ΜΑΘΗΜΑ 45
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ θα λέμε ότι:

α) η f στρέφει τα κοίλα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι $\nearrow$ στο Δ $\Leftrightarrow$ $f''(x)>0$ στο εσωτερ. του Δ

β) η f στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ αν η f' είναι $\searrow$ στο Δ $\Leftrightarrow$ $f''(x)<0$ στο εσωτερικό του Δ

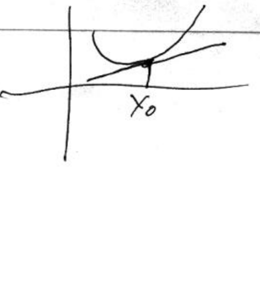
Β) Αντίστροφα. Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε θα είναι $f''(x)\geq 0$.
Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε θα είναι $f''(x)\geq 0$.

Γ) Σημείο καμπής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως το x_0 και αλλάζει η κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0 και η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0,f(x_0))$ τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής.

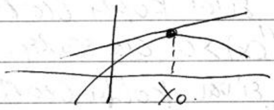
Δ) Αν το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής και υπάρχει το $f''(x_0)$ τότε υποχρεωτικά είναι $f''(x_0)=0$.

Ε) Προσοχή αν $f''(x_0)=0$ τότε δεν αρκεί για να έχει καμπή η f στο x_0 πρέπει να αλλάζει και πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του x_0

Ζ) Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομ. της C_f σε κάθε $x_0\in\Delta$ είναι κάτω από την C_f και έχουν κοινό σημείο μόνο το x_0 δηλαδή ισχύει
$f(x)\geq y(x)$ για κάθε $x\in\Delta$
και ισότητα ισχύει μόνο για το x_0.



Η) Αν η f είναι κοίλη στο $Δ$ τότε η εφαπτ. σε κάθε $x_0 \in Δ$ είναι πάνω από την C_f.
Δηλαδή ισχύει $f(x) \le y(x)$ για κάθε $x \in Δ$.
και η ισότητα ισχύει μόνο για το x_0



Θ) Αν η f είναι συνεχής στο $Δ$ και $x_0 \in Δ$ και $f''(x_0) = 0$ και η f δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε είναι κυρτή ή κοίλη σε όλο το $Δ$.

x	x_0
$f''(x)$	+ 0 +
$f(x)$	

x	x_0
$f''(x)$	− 0 −
$f(x)$	

ΕΙΔΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

1ο είδος/ Εύρεση κυρτότητας, σ. καμπής.

Άσκηση 1/ $f(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$.

να μελετήσετε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Λύση

Π. ορισμού $A = \mathbb{R}$. η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f''(x) = 20x^3 - 24x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 4x^2(5x-6)$

είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 6/5$.

x	$-\infty$	0		$6/5$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$				σκ.	

για $x \in (-\infty, 6/5]$ η f κοίλη

για $x \in [6/5, +\infty)$ η f κυρτή

για $x = 6/5$ έχει σημείο καμπής το $M(6/5, f(6/5))$

2ο είδος/ Παρατηρήσεις.

- Για να είναι η f κυρτή στο Δ αρκεί $f''(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του Δ.
- Για να είναι η f κοίλη στο Δ αρκεί $f''(x) \leq 0$
- Για να έχει η f ακρότατο στο x_0 αρκεί $f'(x_0)$ και να αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του x_0.

- Αν η f γνωρίζω ότι έχει σημείο καμπής στο $x_0 \in \Delta$ και υπάρχει το $f''(x_0)$ τότε $f''(x_0) = 0$

- Αν η f γνωρίζω ότι έχει καμπή στο $A(x_0, y_0)$ τότε $\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ f(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$

139

Άσκηση 2/ $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}\alpha x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$

Αν η f είναι κυρτή σε όλο το R να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R$.

Λύση

Είναι $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + x$ για κάθε $x \in R$

Είναι $f''(x) = x^2 - \alpha x + 1$ για κάθε $x \in R$.

Για να είναι η f κυρτή στο R πρέπει

$f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$ πρέπει

$x^2 - \alpha x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

Άρα πρέπει η $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha \in [-2, 2]$

Άσκηση 3/ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 6$.

Να βρεθούν οι τιμές των α, β αν γνωρίζω ότι η f έχει σημείο καμπής το $A(1,4)$

Λύση.

Π. ορισμού $A = R$ η f συνεχής στο R.

$f'(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ για κάθε $x \in R$

$f''(x) = 2x - 2\alpha$ για κάθε $x \in R$.

Πρέπει $\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 - 2\alpha = 0 \\ \frac{1}{3} - \alpha + \beta + 6 = 4 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{4}{3} \end{array}$

Άσκηση 4/ $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 4x - 6$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ <u>ώστε η f να έχει καμπή</u> στο $x_0 = 1$.

Λύση

$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + 4$ για κάθε $x \in R$

$f''(x) = 6x - 2\alpha$ για κάθε $x \in R$.

Πρέπει $f''(1) = 0$ και να αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του 1.

Πρέπει $f''(1)=0 \Leftrightarrow 6-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=3$

Για $\alpha=3$ είναι $f''(x)=6x-6$.

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	ΣΚ	$\cup$

Πράγματι για $\alpha=3$ η f έχει σημείο καμπής στο 1.

3ο ΕΙΔΟΣ: Η f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 5 (με άτοπο)

Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'^2(x)-2f(x)=\alpha-x^2$ να δείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $2f'(x)\cdot f''(x)-2f'(x)=-2x$

και $2f''(x)\cdot f''(x)+2f'(x)\cdot f'''(x)-2f''(x)=-2$. (2)

Έστω η f έχει σημείο καμπής στο x_0 τότε

θα είναι $f''(x_0)=0$

για $x=x_0$ η (2) γίνεται $2f''(x_0)\cdot f''(x_0)+2f'(x_0)f'''(x_0)-2f''(x_0)=-2$

άρα $(f''(x_0))^2=-2$ άτοπο άρα η f δεν έχει ΣΚ.

4ο είδος: Απόδειξη ανισοτήτων της μορφής $f(x)\le$ εφαπτομένη ή $f(x)\ge$ εφαπτομένη όταν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Άσκηση 6: $f(x)=e^{2x}-\ln(x+1)$

α) Κυρτότητα

β) Να βρεθεί η ΕΣ της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$

γ) Να δείξετε ότι $e^{2x}\ge \ln(x+1)+x+1$, $x>-1$.

Λύση Π.ορ $A=(-1,+\infty)$

α) Η f συνεχής στο A και δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x+1}$ και $f''(x)=4e^{2x}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$

Αρα η f κυρτή στο $A=(-1,+\infty)$

β) Εξίσωση εφαπτομένης $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$
$y-1=1(x-0) \Leftrightarrow y=x+1$.

γ) Επειδή η f στρέφει τα κοίλα πάνω· τότε η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο. είναι κάτω από την C_f
άρα $f(x) \geq$ εφαπτομένη για κάθε $x \in A$.
άρα $e^{2x}-\ln(x+1) \geq x+1$. το ίσον ισχύει μόνο
$e^{2x} \geq \ln(x+1)+x+1$. για το σημείο επαφής

Ασκηση 7/ $f(x)=e^x-\frac{x^3}{3}+\alpha \quad \alpha \in R$.
α) Κυρτότητα.
β) Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$
γ) Να δείξετε ότι $e^x \geq \frac{x^3}{3}+x$ για κάθε $x \in R$.

Λύση
Π.Ορ $A=R$
Η f συνεχής στο R και 2 φορές παραγωγ. ως π.π.σ.
με $f'(x)=e^x-x^2$, $f''(x)=e^x-2x$, $f'''(x)=e^x-2$
άρα

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

για $x=\ln 2$ η f'' έχει ολικό ελάχιστο. το $f''(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2$
$=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)=$
$=2(\ln e-\ln 2)>0$
άρα η $f''(x)>0$ για κάθε $x \in R$. άρα. η f είναι κυρτή στο R.

β) $y-f(0)=f'(0)(x-1) \Leftrightarrow y-(1+\alpha)=1(x-1)$
$y=x+\alpha$.

γ) Αφού η f είναι κυρτή η εφαπτομένη δεν είναι πάνω από την C_f άρα $f(x) \geq$ εφαπτ.
άρα $e^x-\frac{x^3}{3}+\alpha \geq x+\alpha \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^3}{3}+x$.

<u>5 είδος.</u> κυρτότητα → ανισότητες της μορφής $2f(\alpha+1) \le f(\alpha)+f(\alpha+2)$, 2 ΘΜΤ στα $[\alpha,\alpha+1]$, $[\alpha+1,\alpha+2]$
ή $\kappa < \frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha} < \lambda$.

<u>Άσκηση 8</u>. $f(x)=\eta\mu x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

α) Να δείξετε η f κοίλη στο $[0,\frac{\pi}{2}]$

β) για κάθε $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε
$$\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2}<\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

γ) Να δείξετε $\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}<16\left(\eta\mu\frac{\pi}{8}-\eta\mu\frac{\pi}{16}\right)<\pi\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16}$.

α) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=-\eta\mu x<0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$ και αφού η f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ τότε η f κοίλη στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

β) ΘΜΤ στα $[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]$
υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2})$ ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})-\eta\mu\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$\xi_2\in(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta)$ ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{\eta\mu\beta-\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$.

Αφού η f κοίλη η $f'\downarrow$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.
Αφού $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})-\eta\mu\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>\dfrac{\eta\mu\beta-\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$\Leftrightarrow \eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})-\eta\mu\alpha>\eta\mu\beta-\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2}) \Leftrightarrow 2\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})>\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta$.

$\Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2}<\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})$

γ) ΘΜΤ στο $[\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{8}]$ υπάρχει $\xi\in(\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{8})$
ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\frac{\pi}{8})-f(\frac{\pi}{16})}{\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{16}}=\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{8}-\eta\mu\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{16}}=\dfrac{16(\eta\mu\frac{\pi}{8}-\eta\mu\frac{\pi}{16})}{\pi}$

Αφού f κοίλη τότε $f'\downarrow$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.
Τότε $\frac{\pi}{16}<\xi<\frac{\pi}{8} \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\frac{\pi}{16})>f'(\xi)>f'(\frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16}>\dfrac{16(\eta\mu\frac{\pi}{8}-\eta\mu\frac{\pi}{16})}{\pi}>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow$

$\pi\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}<16\left(\eta\mu\frac{\pi}{8}-\eta\mu\frac{\pi}{16}\right)<\pi\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16}$.

143

Άσκηση 9) Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και 2 φορές παραγ.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha < \beta$ ισχύει
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

β) Αν $g(x) = (e^{x}+2)^{\nu}$ i) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη

ii) Να δείξετε $(e^{\alpha}+2)^{\nu}+(e^{-\alpha}+2)^{\nu} < 2\cdot 3^{\nu}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ·

1) $f(x)=x^4-4x^3+2x-2$ Να μελετήσετε την f ως προς κυρτότητα

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$ Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

3) $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{\alpha^2x^3}{3}+\frac{\alpha x^2}{2}-3x+1$ Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε η f να έχει καμπή στο $x_0=1$

4) $f(x)=x^4+\alpha x^3+\frac{3}{2}x^2+2012$ Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$. ώστε η γραφική παράσταση να έχει τα κοίλα άνω σε όλο το R.

5) $f(x)=x^3-2\alpha x^2+4\beta x-6$ Να βρεθούν οι τιμές των α,β Αν γνωρίζουμε ότι η f έχει σημείο καμπής το $A(1,4)$

6) Αν $f^2(x)+xf(x)=-x^2+1$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής, όταν είναι 2 φορές παραγ. στο R.

7) $f(x)=\ln(\ln x)$

i) Να βρεθεί το π. ορισμού ii) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$.

iv) Να δείξετε $\ln x\le e^{\frac{x-e}{e}}$

v) Να δείξετε $2\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\ln\alpha\cdot\ln\beta$.

8) $f(x)=\ln x-x$, $g(x)=\ln^2x+2x\ln x+x^2-3$.

i) Να βρεθεί το ακρότατο της f

ii) Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο $x_0=1$.

iv) Να δείξετε $(x+\ln x)^2>4x-3$.

9) $f(x)=x\ln x$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

ii) Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ και $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ Να δείξετε $\beta^{2\beta}<\alpha^\alpha\cdot\gamma^\gamma$

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$.

iv) Να δείξετε $x\ln x\ge 2x-e$.

10) Αν η f παραγωγίσιμη στο R. και $f^3(x)+f(x)=x$

i) Να βρεθεί το $f(0)$ ii) Να βρεθεί η μονοτονία της f

iii) Να βρεθεί το ακρότατο της f

iv) Να δείξετε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R. και να βρεθεί η κυρτότητα της f

ΜΑΘΗΜΑ 46.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ.

Για να βρώ το μέγιστο ή ελάχιστο ενός μεγέθους Μ. Κατασκευάζω από τα δεδομένα μια συνάρτηση του μεγέθους Μ ως προς ένα άγνωστο x, $M(x)$ και βρίσκω τα ολικά ακρότατα της $M(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση 1/ Ένας αλουμινάς πρόκειται να κατασκευάσει ένα παράθυρο σχήματος ορθογωνίου και διαθέτει βέργα συνολικού μήκους 8m. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραθύρου ώστε το εμβαδόν να είναι μέγιστο.

Λύση

Έστω x, y οι διαστάσεις τότε είναι $2x+2y=8 \Leftrightarrow x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$

Είναι εμβαδόν $E = x\cdot y \Rightarrow E = x(4-x)$.

άρα $E(x) = -x^2+4x$, $x\in(0,4)$ και ζητάω το μέγιστο.

Είναι $E'(x) = -2x+4$

x	0		2		4
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗		↘	
			Ο.Μ.		

Άρα για $x=2$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο τότε είναι και $y=4-2=2$ άρα.

Το μέγιστο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Άσκηση 2/ Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $f(x)=3+\sqrt{3x^2+4}$ που απέχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(0,3)$

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x,y)=(x, 3+\sqrt{3x^2+4})$ ένα σημείο της καμπύλης

τότε $(AM)=\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+(3+\sqrt{3x^2+4}-3)^2}=2\sqrt{x^2+1}=d(x)$

οπότε $d'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ άρα

x		0	
$d'(x)$	−	0	+
$d(x)$	↘		↗
		ΟΕ	

άρα η απόσταση γίνεται ελάχιστη για $x=0$ οπότε το σημείο είναι $M(0,5)$

(147)

Άσκηση 3 Έστω η f παραγωγίσιμη στο 2 και ισχύει $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4}{x-2}=2$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$ που τέμνει τους άξονες στα A, B.

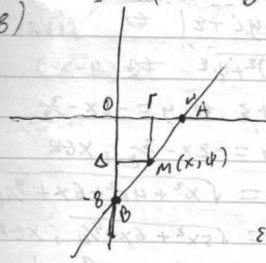
β) Από ένα σημείο M εντός του τμήματος AB της εφαπτ. φέρνουμε κάθετες προς τους άξονες και σχηματίζουμε το ορθογώνιο $M\Gamma O\Delta$. Να βρεθεί το M ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.

Λύση

α) Έστω $g(x)=\frac{f(x)+4}{x-2} \Leftrightarrow f(x)=(x-2)\cdot g(x)-4$ τότε $\lim_{x\to 2}f(x)=-4$ και αφού η f συνεχής τότε $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=-4$ και $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2$

Εξίσωση εφαπτ. $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=2x-8$. εξίσωση ευθείας.

β)



Η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(4,0)$ αφού για $y=0 \Rightarrow x=4$ και $B(0,-8)$ αφού για $x=0 \Rightarrow y=-8$.

οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=|x|\cdot|y|$ και αφού $0\le x\le 4$ και $-8\le y\le 0$ τότε $E=x\cdot(-y)$ άρα

$E(x)=x\cdot(-(2x-8))=-2x^2+8x$, $0\le x\le 4$

είναι $E'(x)=-4x+8$. άρα $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	0		2		4
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗	ο.μ.	↘	

Για $x=2$ το εμβαδόν γίνεται ολικό μέγιστο και είναι $E(2)=8$.

τότε $x=2$ και $y=-4$ Άρα το $M(2,-4)$

Άσκηση 4

Ποιο σημείο της παραβολής $y=x^2$ έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε): $y=2x-4$.

Λύση

Έστω $M(x,y)=M(x,x^2)$ ένα τυχαίο σημείο της παραβολής τότε η απόσταση του M από την ευθεία είναι

$d(M,\varepsilon)=\frac{|2x-x^2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|x^2-2x+4|}{\sqrt{5}}=\frac{x^2-2x+4}{\sqrt{5}}$

αφού $\Delta<0$ και $x^2-2x+4>0$

Έστω $f(x)=x^2-2x+4$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2x-2$.

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

Άρα η απόσταση γίνεται ελάχιστη όταν $x=1$ τότε.
το σημείο με την ελαχ απόσταση είναι $M(1,1)$

<u>Άσκηση 41.</u> $f(x)=x\cdot \ln^2 x$ να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της C_f που έχει τη μικρότερη κλίση. <u>Λύση</u>

Κλίση ονομάζουμε τον συντελ. διεύθυνσης της εφαπτομένης που για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\lambda(x)=f'(x)=\ln^2x+2\ln x$, $x>0$

τότε $\lambda'(x)=\dfrac{2\ln x+2}{x}$, $x>0$

είναι $\lambda'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=1/e$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
$\lambda(x)$		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος για $x=1/e$.
στο σημείο $M(1/e, f(1/e))=M(1/e, 1/e)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Έστω $f(x) = x\ln^2 x$, $x>0$

α) Να βρείτε την κλίση της f, $\lambda(x)$ σε κάθε $x>0$.

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο της C_f η κλίση γίνεται ελάχιστη και να βρεθεί η εφαπτομένη σε σημείο αυτό.

2) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = 4x+2$. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(2,0)$.

3) $f(x) = 2x - x^2$

Να βρείτε σε ποιο σημείο της C_f η εφαπτομένη σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν

4) Αν x, y οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με εμβαδόν $400m^2$ να βρεθούν οι τιμές των x,y ώστε το ορθογώνιο να έχει τη μικρότερη δυνατή περίμ.

5) $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 2012$.

Σε ποιο σημείο της γραφ. παράστασης της f η εφαπτομένη έχει το μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης

6) $f(x)=e^x$, $g(x)=x$

α) Να δείξετε C_f, C_g δεν έχουν κοινά σημεία.

β) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την κατακόρυφη απόσταση (AB) δύο σημείων C_f, C_g

γ) Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία η κατακόρυφη απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη