ΜΑΘΗΜΑ 44:
ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT.

- Αν η f έχει ακρότατο στο x_0
- και είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος $\Big\} \Rightarrow$

Τότε είναι $f'(x_0) = 0$

Το αντίστροφο του θεωρ. δεν ισχύει πάντα

<u>Προσοχή</u> Έστω η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ. και το x_0 εσωτερικό σημείο του Δ.

i) Αν η f έχει ακρότατο στο x_0 το K. τότε
$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=K \end{array}\right\}$.

ii) Αν η C_f έχει ακρότατο το σημείο $A(x_0, K)$ τότε
$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=K \end{array}\right\}$.

iii) Για να έχει η f ακρότατο στο x_0. πρέπει $f'(x_0)=0$ και να αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν του x_0.

Είδη ασκήσεων στο Θ. Fermat.

1) <u>είδος Παραμετρικές</u>

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1)</u>

$f(x) = x^3 - 4x^2 + \alpha x + \beta$.

Αν η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$ το 4 να υπολογίσετε τα α, β.

Λύση

$f'(x) = 3x^2 - 8x + \alpha$. για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού η f έχει ακρότατο στο $x_0=1$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη και το οποίο είναι εσωτερ. σημείο τότε από Θ. Fermat θα είναι $f'(1)=0$ επίσης $f(1)=4$ άρα

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f(1)=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3-8+\alpha=0 \\ 1-4+\alpha+\beta=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha=5 \\ \beta=2 \end{array}\right\}$$

Άσκηση 2/

$f(x)=\dfrac{x^3}{\alpha^2}(\alpha\ln x-1)-\alpha x(\ln x-1)\quad \alpha>0$

Αν η f έχει ακρότατο στο $x_0=1$.

α) Να βρεθεί το α.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση.

Π. ορ $A=(0,+\infty)$ η f συνεχής στο A ως πρ. σ.σ και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{3x^2}{\alpha^2}\ln x-\dfrac{3x^2}{\alpha^3}+\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\alpha\ln x$.

α) Αφού η f έχει ακρότατο στο $x_0=1$ το οποίο είναι εσωτ. σημείο διαστήματος και είναι παραγ. τότε από Θ.F ισχύει $f'(1)=0 \Leftrightarrow \alpha=3$.

β) για $\alpha=3$ είναι

$$f'(x)=\frac{x^2}{3}\ln x-\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}-3\ln x=\frac{x^2-9}{3}\ln x=$$
$$=\frac{(x-3)(x+3)\ln x}{3}.$$

x	0		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$+$		$+$		$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	

2 είδος Η f δεν έχει ακρότατα.

Έστω ότι έχει στο x_0 $\xrightarrow{Θ.F}$ $f'(x_0)=0$ άτοπο.

Άσκηση 3. Αν $f^3(x) - f(x) = ημx - 3x + 5$ (1) για κάθε $x \in R$ και η f παραγ. στο R να δείξετε ότι δεν έχει ακρότατα.

Λύση

Αφού η f παραγ. στο R τότε και τα 2 μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμα ως πράξ. παραγ. συναρτ. οπότε παραγ. και τα 2 μέλη και έχω

$$(f^3(x) - f(x))' = (ημx - 3x + 5)' \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - f'(x) = συνx - 3 \quad (2)$$

Έστω η f έχει ακρότατο στο x_0 τότε από Θ. Fermat $f'(x_0) = 0$.
για $x = x_0$ η (2) γίνεται.

$$3f^2(x_0) \cdot f'(x_0) - f'(x_0) = συνx_0 - 3 \Leftrightarrow 0 = συνx_0 - 3 \Leftrightarrow$$
$συνx_0 = 3$ άτοπο άρα η f δεν έχει ακρότατα.

Άσκηση 4. Αν η f παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x) + xf(x) - x = 2$ (1), $x \in R$ να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση

Αφού η f παραγ στο R και τα 2 μέλη της (1) είναι παραγ ως πρ. π. συναρ στο R άρα έχω

$$(f^3(x) + xf(x) - x)' = (2)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) - 1 = 0$$

Έστω η f έχει ακρότατο στο x_0 τότε από ΘF $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
για $x = x_0$ έχω
$$3f^2(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) + x_0 f'(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1.$$

για $x=x_0$ η ① γίνεται.

$$f^3(x_0)+x_0f(x_0)-x_0=2 \Leftrightarrow 1^3+x_0\cdot 1-x_0=2 \Leftrightarrow$$

$1=2$ άτοπο άρα η f δεν έχει ακρότατα.

3ο ΕΙΔΟΣ

ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ $\xRightarrow{\Theta.F.}$ ΙΣΟΤΗΤΑ

Άσκηση 5 Αν $\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}\geq 2$ για κάθε $x\in R$ και $\alpha,\beta>0$ να δείξετε $\alpha\cdot\beta=1$.

Λύση.

Έστω $f(x)=\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}-2$. Η f έχει Π.ορ το $A=R$ είναι συνεχής στο R ως Π.σ.σ και παραγωγ. με $f'(x)=\alpha^{x-1}\ln\alpha+\beta^{x-1}\ln\beta$.

Η ανισοϊσότητα γίνεται.

$$\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}\geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}-2\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)\geq f(1).$$

άρα η f έχει ολικό ελάχιστο για $x_0=1$. και αφού είναι παραγ. στο 1 και είναι εσωτερ. σημείο του Π.ορ. τότε από Θ. Fermat

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha+\ln\beta=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\cdot\beta)=\ln 1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\cdot\beta=1.$$

Άσκηση 6 Έστω α ένα θετικός διάφορ του μηδέν και για κάθε $x\in R$ ισχύει $\alpha^x\geq x+1$. να βρεθεί το α.

Λύση

Έστω $f(x) = \alpha^x - x - 1$ Η f συνεχής στο R και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$.

Η ανισοϊσότητα γίνεται

$\alpha^x \geq x+1 \Leftrightarrow \alpha^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ άρα η f έχει ακρότατο για $x_0 = 0$

Και αφού είναι παραγ. στο $x_0 = 0$ και είναι και εσωτερικό σημείο του Π.ορ. από Θ.Fermat.

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\ln\alpha = \ln e \Leftrightarrow \alpha = e$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ (ΥΠΑΡΞΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ)

Για να έχει η f ακρότατο στο x_0 πρέπει $f'(x_0) = 0$ και να αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν του x_0.

Άσκηση 7/ $f(x) = x\ln x + e^x - 2x + \frac{x^2}{2}$

Να δείξετε ότι η f έχει ένα ακριβώς ακρότατο.

Λύση

Π.ορ της f $A = (0,+\infty)$ η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγ. ως π.π. συναρτ.

με $f'(x) = \ln x + 1 + e^x - 2 + x = \ln x + e^x + x - 1$.

Για να έχει η f ακρότατο πρέπει να υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f'(x_0) = 0$ και να αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν του x_0

Είναι $f''(x) = \frac{1}{x} + e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

άρα η $f' \nearrow$ στο $A = (0,+\infty)$.

Σύνολο τιμών της f' είναι $f'(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right)$

$\Leftrightarrow f'(A) = (-\infty, +\infty)$

αφού το $0 \in f'(A)$ και η $f' \nearrow$ τότε έχει

Ακριβώς μια ρίζα στο $(0,+\infty)$ άρα υπάρχει
ένα ακριβώς $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f'(x_0)=0$
και για $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
για $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

άρα

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 4$. Αν η f έχει ακρότατα για $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

α) Να βρεθούν οι τιμές των α, β.

β) Να βρεθεί το είδος των ακροτάτων

2) $f(x) = x^2 - \beta \ln x - \alpha$. Αν η f έχει στο $x_0 = 4$ ακρότατο το $-16\ln 2$ να βρεθούν τα α, β και το είδος του ακροτάτου

3) Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει. $f^4(x) + 3f^2(x) = e^x + 4x$
Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

4) Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει. $4x \cdot f(x) - f^2(x) = 2x^2 - 4$.
Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

5) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ισχύει $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 3$ να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

6) Αν $x^3 + (\alpha - 4)(x-1) - x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου α ένας θετικός αριθμός.
Να βρεθεί η τιμή του α.

7) $f(x) = e^x + 2x^2 - 5x + 4$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο.

8) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq e^x + \ln(x^4+1)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτ. της C_f στο A.

9) Αν $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 4 + e^x$
Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα ελάχιστο για μια μοναδική τιμή του $x_0 \in (0,1)$