# Ακρότατα συνάρτησης

## Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: A \to R$.

Ορίζουμε:

- $f$ **έχει μέγιστη τιμή** $\Leftrightarrow$ υπάρχει $x_0 \in A$ τ.ω. $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

  *Σημείωση:*

  Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο $x_0 \in A$ λέμε ότι η $f$ έχει μέγιστη τιμή την $f(x_0)$. Λέμε επίσης, ότι η $f$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$, η δε τιμή $f(x_0)$ λέγεται (ολικό) μέγιστο της $f$.

- $f$ **έχει ελάχιστη τιμή** $\Leftrightarrow$ υπάρχει $x_0 \in A$ τ.ω. $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

  *Σημείωση:*

  Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο $x_0 \in A$ λέμε ότι η $f$ έχει ελάχιστη τιμή την $f(x_0)$. Λέμε επίσης, ότι η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$, η δε τιμή $f(x_0)$ λέγεται (ολικό) ελάχιστο της $f$.

Σχόλια

- Το (ολικό) ελάχιστο και το (ολικό) μέγιστο της $f$, αν υπάρχουν, λέγονται (ολικά) ακρότατα της $f$.
- Μια συνάρτηση $f$ είναι δυνατόν να μην έχει ούτε ελάχιστο, ούτε μέγιστο.
- Στη περίπτωση που η $f$ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in A$, το σημείο $x_0$ λέγεται θέση ακροτάτου της $f$.

Χρήσιμες επισημάνσεις

✓ Αν για έναν αριθμό $M \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \le M$, για κάθε $x \in A$, τότε το $M$ δεν είναι αναγκαστικά μέγιστη τιμή της $f$. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το $M$ είναι τιμή της $f$.

Δηλαδή: $(M \in \mathbb{R}$ μέγιστη τιμή της $f) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{υπάρχει } x \in A \text{ τ.ω. } f(x) = M \\ \wedge \\ f(x) \le M, \text{ για κάθε } x \in A \end{cases}$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) = \eta\mu x \le 3$, αλλά το 3 δεν είναι μέγιστη τιμή της $f$, διότι το 3 δεν είναι τιμή της $f$ αφού δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\eta\mu x = 3$.

Η μέγιστη τιμή της $f$ είναι το 1.

✓ Αν για έναν αριθμό $m \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \ge m$, για κάθε $x \in A$, τότε το $m$ δεν είναι αναγκαστικά ελάχιστη τιμή της $f$. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το $m$ είναι τιμή της $f$.

Δηλαδή: $(m \in \mathbb{R} \text{ ελάχιστη τιμή της } f) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{υπάρχει } x \in A \text{ τ.ω. } f(x) = m \\ \wedge \\ f(x) \geq m, \text{ για κάθε } x \in A \end{cases}$

- ✓ Έστω μια συνάρτηση $f : A \to R$.
  - ▪ Αν $f(A) = [\kappa, \lambda] \Rightarrow \min f = \kappa \ \wedge \ \max f = \lambda$
  - ▪ Αν $f(A) = [\kappa, \lambda) \Rightarrow \min f = \kappa$ και δεν έχει μέγιστο.
  - ▪ Αν $f(A) = (\kappa, \lambda] \Rightarrow \max f = \lambda$ και δεν έχει ελάχιστο.
  - ▪ Αν $f(A) = (\kappa, \lambda)$ τότε η $f$ δεν έχει ακρότατα.

- ✓ Αν μια συνάρτηση $f$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $(\alpha, \beta)$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε δεν έχει ακρότατα.

- ✓ ▪ Αν μια συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε η $f$ στο διάστημα $(\alpha, \beta)$ έχει για $x = x_0$ μέγιστη τιμή την $f(x_0)$.

  ▪ Αν μια συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε η $f$ στο διάστημα $(\alpha, \beta)$ έχει για $x = x_0$ ελάχιστη τιμή την $f(x_0)$.

- ✓ ▪ Αν $\max f = \lambda < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f$

  ▪ Αν $\min f = \kappa > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f$

- ✓ ▪ Αν μια συνάρτηση $f$ είναι άρτια και παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο) σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, το $f(x_0)$, τότε θα παρουσιάζει και στο $-x_0$ μέγιστο (ή ελάχιστο αντίστοιχα) το $f(-x_0) = f(x_0)$.

  Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\, x, \ \ x \in \mathbb{R}$.

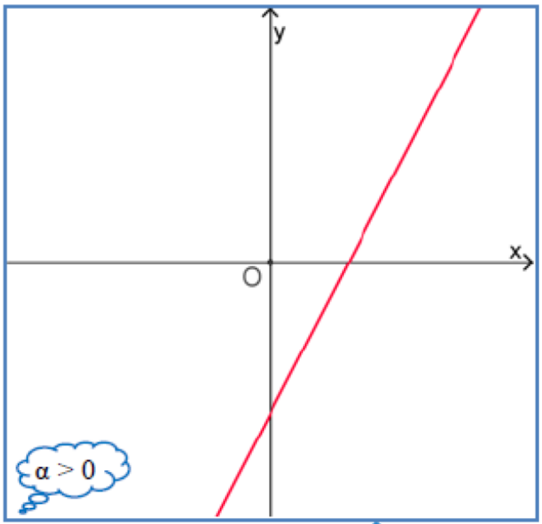
  ▪ Αν μια συνάρτηση $f$ είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο) σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, το $f(x_0)$, τότε θα παρουσιάζει στο $-x_0$ ελάχιστο (ή μέγιστο αντίστοιχα) το $f(-x_0) = -f(x_0)$.

  Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\, x, \ \ x \in \mathbb{R}$.

# Μονοτονία – ακρότατα βασικών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=\mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα $(f(\mathbf{A})=\mathbf{R})$.

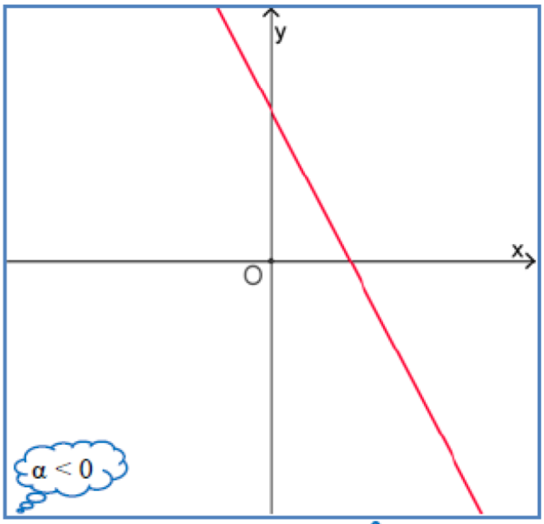
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 3».




Σχήμα 3

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha<0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=\mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα $(f(\mathbf{A})=\mathbf{R})$.

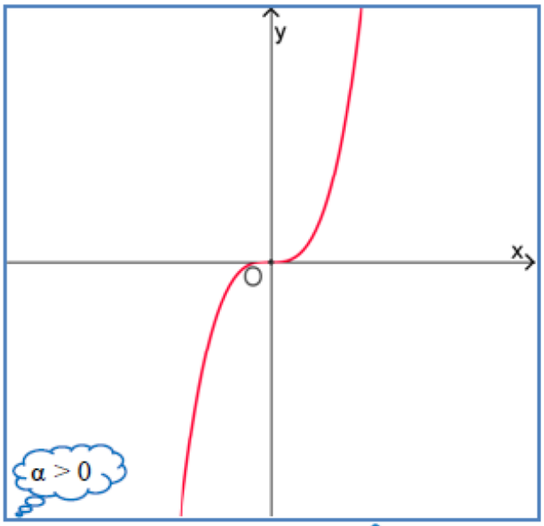
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 4».




Σχήμα 4

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, με $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=\mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα $(f(\mathbf{A})=\mathbf{R})$.

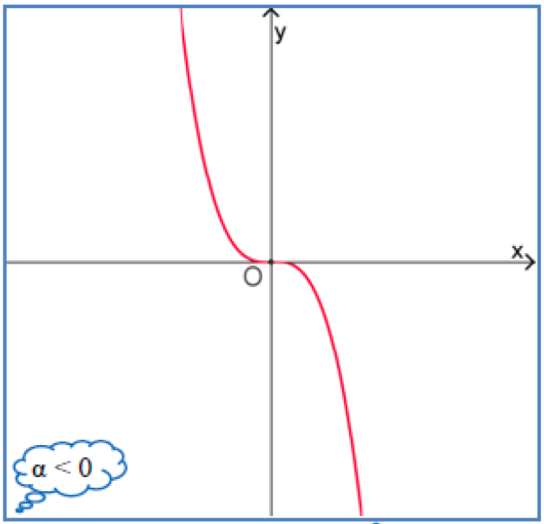
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 5».




Σχήμα 5

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, με $\alpha<0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=\mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα $(f(\mathbf{A})=\mathbf{R})$.

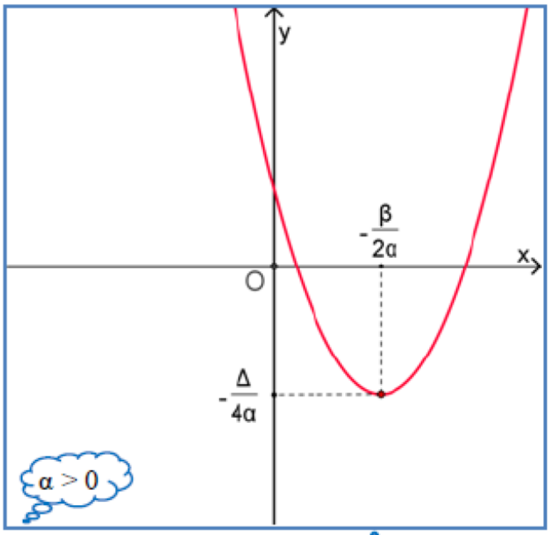
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 6».




**Σχήμα 6**

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$. Έχει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

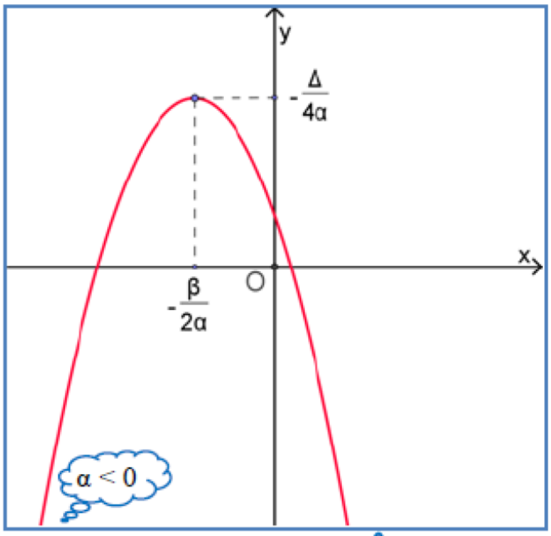
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 7».




**Σχήμα 7**

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha<0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$. Έχει μέγιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

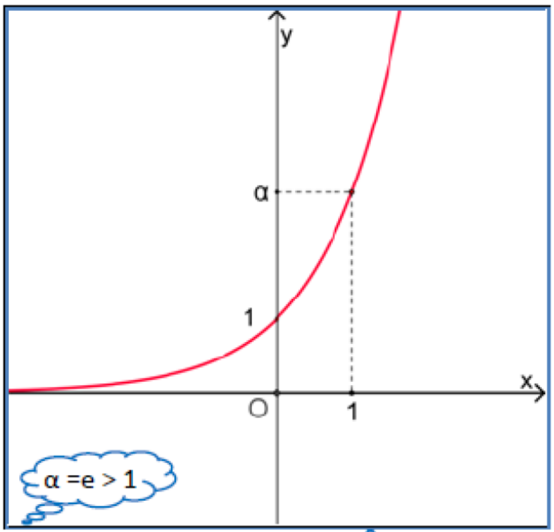
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 8».




**Σχήμα 8**

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=\mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα $\left(f(\mathbf{A})=(0,+\infty)\right)$.

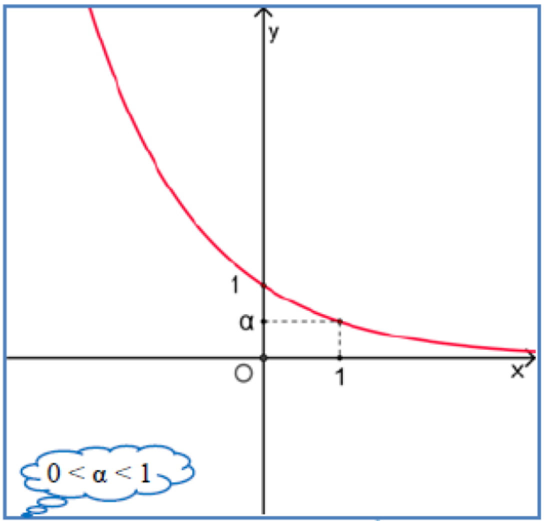
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης, η $f(x)=e^x$, «Σχήμα 9».




Σχήμα 9

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=\mathbf{R}$ και δεν έχει ακρότατα $\left(f(\mathbf{A})=(0,+\infty)\right)$.

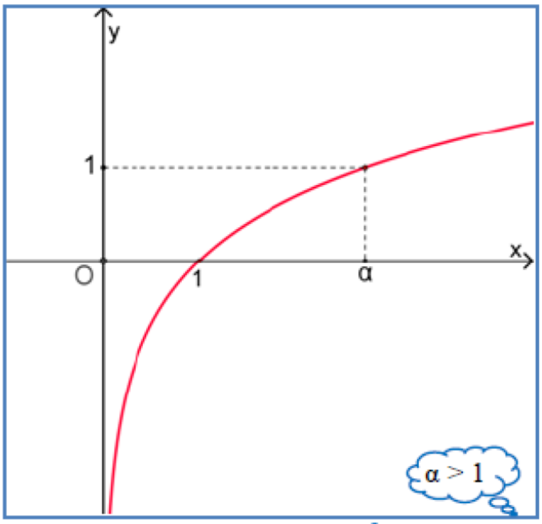
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 10».




Σχήμα 10

Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$, με $\alpha>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα $\left(f(\mathbf{A})=\mathbf{R}\right)$.

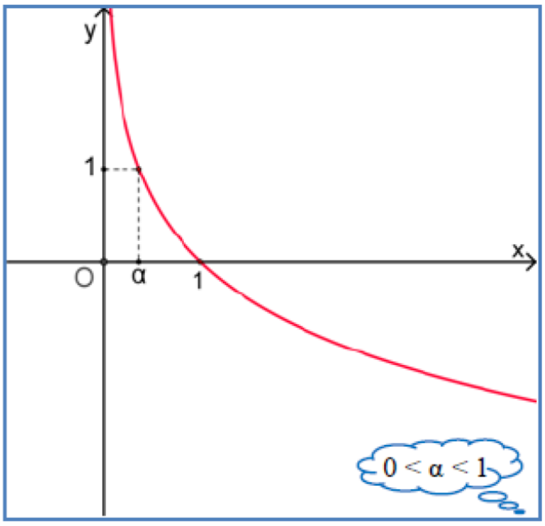
Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 11».




Σχήμα 11

Η συνάρτηση $f(x)=\log_{\alpha}x$, με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{A}=\mathbf{D}_f=(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα $(f(\mathbf{A})=\mathbf{R})$.

Παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 12».

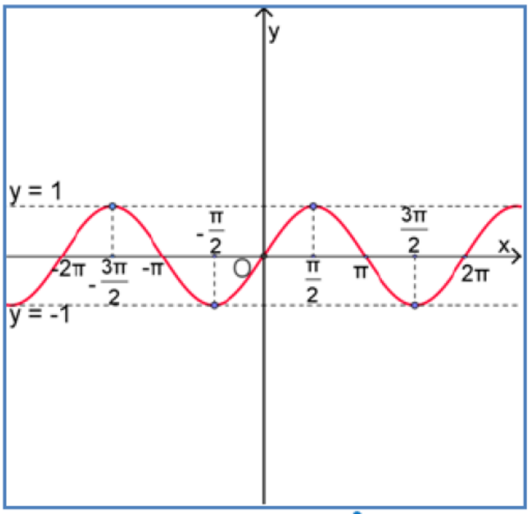



**Σχήμα 12**

Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{A}=\mathbf{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ και επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=2\pi$ η $f$ θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2\kappa\pi,2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2},2(\kappa+1)\pi\right]$, με $\kappa\in\mathbf{Z}$.

Παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε $x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, το -1 και μέγιστο για κάθε $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, το 1, ( $f(\mathbf{A})=[-1,1]$).

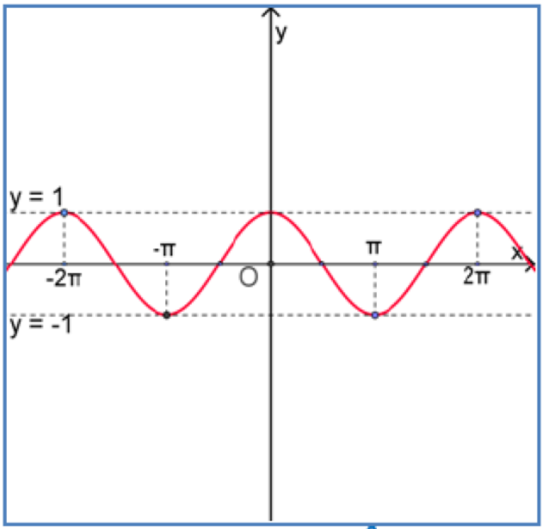
Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, βλέπουμε στο «Σχήμα 13».




**Σχήμα 13**

Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{A}=\mathbf{R}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi,2\pi]$. Επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=2\pi$ η $f$ θα είναι θα είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[2\kappa\pi,(2\kappa+1)\pi]$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[(2\kappa+1)\pi,2(\kappa+1)\pi]$, με $\kappa\in\mathbf{Z}$. Παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε $x=(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, το -1 και μέγιστο για κάθε $x=2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, το 1, $(f(\mathbf{A})=[-1,1])$.

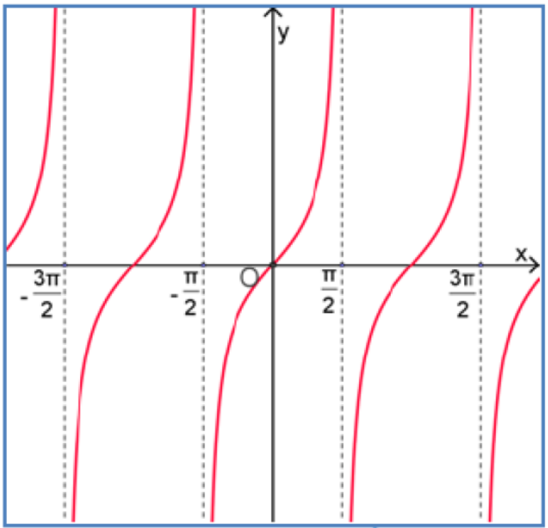
Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, βλέπουμε στο «Σχήμα 14».




Σχήμα 14

Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$, έχει $\mathbf{A}=\mathbf{D_f}=\left\{x\in\mathbf{R}:x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbf{Z}\right\}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=\pi$ η $f$ θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ με $\kappa\in\mathbf{Z}$ και δεν έχει ακρότατα $(f(\mathbf{A})=\mathbf{R})$.

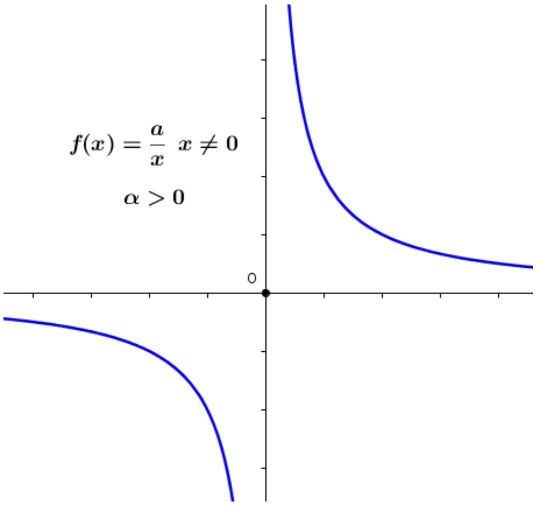
Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, βλέπουμε στο «Σχήμα 15».




Σχήμα 15

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ , έχει $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

▪ Αν $\alpha>0$ η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα $\left(f(A)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\right)$. (Σχήμα 16)




▪ Αν $\alpha<0$ η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα $\left(f(A)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\right)$. (Σχήμα 17)