \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 = x_2^2 + 4x_2 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 = x_2^2 + 4x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + 2)^2 = (x_2 + 2)^2 \Rightarrow \sqrt{(x_1 + 2)^2} = \sqrt{(x_2 + 2)^2}$$

$$\Rightarrow |x_1 + 2| = |x_2 + 2| \xrightarrow[x_2 + 2 \geq 0]{x_1 + 2 \geq 0} x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

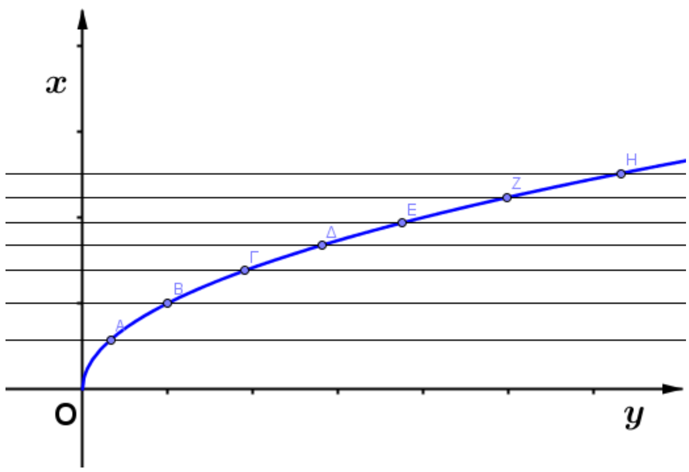
Άρα η f είναι 1-1.

Παρατήρηση

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέμε ότι είναι 1-1 (ένα προς ένα) , αν και μόνο αν, κάθε οριζόντια ευθεία ($y = k \ // x'x$) τέμνει την C_f το πολύ σε ένα σημείο.

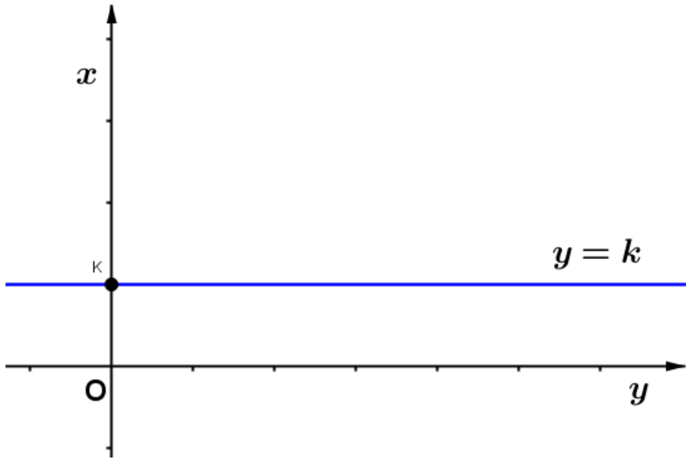
Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι συνάρτηση 1-1.



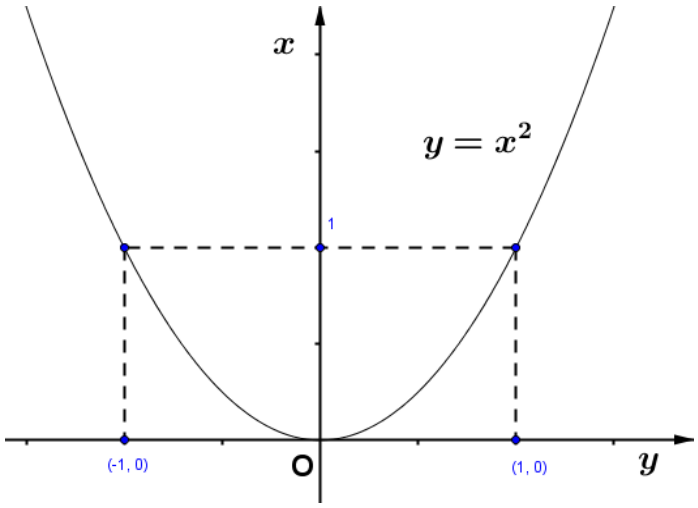
Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση f με $f(x)=k$, $x\in R$ δεν είναι συνάρτηση 1-1, αφού $f(x_1)=f(x_2)=k$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in R$.



Παράδειγμα 4

Η συνάρτηση f με $f(x)=x^2$, $x\in R$ δεν είναι συνάρτηση 1-1, αφού $f(-1)=f(1)=1$, ενώ $-1\neq 1$.



Παράδειγμα 5

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x)=1-|x+3|$, $x\in R$ είναι 1-1.

Παρατηρούμε ότι $x_1=-4$ και $x_2=-2$ έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)=0$, ενώ $x_1\neq x_2$.

Επομένως η f δεν είναι 1-1. (Μέθοδος του αντιπαραδείγματος)

Πρόταση 1:
Αν μια συνάρτηση $f:A\to R$ είναι 1-1, τότε η εξίσωση $f\left(x\right)=k$, για κάθε $k\in R$, έχει το πολύ μια λύση στο A

Απόδειξη

Έστω συνάρτηση $f: A \to R$, η οποία είναι 1-1 και αριθμός $k \in R$.

Υποθέτουμε πως η εξίσωση $f(x) = k$ έχει δύο λύσεις x_1 και x_2 στο A με $x_1 \neq x_2$.

Τότε $\begin{cases} f(x_1) = k \\ f(x_2) = k \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, άτοπο.

Κατά συνέπεια η εξίσωση $f(x) = k$ έχει το πολύ μία λύση στο A.

Σημείωση 1:

Αν επιπλέον το $k \in f(A)$, οπότε η εξίσωση έχει λύση στο A, τότε θα είναι και μοναδική.

Σημείωση 2:

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή: αν η εξίσωση $f(x) = k,$ για κάθε $k \in R,$ έχει το πολύ μια λύση στο A, τότε η f είναι 1-1.

Σχόλιο:

Μία συνάρτηση $f: A \to R$ είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Πρόταση 2:

Αν μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι1-1.

Απόδειξη

Έστω συνάρτηση $f: A \to R$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 > x_2 \\ \acute{\eta} \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ \acute{\eta} \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Δηλαδή η f είναι 1-1.

Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Σημείωση 1:

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Σημείωση 2:

Με αντίθετο-αντιστροφή της παραπάνω πρότασης ισχύει:
Αν η f **δεν** είναι 1-1, τότε **δεν** είναι και γνησίως μονότονη.

Πρόταση 3:
Αν μια συνάρτηση $f : A \to R$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = k$, για κάθε $k \in R$, έχει το πολύ μια λύση στο A

Απόδειξη
Έστω συνάρτηση $f : A \to R$, η οποία είναι γνησίως μονότονη.
Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 2, η συνάρτηση f είναι 1-1, οπότε με βάση την Πρόταση 1, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει το πολύ μια λύση στο A.