

Συναρτησιακές σχέσεις

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε εδώ έχει ως εξής:

Ως δεδομένο έχουμε μια γενική ιδιότητα που ικανοποιείται από τις τιμές μιας άγνωστης συνάρτησης (ως προς τον τύπο της) και μας ζητείται να ανακαλύψουμε τον τύπο της ή να αποδείξουμε άλλες ιδιότητές της.

Για παράδειγμα, αν για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

$$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ να βρεθεί ο τύπος της } f.$$

Μεθοδολογία:

Εφαρμόζουμε την δοσμένη από υπόθεση ιδιότητα για κατάλληλες τιμές του x τις οποίες υποψιαζόμαστε από την προς απόδειξη ιδιότητα.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.
Να βρεθεί το $f(2)$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $3f(2-x) + 2f(x-2) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της.
3. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της.
4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι ιδιότητες:
(I₁) Η f είναι άρτια και (I₂) $f(x) + f(y) \geq f(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf(x) + f(-x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί ο τύπος της.
6. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $f(f(x)) + x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.
7. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
 $f(2-x) + f(2+x) = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
8. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(0) = 1$ και $f(x+y) \leq e^x f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
β) Να βρεθεί ο τύπος της f .
9. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
 $f(x)f(y) = f(x) + f(y) + 3 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

10. Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα: $f(x-2) + 2f(3-x) = 11 - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδειχθεί ότι: $f(x) + 2f(1-x) = 7 - 2x$.

β) Να αποδειχθεί ότι: $f(1-x) + 2f(x) = 5 + 2x$.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy) + f(x) + f(y) = xy + x + y \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να προσδιορισθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g, h με

$$g(x) = f^2(x) + \frac{1}{f^2(x)} \quad \text{και} \quad h(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Να βρείτε την } f.$$

13. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = 3x - 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(3x-2) = 3f(x) - 2, x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

14. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Να βρείτε την τιμή } f(1).$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq x^2 - x, x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .