Μονότονες Συναρτήσεις

Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to R$ και $\Delta \subseteq A$.

Ορίζουμε:

- f γνησίως αύξουσα στο $\Delta \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f αύξουσα (↑) στο $\Delta \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f φθίνουσα (↓) στο $\Delta \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέμε ότι είναι:

- Γνησίως μονότονη στο $\Delta \subseteq A$, αν και μόνο αν, είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.
- Γνησίως μονότονη, αν και μόνο αν, είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της Α.
- Μονότονη στο $\Delta \subseteq A$, αν και μόνο αν, είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο Δ.
- Μονότονη, αν και μόνο αν, είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της Α.

Παρατηρήσεις

- Αν $f : A \to R$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση, τότε ισχύει:

  $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  Απόδειξη

  Θεωρούμε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in A$.

  Έστω ότι $x_1 < x_2$. Τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, θα είναι: $f(x_1) < f(x_2)$.

  Αντίστροφα. Έστω ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

  Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$, άτοπο.

  Αν $x_1 > x_2$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, θα πρέπει $f(x_1) > f(x_2)$, άτοπο.

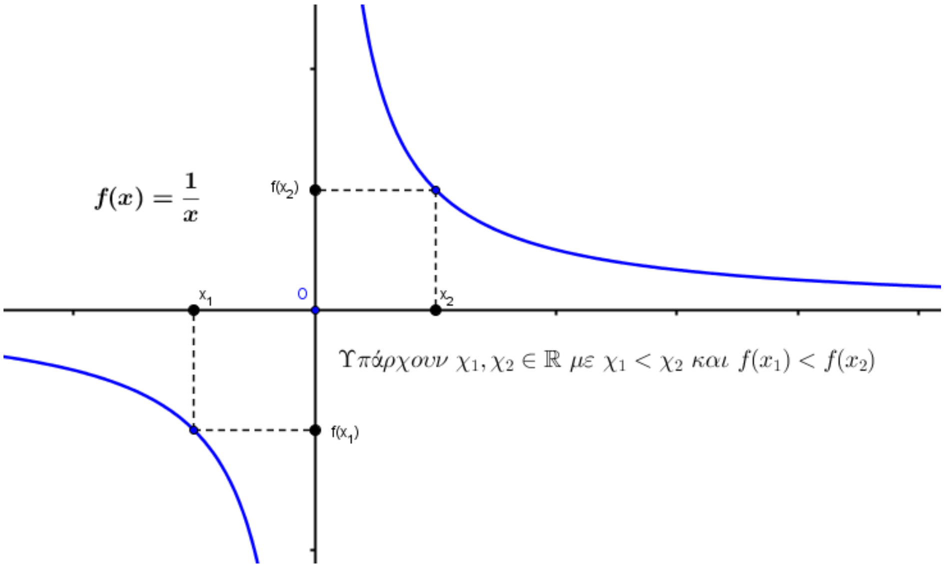
  Άρα $x_1 < x_2$.

  Όμοια, αν $f : A \to R$ μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε ισχύει:

  $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Μια συνάρτηση f, μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στα μη κενά διαστήματα Δ_1, Δ_2 $(\Delta_1, \Delta_2 \subseteq D_f,\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing)$ αλλά όχι και στην ένωση $(\Delta_1, \Delta_2 \subseteq D_f,\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing)$ $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ ορίζεται και είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, αλλά η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωση: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.



- Έστω συνάρτηση f, ορισμένη σε διάστημα Δ με $x_1,x_2\in\Delta$ και $x_1\neq x_2$. Τότε:
  - Αν $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow x_1-x_2, f(x_1)-f(x_2)$ ομόσημοι $\Leftrightarrow f$ γν. αύξουσα
  - Αν $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow x_1-x_2, f(x_1)-f(x_2)$ ετερόσημοι $\Leftrightarrow f$ γν.φθίνουσα

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στα διαστήματα (α, β] και [β, γ) τότε θα είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο διάστημα (α, γ).

- Αν f συνάρτηση γνησίως μονότονη στο Δ, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in\Delta$, που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια λύση στο Δ.
  Αν επιπλέον το $0\in f(\Delta)$, οπότε η εξίσωση έχει λύση στο Δ, τότε θα είναι και μοναδική.

- Γενικότερα, αν f συνάρτηση γνησίως μονότονη στο Δ, τότε η C_f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $\varepsilon: y=\beta, \beta\in R$ το πολύ σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in\Delta$, που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=\beta$ έχει το πολύ μια λύση στο Δ.

Αν επιπλέον το $\beta \in f(\Delta)$, οπότε η εξίσωση έχει λύση στο Δ, τότε θα είναι και μοναδική.

- Αν μια μη σταθερή συνάρτηση είναι άρτια, τότε σε συμμετρικά διαστήματα ως προς το μηδέν, θα έχει αντίθετο είδος μονοτονίας, δηλαδή αν στο [α, β] είναι γνησίως αύξουσα, στο [-β, -α] είναι γνησίως φθίνουσα.
  Κατά συνέπεια:
  Αν f άρτια συνάρτηση, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

- Αν μια μη μηδενική συνάρτηση είναι περιττή, τότε σε συμμετρικά διαστήματα ως προς το μηδέν, θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας, δηλαδή αν στο (α, β) είναι γνησίως αύξουσα και στο (-β, -α) είναι γνησίως αύξουσα.