



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Γεωμετρία: Ο χώρος Minkowski»

ΛΥΚΕΡΙΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Δ 200813

**Επιβλέπων Καθηγητής
ΡΑΠΤΗΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ**

ΑΘΗΝΑ 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών**
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη
από τους κκ.:

	Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1	Ράπτη Ευάγγελο (επιβλέποντα)	Καθηγητή	
2	Βάρσο Δημήτριο	Αναπλ. Καθηγητή	
3	Λάππα Διονύσιο	Αναπλ. Καθηγητή	

**στο Γιώργο και τον Χρήστο
που δίνουν νόημα
σε κάθε μου προσπάθεια
και στην Αγγελική
που ακόμα με αντέχει**

«Στο εξής ο χώρος και ο χρόνος, ξεχωριστά ο ένας από τον άλλον,
είναι καταδικασμένοι να καταντήσουν απλές σκιές και μόνο ένα
είδος συνένωσης των δύο θα διατηρήσει μιαν ανεξάρτητη οντότητα».

H. MINKOWSKI, Raum und Zeit, 1908

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	7
Εισαγωγή.....	9
1. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ MINKOWSKI	
1.1 Προκαταρκτικά.....	15
1.2 Ο χωρόχρονος Minkowski.....	18
1.3 Η ομάδα Lorentz.....	25
1.4 Χρονοειδή διανύσματα και καμπύλες.....	41
1.5 Χωροειδή διανύσματα.....	55
1.6 Σχέσεις αιτιολογίας.....	58
1.7 Μετασχηματισμοί στροφής και η ομάδα Lorentz.....	71
2. ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ	
2.1 Παρουσίαση και τεκμηρίωση.....	84
2.2 Ανάλυση Φύλλων Εργασίας.....	88
2.3 Φύλλο Εργασίας.....	118
Βιβλιογραφία.....	122

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι ένας κόσμος γεμάτος εκπλήξεις και αναπάντεχα γεγονότα, η γνώση των οποίων άλλαξε και αλλάζει ριζικά τις ζωές δισεκατομμυρίων ανθρώπων, καθώς και τον τρόπο που αντιλαμβάνονται τα πράγματα – μέσα και έξω από το σώμα τους. Για να γίνει όμως πράξη μια τέτοια αλλαγή, οφείλει η νέα γνώση να γίνει κτήμα όλο και περισσότερων ανθρώπων. Όλο και περισσότερο να βγει από τα γραφεία και τα μυαλά των μυημένων και να ενσωματωθεί στις αντιλήψεις των πολλών. Η ανακάλυψη της φωτιάς δεν οδήγησε σε μια πραγματική αλλαγή στη ζωή του ανθρώπου παρά μόνο όταν όλοι, ή έστω οι περισσότεροι, μπορούσαν να τη χρησιμοποιήσουν. Έπαψε να αποτελεί δεδομένο το κρύο και η ακατέργαστη τροφή. Ο άνθρωπος πέρασε σε ένα άλλο στάδιο της εξέλιξης.

Η ανακάλυψη της σφαιρικότητας της Γης είναι ένα ακόμη χαρακτηριστικό παράδειγμα. Μια ανακάλυψη – διαπίστωση, που έγινε αιώνες πριν, αλλά χρειάστηκε ο Κοπέρνικος και ο Γαλιλαίος για να ανακοινωθεί προς τα έξω και αρκετές ακόμη προσπάθειες φωτισμένων ανθρώπων για να γίνει δεκτό από τους πολλούς, μιας και ερχόταν σε ευθεία αντίθεση με την άμεση αντίληψη. Σήμερα, περνώντας αυτή τη γνώση μέσα από τα κανάλια της καθημερινότητας, έπαψαν να αποτελούν εμπόδιο οι αισθήσεις και σε κάποιες περιπτώσεις έγιναν εργαλείο για την κατανόηση του γεγονότος ότι η Γη είναι σφαιρική. Για παράδειγμα, η εμφάνιση ενός πλοίου στον ορίζοντα είναι μια τέτοια ένδειξη. Ο γενικά δύσπιστος άνθρωπος εγκέφαλος αποδέχτηκε την ιδέα, την ενσωμάτωσε στις καθιερωμένες αντιλήψεις και έχτισε πάνω της μια νέα εικόνα του κόσμου.

Η θεωρία της σχετικότητας – ειδικής και γενικής – όπως την επεξεργάστηκαν ο Poincare και ο Lorentz, ο Minkowski και ο Einstein, αποτελεί ένα σύγχρονο άβατο. Οδηγώντας στην πλήρη αναθεώρηση των εννοιών του χώρου και του χρόνου, δημιουργεί μια σειρά από επιστημολογικά, εννοιολογικά, μαθησιακά και αρκετών ακόμη κατηγοριών εμπόδια. Ο κόσμος που μας περιβάλλει δεν είναι Ευκλείδειος κι αυτό είναι γνωστό εδώ και τουλάχιστον έναν αιώνα. Δεν έχει όμως βρεθεί ακόμη ο τρόπος ώστε αυτό να γίνει κατανοητό από τους πολλούς και να αναδείξει τις πολλαπλές – θέλω να πιστεύω – ευεργετικές του ιδιότητες. Η προσπάθεια όμως για τη διάδοση των ιδεών αυτών πρέπει να συνεχιστεί. Σε αυτή εντάσσεται και η

παρούσα διπλωματική εργασία. Αρχικά θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια δικαιολογία για το λόγο που ο χώρος πρέπει να είναι τεσσάρων διαστάσεων, με συγκεκριμένες ιδιότητες, ακολουθώντας την ιστορική εξέλιξη των ιδεών. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η γεωμετρία του χώρου αυτού από τη μαθηματική σκοπιά, έτσι ώστε να θεμελιωθεί το όλο εγχείρημα. Τέλος, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια πρόταση διδακτικής παρέμβασης, η οποία μπορεί να απευθύνεται σε μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου ή σε φοιτητές του πρώτου έτους.

Δεν είναι στις προθέσεις μας να διδάξουμε την γεωμετρία του χώρου Minkowski. Ο στόχος είναι να φέρουμε σε επαφή με την ουσία του αντικειμένου άτομα, που κάτω από άλλες συνθήκες θα έμεναν με την λανθασμένη εντύπωση ότι η θεωρία της σχετικότητας λέει πως «όλα είναι σχετικά» και να δώσουμε στα άτομα αυτά τη δυνατότητα δημιουργίας «συνάψεων» ώστε σε μια επόμενη ενασχόλησή τους (με μεγαλύτερη λεπτομέρεια) να είναι έτοιμοι να κατακτήσουν την πραγματική εικόνα για τον κόσμο που μας περιβάλλει.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη ενός χώρου τεσσάρων διαστάσεων, θα ήταν φρόνιμο να προσπαθήσουμε να δώσουμε μια αιτία για την οποία ένας τέτοιος χώρος είναι απαραίτητο να υπάρχει.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή. Περίπου στα 1864, ο Maxwell διατυπώνει τη θεωρία του για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Το φως είναι ένα κύμα. Πώς όμως μεταδίδονται οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές δυνάμεις; Όλοι πίστευαν πως κάποιου είδους φορέας ήταν απαραίτητος για να στηρίζει τα πεδία. Αυτός ο φορέας, που ονομάστηκε αιθέρας, υπέθεταν ότι καταλαμβάνει όλο το χώρο και έπρεπε να έχει τις εξής αντιφατικές ιδιότητες:

- α) να μπορεί να διαπερνά τέλεια τα υλικά αντικείμενα, και ταυτόχρονα
- β) να είναι άπειρα στερεός ώστε να μπορεί να στηρίζει το φως.

Ο αιθέρας αποτελούσε τον απόλυτο χώρο, την έδρα του προνομιακού συστήματος συντεταγμένων που δικαιούμαστε να θεωρήσουμε ως απόλυτα ακίνητο και να αναφερόμαστε σε αυτό το σύστημα όταν θέλουμε να μελετήσουμε την απόλυτη κίνηση ενός σώματος. Αυτή η άποψη, μοιραία, οδήγησε στη διατύπωση του ερωτήματος περί της απολύτου κίνησης της Γης. Αφού η Γη κινείται, ποια είναι η απόλυτη κίνησή της; Πολλά πειράματα σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν για το σκοπό αυτό με πιο γνωστά αυτά των Michelson και Morley (1887) οι οποίοι πίστευαν πως αν μετρούσαν την ταχύτητα του φωτός σε διάφορες κατευθύνσεις θα προέκυπτε μια διαφορά που θα ήταν αρκετή για να υπολογιστεί η απόλυτη ταχύτητα της Γης.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα βαγόνι τρένου, το οποίο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα v ως προς το έδαφος. Από το μέσον του βαγονιού ξεκινούν δύο σφαίρες με ταχύτητα u η καθεμιά, διεύθυνση κίνησης τον άξονα του βαγονιού και φορά, η μία προς το εμπρός τμήμα του βαγονιού και η άλλη προς το πίσω μέρος του. Ένας παρατηρητής που στέκεται στο έδαφος και βλέπει τις μπάλες μέσα στο βαγόνι, μετρά τις ταχύτητές τους και τις βρίσκει $u - v$ για τη σφαίρα που κινείται προς το εμπρός μέρος και $u + v$ για τη σφαίρα που κινείται προς τα πίσω. Από τις μετρήσεις αυτές μπορεί να μετρήσει την ταχύτητα του βαγονιού.

Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων όμως ήταν απογοητευτικά για τους σχεδιαστές τους. Καμία διαφορά δεν είχε η ταχύτητα του φωτός ανεξάρτητα από το ποια διεύθυνση ακολουθούσε.

Ο Lorentz, στην προσπάθειά του να εξηγήσει αυτή την αδυναμία, ανέπτυξε μεταξύ των ετών 1892 και 1909 μια θεωρία σχετικά με τον αιθέρα, η οποία βασίστηκε τελικά στη διατύπωση δύο υποθέσεων: της διαμήκουσ συστολής των στερεών σωμάτων και της επιβράδυνσης των ρολογιών όταν αυτά κινούνται εντός του αιθέρα με ταχύτητα v κατά έναν παράγοντα $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός. Συνεπώς, οι μεταβολές αυτές θα επηρέαζαν κάθε συσκευή σχεδιασμένη να μετρά το ρεύμα του αιθέρα, με αποτέλεσμα την εξουδετέρωση όλων των αναμενόμενων φαινομένων. (Rindler, 2001, pp. 1-2)

Το πρόβλημα βρισκόταν στην πεποίθηση μεταξύ των επιστημόνων της εποχής ότι, όπως ο Newton είχε διατυπώσει στα “Principia” :

«Ο χώρος και ο χρόνος έχουν απόλυτη υπόσταση, ανεξάρτητη από τα φαινόμενα που διαδραματίζονται μέσα σε αυτούς. Είναι τα όργανα, με τα οποία ο Θεός πραγματοποιεί το πανταχού παρών Του στον κόσμο και συλλαμβάνει ακαριαία τη ροή των πραγμάτων».

Μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον, το 1905 ο Einstein διατυπώνει την ειδική θεωρία της σχετικότητας, η οποία ουσιαστικά βασίζεται σε δύο αρχές – αξιώματα:

1^η αρχή (αρχή της σχετικότητας)

*Οι νόμοι της Φυσικής είναι πανομοιότυποι
σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

2^η αρχή

*Υπάρχει ένα αδρανειακό σύστημα στο οποίο τα φωτεινά σήματα
διαδίδονται στο κενό πάντοτε ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα c ,
προς κάθε κατεύθυνση, ανεξάρτητα από την κίνηση της πηγής.*

Το πρώτο αξίωμα αποτελούσε απλά μια γενίκευση σε ολόκληρη τη Φυσική, μιας αρχής σχετικότητας που ίσχυε στη Νευτώνεια Μηχανική και ως εκ τούτου δεν συνάντησε ιδιαίτερες δυσκολίες στην αποδοχή της. Για το δεύτερο αξίωμα υπήρχαν, όπως είδαμε και πειραματικά δεδομένα. Ο συνδυασμός των δύο αξιωμάτων οδήγησε στη διατύπωση ενός νόμου για τη διάδοση του φωτός (και κατ’ επέκταση κάθε ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας):

*«Τα φωτεινά σήματα διαδίδονται στο κενό ευθύγραμμα,
με την ίδια ταχύτητα c , σε κάθε χρονική στιγμή,
προς κάθε κατεύθυνση και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα».*

Αυτή η διατύπωση καθιστούσε αυτομάτως όλα τα αδρανειακά συστήματα ισοδύναμα και επομένως την ύπαρξη του αιθέρα αδύνατη ή καλύτερα άχρηστη αφού δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κάποιο προνομιακό σύστημα αναφοράς. Το μήκος και η διάρκεια έγιναν μεγέθη σχετικά και η μέτρησή τους από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Μόνο το φως εξακολουθεί να κινείται με την ίδια ταχύτητα για όλους.

Ας γυρίσουμε για λίγο στο παράδειγμα του κινούμενου βαγονιού. Αντί για σφαίρες όμως, από το μέσον του βαγονιού εκπέμπονται δύο φωτεινά σήματα, τα οποία μόλις φθάσουν στο άκρο του βαγονιού ενεργοποιούν έναν μηχανισμό που σηκώνει μία σημαία. Για τον παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο βαγόκι οι δύο σημαίες θα σηκωθούν ταυτόχρονα. Όμως για τον παρατηρητή που βρίσκεται στο έδαφος, η σημαία στο πίσω μέρος θα σηκωθεί πριν από εκείνη που βρίσκεται στο μπροστινό μέρος. Αυτό συμβαίνει γιατί το φως διατρέχει μικρότερο μήκος ταξιδεύοντας προς τα πίσω αφού το βαγόκι κινείται προς αυτό. Αντίθετα κινούμενο προς τα εμπρός, το φως πρέπει να καλύψει και την απόσταση που έχει διανύσει το κινούμενο βαγόκι. Όταν η ταχύτητα του τρένου είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, το φαινόμενο δεν γίνεται αντιληπτό. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει. Όταν η ταχύτητα του τρένου γίνεται συγκρίσιμη με αυτή του φωτός, γίνεται άμεσα αντιληπτό.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην αρχική μας επιδίωξη. Καταρχήν πρέπει να συμφωνήσουμε ότι ο βασικός ρόλος της επιστήμης είναι η περιγραφή «γεγονότων» και η ανάλυση των σχέσεων μεταξύ τους. Τι εννοούμε όμως με τον όρο «γεγονός»; Συνήθως αναφερόμαστε σε κάτι που συμβαίνει «κάπου», «κάποια» χρονική στιγμή, όπου το «κάπου» είναι καθορισμένο και χωρίς καμία χρονική διάρκεια. Ένα «γεγονός» οφείλει να είναι σημειακό και στιγμιαίο. Σημαντικότερη όμως ιδιότητα κάθε γεγονότος είναι ότι πρέπει να είναι παρατηρήσιμο. Αυτή η ιδιότητα με τη σειρά της οδηγεί στην αναγκαιότητα να οριστούν δύο πράγματα: ποιος παρατηρεί και με ποιο τρόπο το κάνει αυτό.

Για τη φύση του παρατηρητή μπορούμε να πούμε ότι

«ένας παραδεκτός – αδρανειακός παρατηρητής εποπτεύει χρησιμοποιώντας ένα τρισδιάστατο, δεξιόστροφο, καρτεσιανό χωρικό σύστημα συντεταγμένων βασισμένο σε μια αποδεκτή μονάδα μήκους και σε σχέση με το οποίο το φως διαδίδεται ευθύγραμμη προς όλες τις κατευθύνσεις».

Προφανώς, ο παρατηρητής αποτελεί μέρος του συστήματος που εποπτεύει και δεν είναι πανταχού παρών. Επίσης, ο περιορισμός για την ευθύγραμμη κίνηση

του φωτός είναι ουσιαστικός και έχει νόημα μόνο για το συγκεκριμένο χωρικό σύστημα στο οποίο αναφέρεται.

«Κάθε αδρανειακός παρατηρητής εφοδιάζεται με ένα τυπικό, ιδεατό ρολόι, βασισμένο σε αποδεκτές μονάδες χρόνου, με το οποίο μπορεί να καθορίζει μια ποσοτική χρονική τάξη (σειρά – διαδοχή) στα γεγονότα στην κοσμική γραμμή του¹».

Παρατηρήστε ότι κάθε παρατηρητής μπορεί να αποδώσει χρόνο σε κάθε γεγονός που συμβαίνει στη δική του κοσμική γραμμή. Για να επικοινωνήσουν όμως μεταξύ τους δύο παρατηρητές για την ανταλλαγή πληροφοριών για «ανεξάρτητα» γεγονότα, πρέπει να καθορίσουμε μια διαδικασία για την τοποθέτηση και τον συγχρονισμό των ρολογιών διαμέσου των χωρικών συστημάτων συντεταγμένων. Αυτό δεν μπορεί να γίνει με την μαζική παραγωγή ρολογιών σε κάποιο σημείο και την αποστολή τους στα διάφορα σημεία μέσα στο σύστημα γιατί η μετακίνηση των ρολογιών επηρεάζει την ροή του χρόνου στα ρολόγια. Για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι κάθε παρατηρητής κατασκευάζει το δικό του ρολόι στην αρχή του δικού του συστήματος και αφού τα μεταφέρει στο επιθυμητό μέρος τα στερεώνει και επιστρέφει στην αρχή. Θεωρούμε επίσης ότι κάθε παρατηρητής έχει έναν βοηθό σε κάθε σημείο που τοποθετήθηκε ρολόι. Για τον συγχρονισμό των ρολογιών αρκεί η εκπομπή ενός φωτεινού σήματος από την αρχή των αξόνων, έστω τη στιγμή t_0 . Το σήμα φτάνει στο τυχόν σημείο P και ανακλάται επιστρέφοντας στην πηγή του τη χρονική στιγμή t_1 . Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει καμιά καθυστέρηση στο σημείο P, ο παρατηρητής O υπολογίζει την ταχύτητα του σήματος ως

$$\frac{\text{απόσταση}(O, P)}{\frac{1}{2}(t_1 - t_0)}$$

Αυτή η μέθοδος, που είναι γνωστή ως μέθοδος Fizeau, δίνει τελικά την ταχύτητα του φωτός c , η οποία όμως είναι γνωστό ότι είναι ανεξάρτητη του χρόνου κατά τον οποίο πραγματοποιείται η μέτρηση, της συσκευής μέτρησης (π.χ. που βρίσκεται το P), της συχνότητας (ενέργειας) του σήματος και έχει την ίδια αριθμητική τιμή για όλους τους παρατηρητές (περίπου 300 000 Km / sec).

Ζητάμε από τους παρατηρητές μας να πολλαπλασιάσουν το χρόνο που βρήκαν με την ταχύτητα c , ώστε η μέτρηση του χρόνου να γίνεται σε χωρικές μονάδες. Με τον τρόπο αυτό, όλες οι ταχύτητες είναι αδιάστατες και $c = 1$.

¹ Θεωρώντας κάθε «γεγονός» ως σημειακό και χωρίς χρονική διάρκεια, η ύπαρξη ενός υλικού σωματιδίου ή ενός φωτονίου μπορεί να παρασταθεί από μια συνεχή ακολουθία «γεγονότων» που ονομάζεται η «κοσμική γραμμή» του.

Ας θεωρήσουμε ότι το χωρικό σύστημα συντεταγμένων δύο παρατηρητών O και \hat{O} είναι το $\Sigma(x^1, x^2, x^3)$ και $\hat{\Sigma}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$, στο οποίο προστίθεται μια τέταρτη συνιστώσα $x^4 (= ct)$ και $\hat{x}^4 (= c\hat{t})$.

Τώρα, εφοδιάζουμε κάθε παρατηρητή μας με ένα σύστημα συγχρονισμένων ρολογιών ως εξής: Σε κάθε σημείο του χωρικού συστήματος συντεταγμένων τοποθετείται ένα ρολόι πανομοιότυπο με αυτό του παρατηρητή. Κάποια στιγμή x^4 στο O , εκπέμπεται ένα σφαιρικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Καθώς το μέτωπο του κύματος φτάνει στο P το ρολόι στο σημείο αυτό τοποθετείται στο χρόνο $x^4 + d(O, P)$ και αρχίζει να δουλεύει. Δηλαδή συγχρονίστηκε με το ρολόι της πηγής. Έτσι κάθε παρατηρητής έχει ένα σύστημα αναφοράς $S(x^1, x^2, x^3, x^4)$ και $\hat{S}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$.

Εκείνο που μένει είναι να δούμε πως οι \hat{S} συντεταγμένες ενός γεγονότος σχετίζονται με τις S συντεταγμένες του. Η απεικόνιση

$$\mathcal{F}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{με} \quad \mathcal{F}(x^1, x^2, x^3, x^4) = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$$

πρέπει καταρχήν να είναι 1-1 και επί ώστε να υπάρχει και η αντίστροφη απεικόνιση.

Χρειάζεται εδώ να διατυπώσουμε μια **υπόθεση αιτιότητας**:

«Κάθε δύο αδρανειακοί παρατηρητές συμφωνούν για τη χρονική σειρά δύο οποιονδήποτε γεγονότων στην κοσμική γραμμή ενός φωτονίου, δηλαδή αν δύο γεγονότα έχουν στο S συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3, x^4) και $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ και στο \hat{S} σύστημα συντεταγμένες $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4)$ και $(\hat{x}_0^1, \hat{x}_0^2, \hat{x}_0^3, \hat{x}_0^4)$ αντίστοιχα, τότε οι ποσότητες $x^4 - x_0^4$ και $\hat{x}^4 - \hat{x}_0^4$ έχουν το ίδιο πρόσημο».

Δύο τέτοια γεγονότα στο S , έχουν συντεταγμένες που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^i - x_0^i = v^i (x^4 - x_0^4) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

για κάποιες σταθερές v^1, v^2, v^3 με $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = 1$ (αφού στο S είναι $c = 1$) και συνεπώς

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0 \quad (*)$$

Μπορούμε να φανταστούμε την τελευταία σχέση ως την εξίσωση ενός «κώνου» στον \mathbb{R}^4 με κορυφή $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ γενικεύοντας από τον \mathbb{R}^3 , όπου η εξίσωση του κώνου είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2$. Όμως αυτό πρέπει να ισχύει σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, άρα η \mathcal{F} πρέπει να διατηρεί τον «κώνο».

Έτσι, η \mathcal{F} μεταφέρει τον «κώνο» (*) στον κώνο

$$(\hat{x}^1 - \hat{x}_0^1)^2 + (\hat{x}^2 - \hat{x}_0^2)^2 + (\hat{x}^3 - \hat{x}_0^3)^2 - (\hat{x}^4 - \hat{x}_0^4)^2 = 0$$

και ικανοποιείται η σχέση $\hat{x}^4 > \hat{x}_0^4$, αν $x^4 > x_0^4$ και ισχύει η (*).

Ο Zeeman το 1964 έδειξε ότι κάθε τέτοιος αυτομορφισμός \mathcal{F} είναι ένας συνδυασμός των παρακάτω τριών τύπων:

1. Μετατοπίσεις:

$$\hat{x}^a = x^a + \Lambda^a, \quad a = 1, 2, 3, 4 \quad \text{για κάποιες σταθερές } \Lambda^a.$$

2. Θετικά πολλαπλάσια:

$$\hat{x}^a = k \cdot x^a, \quad a = 1, 2, 3, 4 \quad \text{για κάποια θετική σταθερά } k.$$

3. Γραμμικός μετασχηματισμός:

$$\hat{x}^a = \Lambda_b^a \cdot x^b, \quad a, b = 1, 2, 3, 4, \quad \text{όπου ο πίνακας } \Lambda = [\Lambda_b^a]_{a,b=1,2,3,4}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες: i) $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, με $\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ και ii) $\Lambda^4_4 \geq 1$.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι πραγματικά εντυπωσιακό, αν σκεφτούμε ότι δεν ζητήσαμε από την \mathcal{F} να είναι συνεχής, ούτε καν γραμμική.

Δύο συστήματα αναφοράς που συνδέονται με μια απεικόνιση τύπου 2, διαφέρουν μόνο ως προς την κλίμακα (μονάδες μέτρησης) και επομένως η διαφορά τους είναι τετριμμένη και μπορεί εύκολα να αναιρεθεί. Επίσης, οι μετατοπίσεις μπορούν να θεωρηθούν ως οι \hat{S} - συντεταγμένες της πηγής του συστήματος S και επομένως μπορούμε να τις παραλείψουμε απλά θεωρώντας $\Lambda^a = 0$.

Έτσι, μένουν προς μελέτη μόνο οι αυτομορφισμοί τύπου 3, οι οποίοι ονομάζονται «**ορθόχρονοι μετασχηματισμοί Lorentz**» και είναι εκείνες οι απεικονίσεις που αφήνουν αναλλοίωτη την τετραγωνική μορφή

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$$

(ανάλογα προς τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς στον \mathbb{R}^3 , που αφήνουν αναλλοίωτο το σύννηθες τετραγωνικό μήκος $x^2 + y^2 + z^2$) και καθορίζουν έναν χρονικό προσανατολισμό, με την έννοια της υπόθεσης αιτιότητας.

1. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ MINKOWSKI

1.1 Προκαταρκτικά

☞ ➤ Έστω V ένας διανυσματικός χώρος, διάστασης $n \geq 1$, πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών. Μια απεικόνιση

$$\sigma : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$$

λέγεται **διγραμμική μορφή** αν είναι γραμμική ως προς κάθε συντεταγμένη της, δηλαδή αν ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$1. \sigma(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot \sigma(u, v) \quad , \quad \sigma(u + v, w) = \sigma(u, w) + \sigma(v, w)$$

$$2. \sigma(u, \lambda \cdot v) = \lambda \cdot \sigma(u, v) \quad , \quad \sigma(u, v + w) = \sigma(u, v) + \sigma(u, w)$$

για κάθε $u, v, w \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$.

☞ ➤ Αν $u, v \in V$ και $\sigma(u, v) = \sigma(v, u) = 0$, τότε τα u και v λέγονται **κάθετα**. Αν W_1, W_2 είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V , λέμε ότι οι W_1 και W_2 είναι **κάθετοι** αν $\sigma(u, v) = \sigma(v, u) = 0$, για κάθε $u \in W_1$, και για κάθε $v \in W_2$.

☞ ➤ Αν W είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V τότε συμβολίζουμε με W^\perp το σύνολο

$$W^\perp = \{v \in V : \sigma(v, w) = \sigma(w, v) = 0, \text{ για κάθε } w \in W\}$$

Ο W^\perp λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του W και είναι επίσης ένας διανυσματικός υπόχωρος του V .

☞ ➤ Μια διγραμμική μορφή $\sigma : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ είναι

1) **συμμετρική**, αν $\sigma(u, w) = \sigma(w, u)$, για κάθε u, w στον V .

2) **μη εκφυλισμένη**, αν $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του V .

Μια συμμετρική, μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή σ στον V λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** στον V . Τότε, αντί για $\sigma(u, w)$ γράφουμε συνήθως $u \cdot v$.

Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathfrak{R}^n , όπου, αν $v = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^n)$, $w = (w^1, w^2, \dots, w^n) \in \mathfrak{R}^n$, τότε

$$v \cdot w = v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + \dots + v^n \cdot w^n$$

Γι αυτό το εσωτερικό γινόμενο ισχύει ότι $v \cdot v > 0$, για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα v στον \mathfrak{R}^n και λέγεται **θετικά ορισμένο**. Όμως δεν ισχύει το ίδιο για κάθε εσωτερικό γινόμενο που μπορούμε να ορίσουμε στον \mathfrak{R}^n . Π.χ. αν ορίσουμε το $g : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ με $g(v, w) = v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + \dots + v^{n-1} \cdot w^{n-1} - v^n \cdot w^n$, τότε για το διάνυσμα $u = (0, 0, \dots, 0, 1)$ είναι $g(u, u) = -1 < 0$.

Αν για το εσωτερικό γινόμενο $g : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ είναι $g(u, u) < 0$, για κάθε u στον V , τότε αυτό λέγεται **αρνητικά ορισμένο** και αν δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένο λέγεται **απροσδιόριστο**.

Τέλος, μια διγραμμική μορφή σ για την οποία ισχύει ότι $\sigma(u, u) = 0$, για κάθε u στον V , λέγεται **εναλλάσσουσα**².

☞ ➤ Κάθε εσωτερικό γινόμενο $g : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ ορίζει μια μοναδική **τετραγωνική μορφή**

$$Q : V \rightarrow \mathfrak{R} \quad \text{με} \quad Q(v) = g(v, v) = v^2$$

Μάλιστα, κάθε τετραγωνική μορφή προκύπτει από ένα συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο στον V . Δηλαδή, διαφορετικά εσωτερικά γινόμενα στον V ορίζουν διαφορετικές τετραγωνικές μορφές.

Ένα διάνυσμα $v \in V$, για το οποίο η $Q(v)$ είναι ίση με 1 ή -1 λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα (unit vector).

Θεώρημα 1: Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης n στον οποίο είναι ορισμένη μια μη εκφυλισμένη, συμμετρική διγραμμική μορφή

$$g : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}.$$

Υπάρχει μια βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ για τον V τέτοια, ώστε $g(e_i, e_j) = 0$ όταν $i \neq j$ και $Q(e_i) = \pm 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Μάλιστα, ο αριθμός των διανυσμάτων της βάσης για τα οποία $Q(e_i) = -1$ είναι ο ίδιος για κάθε τέτοια βάση.

☞ ➤ Μια βάση ενός διανυσματικού χώρου V , που αποτελείται από ανεξάρτητα, ορθογώνια ανά δύο, μοναδιαία διανύσματα του χώρου, λέγεται **ορθοκανονική** βάση για τον V . Συνήθως, αναδιατάσσουμε τα διανύσματα μιας τέτοιας βάσης ώστε πρώτα να μπαίνουν τα διανύσματα με $Q(e_i) = 1$ και στο τέλος αυτά που δίνουν -1.

² Ανούσης Μιχάλης, Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας, ΕΑΠ, 2008, σελ.109

Αν r από τα διανύσματα μιας τέτοιας βάσης του V έχουν $Q(e_k) = -1$, τότε η βάση γράφεται

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$$

όπου $Q(e_i) = 1$, $1 \leq i \leq n-r$

$Q(e_i) = -1$, $n-r+1 \leq i \leq n$

Επομένως, αν

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \quad , \quad w = \sum_{i=1}^n w^i e_i$$

τότε $v \cdot w = v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + \dots + v^{n-r} \cdot w^{n-r} - v^{n-r+1} \cdot w^{n-r+1} - \dots - v^n \cdot w^n$

Ο αριθμός r των στοιχείων της βάσης, για τα οποία $Q(e_i) = -1$, λέγεται **δείκτης** (index) της βάσης³.

Άθροιστική σύμβαση (Einstein): Ίσως έχει γίνει αντιληπτή μια μάλλον περίεργη γραφή των δεικτών ως εκθέτες η οποία ίσως και να σας μπερδεύει λίγο. Αυτή έχει βαθιά φυσική σημασία, η οποία αυτή τη στιγμή δεν μας ενδιαφέρει. Όμως είναι χρήσιμο να αναφέρουμε εδώ μια ειδική σύμβαση για τα γινόμενα με ίδιους δείκτες.

Αν σε μια παράσταση εμφανίζεται ο ίδιος δείκτης σε άνω και κάτω θέση, τότε υπονοείται άθροιση σε αυτόν τον δείκτη και το σύμβολο της άθροισης παραλείπεται.

Π.χ. αν $j = 1, 2, 3$ τότε $v^{ij} \cdot w_j = v^{i1} \cdot w_1 + v^{i2} \cdot w_2 + v^{i3} \cdot w_3$. Όμως $v^{ij} \cdot w^j$ δεν σημαίνει τίποτα περισσότερο αφού και οι δύο δείκτες j βρίσκονται στην ίδια θέση (άνω).

³ Κάποιοι συγγραφείς αναφέρουν ως χαρακτηριστικό αριθμό της βάσης τον $n-r$ και κάποιοι γράφουν με αντίστροφη σειρά τα διανύσματα της βάσης. Η ουσία όμως δεν αλλάζει.

1.2. Ο χωρόχρονος Minkowski

Ο χωρόχρονος Minkowski είναι ένας τετραδιάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος \mathcal{M} στον οποίο ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο g με δείκτη 1. Τα στοιχεία του \mathcal{M} καλούνται «γεγονότα» και το g αναφέρεται ως το **κατά Lorentz εσωτερικό γινόμενο** στον \mathcal{M} .

Υπάρχει επομένως μια βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ στον \mathcal{M} με την ιδιότητα, αν $v = v^a e_a$ και $w = w^a e_a$, τότε

$$g(v, w) = v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + v^3 \cdot w^3 - v^4 \cdot w^4$$

Τα στοιχεία του \mathcal{M} είναι «γεγονότα» θεωρώντας τον όρο με την έννοια του «σημειακού» γεγονότος, δηλαδή κάποιου που δεν έχει καμία χωρική έκταση ούτε χρονική διάρκεια. Μας χρειάζεται λοιπόν ένα σύστημα συντεταγμένων που να αποτυπώνει αυτήν ακριβώς την ερμηνεία του «γεγονότος». Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων θέτει στο \mathcal{M} μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ όπως παραπάνω και καθορίζει ένα πλαίσιο αναφοράς. Επομένως, αν $x = x^a e_a$, $a = 1, 2, 3, 4$, (όπου χρησιμοποιούμε την αθροιστική σύμβαση) ορίζουμε τις συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3, x^4) του γεγονότος x , που σχετίζονται με τη βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Από αυτές, οι τρεις πρώτες θεωρούμε ότι αναφέρονται στη χωρική έκταση και η τέταρτη στο χρόνο για το γεγονός x , όπως το παρατηρεί ένας παρατηρητής που εποπτεύει το συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς.

Στα πλαίσια της εξοικονόμησης χώρου, εισάγουμε έναν πίνακα 4x4 που ορίζεται ως εξής:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και του οποίου τα στοιχεία συμβολίζονται με η^{ab} ή η_{ab} ανάλογα με τις ανάγκες της αθροιστικής σύμβασης. Άρα $\eta^{ab} = \eta_{ab} = 1$, όταν $a = b = 1, 2, 3$ και $\eta^{44} = \eta_{44} = -1$. Αν $a \neq b$, τότε $\eta^{ab} = \eta_{ab} = 0$. Επομένως γράφουμε $g(e_a, e_b) = \eta_{ab} = \eta^{ab}$ και με την αθροιστική σύμβαση

$$g(v, w) = \eta_{ab} v^a w^b$$

☞ Το εσωτερικό γινόμενο Lorentz δεν είναι θετικά ορισμένο, επομένως θα υπάρχουν διανύσματα $v \in \mathcal{M}$, με $g(v, v) = 0$. Π.χ. το $v = e_1 + e_4$ είναι ένα τέτοιο διάνυσμα, αφού $g(v, v) = \eta_{ab} v^a v^b = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$. Τέτοια διανύσματα λέγονται

μηδενικά ή φωτοειδή (lightlike) και το \mathcal{M} έχει βάσεις (όχι ορθοκανονικές) που αποτελούνται αποκλειστικά από τέτοιου είδους διανύσματα.

Πρόταση 2: Δύο φωτοειδή διανύσματα v και w (κανένα από τα οποία δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα) είναι ορθογώνια αν και μόνο αν είναι παράλληλα.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $v = v^a e_a$ και $w = w^a e_a$, τα οποία είναι φωτοειδή, δηλαδή,

$$g(v, v) = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 = 0$$

$$\text{και} \quad g(w, w) = (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 - (w^4)^2 = 0$$

και ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή

$$g(v, w) = v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + v^3 \cdot w^3 - v^4 \cdot w^4 = 0$$

Χρησιμοποιώντας την ανισοϊσότητα Schwartz στον \mathfrak{R}^3 , βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (v^4 \cdot w^4)^2 &= (v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + v^3 \cdot w^3)^2 \\ &\leq [(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2] [(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2] \\ &= (v^4)^2 (w^4)^2 \end{aligned}$$

Άρα η σχέση του Schwartz ισχύει ως ισότητα και αυτό συμβαίνει μόνο όταν τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή όταν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$, με $v = \lambda \cdot w$.

☞ ➤ Ας θεωρήσουμε δύο διακριτά γεγονότα x_0 και x για τα οποία το διάνυσμα μετατόπισης $v = x_0 - x$, από το x_0 στο x είναι ένα φωτοειδές, δηλαδή

$$Q(v) = Q(x_0 - x) = 0$$

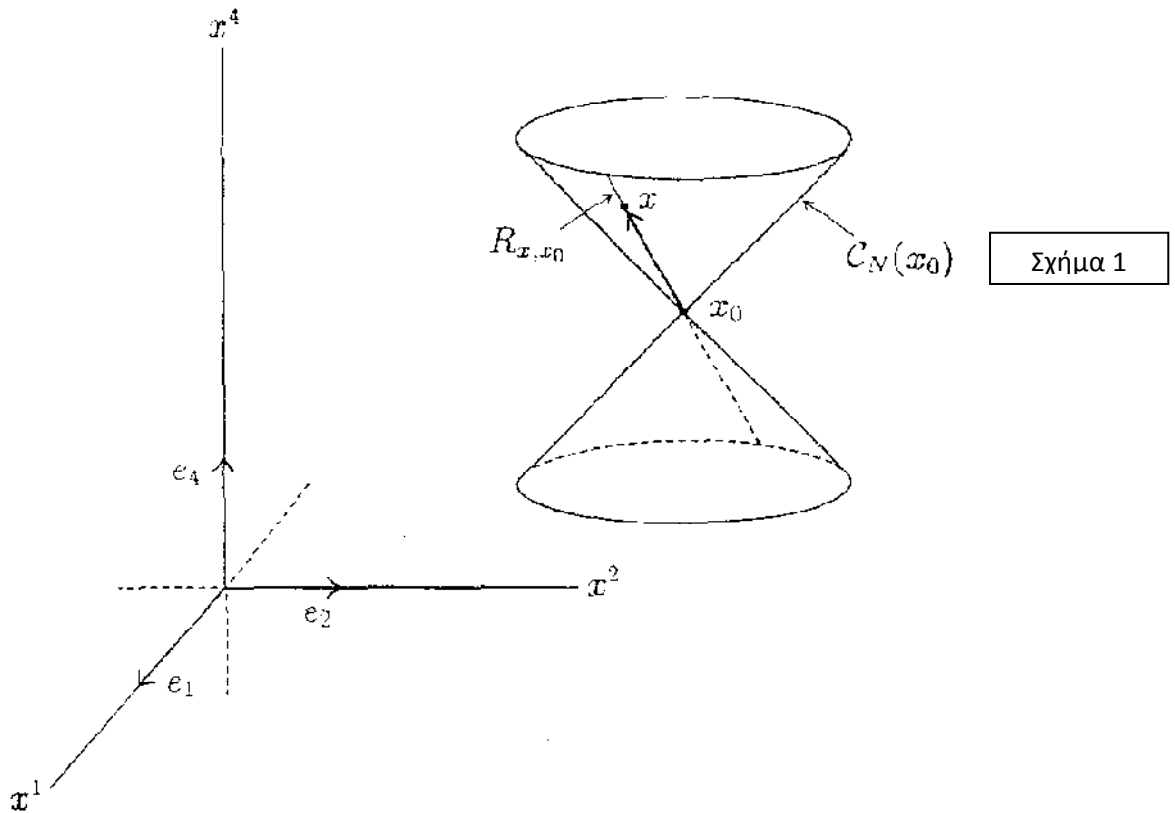
Σε σχέση με μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του \mathcal{M} , αν $x = x^a e_a$ και $x_0 = x_0^a e_a$, τότε

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0 \quad (1.2.1)$$

Όμως αυτή τη σχέση την είδαμε και στην εισαγωγή. Είναι ακριβώς η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται μεταξύ δύο γεγονότων που βρίσκονται πάνω στην κοσμική γραμμή ενός φωτονίου. (Γι αυτό και το διάνυσμα v λέγεται φωτοειδές). Από την ομοιότητα της σχέσης (1) με την εξίσωση ενός ορθού κυκλικού κώνου στον \mathfrak{R}^3 , ορίζουμε τον **κώνο φωτός** $C_N(x_0)$ στο $x_0 \in \mathcal{M}$, ως εξής:

$$C_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}$$

και τον απεικονίζουμε, συμπιέζοντας την τρίτη χωρική συντεταγμένη του x^3 όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Ο $C_N(x_0)$ αποτελείται επομένως από όλα εκείνα τα γεγονότα στον \mathcal{M} που «μπορούν να συνδεθούν με το x_0 με μια ακτίνα φωτός».

Για κάθε τέτοιο γεγονός x ($x \neq x_0$) ορίζουμε την **φωτοειδή κοσμική γραμμή** (ή **ακτίνα φωτός**)

$$R_{x_0, x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathfrak{R}\}$$

Παρατήρηση: Αν $Q(x - x_0) = 0$, τότε $R_{x_0, x} = R_{x, x_0}$.

Πραγματικά, έστω $z \in R_{x_0, x}$, τότε $z = x_0 + t(x - x_0)$, $t \in \mathfrak{R}$ και επομένως

$$\begin{aligned} z &= x_0 + t x - t x_0 \\ &= x - x + x_0 + t x - t x_0 \\ &= x - (t - 1)(x_0 - x) \\ &= x - t'(x_0 - x) \end{aligned}$$

δηλαδή $z \in R_{x, x_0}$. Άρα $R_{x_0, x} \subseteq R_{x, x_0}$.

Όμοια, αλλάζοντας θέσεις στα x_0 και x βρίσκουμε ότι $R_{x_0, x} \supseteq R_{x, x_0}$, δηλαδή $R_{x_0, x} = R_{x, x_0}$.

Θεώρημα 3: Αν x_0 και x είναι δύο διακριτά γεγονότα με $Q(x - x_0) = 0$, τότε

$$R_{x_0, x} = C_N(x_0) \cap C_N(x) \quad (1.2.2)$$

(δηλαδή ο κώνος φωτός του x_0 είναι απλώς η ένωση όλων των ακτίνων φωτός που διέρχονται από το x_0).

Απόδειξη :

Έστω $z = x_0 + t(x - x_0)$, $t \in \mathfrak{R}$ ένα στοιχείο της $R_{x_0, x}$. Τότε

$$z - x_0 = t(x - x_0)$$

και έτσι

$$Q(z - x_0) = t^2 Q(x - x_0) = 0$$

Επομένως $z \in C_N(x_0)$. Επειδή $R_{x_0, x} = R_{x, x_0}$ η $z \in C_N(x)$, άρα $z \in C_N(x_0) \cap C_N(x)$.

Δηλαδή $R_{x_0, x} \subseteq C_N(x_0) \cap C_N(x)$.

Έστω τώρα $z \in C_N(x_0) \cap C_N(x)$. Καθένα από τα διανύσματα $z - x_0$, $z - x$ είναι φωτοειδές. Όμως $z - x_0 = z - x + x - x_0 = (z - x) - (x_0 - x)$, επομένως

$$0 = Q(z - x_0) = Q(z - x) + Q(x_0 - x) - 2g(z - x, x_0 - x) = -2g(z - x, x_0 - x)$$

και άρα $g(z - x, x_0 - x) = 0$.

Αν $z \neq x$, τότε τα φωτοειδή διανύσματα $z - x_0$ και $z - x$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, άρα είναι παράλληλα. Υπάρχει επομένως $t \in \mathfrak{R}$, ώστε $z - x = t(x_0 - x)$ ή ισοδύναμα $z = x + t(x_0 - x)$, δηλαδή $z \in R_{x_0, x}$ και $C_N(x_0) \cap C_N(x) \subseteq R_{x_0, x}$. (Αν $z = x$, προφανώς $z \in R_{x_0, x}$).

Άρα τελικά $R_{x_0, x} = C_N(x_0) \cap C_N(x)$.

☞ Για λόγους που θα εξηγήσουμε αμέσως παρακάτω, ένα διάνυσμα v στον \mathcal{M} λέγεται **χρονοειδές** (timelike) αν $Q(v) < 0$ και **χωροειδές** (spacelike) αν $Q(v) > 0$.

Αν v είναι το διάνυσμα μετατόπισης $x - x_0$ μεταξύ δύο γεγονότων, σε σχέση με οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} , τότε το $Q(x - x_0) < 0$ σημαίνει ότι

$$(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 < (\Delta x^4)^2$$

δηλαδή το $x - x_0$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου φωτός του x_0 . Έτσι, το τετράγωνο του χωρικού διαστήματος μεταξύ των δύο γεγονότων είναι μικρότερο από το τετράγωνο της απόστασης που θα μπορούσε να ταξιδέψει το φως κατά τη χρονική διαφορά των δύο γεγονότων (θυμηθείτε ότι η τέταρτη συνιστώσα μετριέται σε μονάδες μήκους φωτός).

Αν το $x - x_0$ είναι ένα χωροειδές, η ανισότητα αντιστρέφεται, το $x - x_0$ απεικονίζεται στο εξωτερικό του κώνου φωτός του x_0 και το χωρικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων είναι τόσο μεγάλο που ούτε ένα φωτόνιο δεν μπορεί να ταξιδέψει τόσο γρήγορα ώστε να βιώσει και τα δύο γεγονότα.

☞ ➤ Αν $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ και $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ είναι δύο ορθοκανονικές βάσεις στον \mathcal{M} , τότε υπάρχει ένας μοναδικός γραμμικός μετασχηματισμός $\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ τέτοιος, ώστε $\mathcal{L}(e_\alpha) = \hat{e}_\alpha$ για $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Όπως θα δούμε, τέτοιες απεικονίσεις «διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο του \mathcal{M} », δηλαδή είναι του ακόλουθου τύπου:

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ λέγεται **ορθογώνιος μετασχηματισμός** στο \mathcal{M} αν $g(\mathcal{L}x, \mathcal{L}y) = g(x, y)$, για όλα τα $x, y \in \mathcal{M}$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι αν το εσωτερικό γινόμενο στον \mathcal{M} είναι μη εκφυλισμένο, τότε ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι απαραίτητα 1-1 και επομένως είναι ισομορφισμός.

Λήμμα 4: Έστω $\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- α) Ο \mathcal{L} είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.
- β) Ο \mathcal{L} διατηρεί την τετραγωνική μορφή του \mathcal{M} , δηλαδή $Q(\mathcal{L}x) = Q(x)$ για όλα τα $x \in \mathcal{M}$.
- γ) Ο \mathcal{L} μεταφέρει κάθε ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} σε μια άλλη επίσης ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} .

Ας είναι τώρα $\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του \mathcal{M} και $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} . Από το προηγούμενο λήμμα η $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ με $\hat{e}_\alpha = \mathcal{L}(e_\alpha)$, για $\alpha = 1, 2, 3, 4$ είναι επίσης μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} .

Συγκεκριμένα, κάθε e_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$, μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των \hat{e}_α :

$$e_u = \Lambda^1_u \hat{e}_1 + \Lambda^2_u \hat{e}_2 + \Lambda^3_u \hat{e}_3 + \Lambda^4_u \hat{e}_4 = \Lambda^a_u \hat{e}_a, \quad u = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.3)$$

όπου οι Λ^a_u είναι σταθερές.

Η συνθήκη ορθογωνιότητας $g(e_c, e_d) = \eta_{cd}$, $c, d = 1, 2, 3, 4$ μπορεί τώρα να γραφτεί:

$$\Lambda^1_c \Lambda^1_d + \Lambda^2_c \Lambda^2_d + \Lambda^3_c \Lambda^3_d - \Lambda^4_c \Lambda^4_d = \eta_{cd} \quad (1.2.4)$$

ή με την αθροιστική σύμβαση

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta_{ab} = \eta_{cd}, \quad c, d = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.5)$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$\Lambda^a_c \Lambda^b_d \eta^{cd} = \eta^{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.6)$$

Ορίζουμε τον πίνακα $\Lambda = [\Lambda^{\alpha}_{\beta}]_{\alpha,\beta=1,2,3,4}$ του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ και της ορθοκανονικής βάσης $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ως

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & \Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & \Lambda^2_4 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & \Lambda^3_4 \\ \Lambda^4_1 & \Lambda^4_2 & \Lambda^4_3 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι πρακτικά ο Λ είναι ο πίνακας του \mathcal{L}^{-1} ως προς τη βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$.

(Οι συνθήκες (1.2.5) ορίζουν ότι «οι στήλες του Λ είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα», ενώ οι (1.2.6) δηλώνουν το ίδιο για τις γραμμές του Λ).

☞ ➤ Θεωρούμε τον πίνακα Λ του $\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ και της βάσης $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ως τον πίνακα μετασχηματισμού συντεταγμένων με τον συνηθισμένο τρόπο. Συγκεκριμένα, αν το γεγονός x στο \mathcal{M} έχει συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3, x^4) ως προς τη βάση (e_1, e_2, e_3, e_4) , τότε οι συντεταγμένες του ως προς τη βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ με $\hat{e}_\alpha = \mathcal{L}(e_\alpha)$, είναι

$$x = \hat{x}^1 \hat{e}_1 + \hat{x}^2 \hat{e}_2 + \hat{x}^3 \hat{e}_3 + \hat{x}^4 \hat{e}_4$$

όπου $\hat{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \alpha = 1, 2, 3, 4.$ (1.2.7)

☞ ➤ Κάνοντας τις πράξεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι σχέσεις (1.2.5) (άρα και οι (1.2.6)) είναι ισοδύναμες με την ισότητα:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.2.8)$$

(όπου T σημαίνει ανάστροφος).

Παρατηρήστε ότι η (1.2.8) είναι η μία από τις συνθήκες που είδαμε στην εισαγωγή ότι πρέπει να ικανοποιούν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί που συνδέουν τις συντεταγμένες δύο παρατηρητών.

Γίνεται πλέον φανερό ότι ο Λ είναι ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού που διατηρεί την τετραγωνική μορφή του \mathcal{M} .

Συγκεκριμένα, αν $x - x_0$ είναι το διάνυσμα μετατόπισης μεταξύ δύο γεγονότων για το οποίο $Q(x - x_0) = 0$, τότε

$$(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - (\Delta x^4)^2 = 0 \quad \text{και}$$

$$(\Delta \hat{x}^1)^2 + (\Delta \hat{x}^2)^2 + (\Delta \hat{x}^3)^2 - (\Delta \hat{x}^4)^2 = 0$$

όπου $\Delta \hat{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \Delta x^\beta$, από την (7).

Φυσικά οι δύο παρατηρητές που εποπτεύουν τις συντεταγμένες με ή χωρίς καπέλο, συμφωνούν ότι το x_0 και το x «συνδέονται με μια ακτίνα φωτός», δηλαδή συμφωνούν στην ταχύτητα του φωτός.

☞ ➤ Κάθε πίνακας 4x4 που ικανοποιεί την (1.2.8) λέγεται **γενικός (ομογενής) μετασχηματισμός Lorentz**. Κάποιες φορές θα αναφερόμαστε και στον μετασχηματισμό (1.2.7) με το ίδιο όνομα.

Εφ' όσον οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί του \mathcal{M} είναι ισομορφισμοί και γι' αυτό αντιστρέψιμοι, ο πίνακας Λ ενός τέτοιου ορθογώνιου μετασχηματισμού πρέπει να είναι επίσης αντιστρέψιμος. Από την (1.2.8) βρίσκουμε ότι $\Lambda^T \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta$ συνεπάγεται την $\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1}$ άρα $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta$ και επειδή είναι $\eta^{-1} = \eta$ παίρνουμε

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta \quad (1.2.9)$$

Το σύνολο όλων των γενικών (ομογενών) μετασχηματισμών Lorentz σχηματίζει μια ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλαδή είναι κλειστό ως προς τα γινόμενα και τους αντίστροφους πίνακες. Αυτή η ομάδα καλείται η **γενική (ομογενής) ομάδα Lorentz** και θα την συμβολίζουμε με \mathcal{L}_{GH} .

Τα στοιχεία του πίνακα Λ^{-1} , θα τα συμβολίζουμε με Λ_α^β έτσι, ώστε από την (9) να είναι

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^1 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 & \Lambda_4^2 \\ \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 & \Lambda_4^3 \\ \Lambda_1^4 & \Lambda_2^4 & \Lambda_3^4 & \Lambda_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & -\Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & -\Lambda^2_4 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & -\Lambda^3_4 \\ -\Lambda^4_1 & -\Lambda^4_2 & -\Lambda^4_3 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix} \quad (1.2.10)$$

Ισχύουν ακόμα οι σχέσεις:

$$\Lambda_\alpha^\beta = \eta_{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \Lambda^{\gamma}_{\delta} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.11)$$

και

$$\Lambda^\alpha_\beta = \eta^{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} \Lambda^{\delta}_{\gamma} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.12)$$

Επειδή ο $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_{GH}$, όπως και ο Λ , θα πρέπει επιπλέον να ικανοποιεί συνθήκες ανάλογες με τις (5) και (6):

$$\Lambda_\alpha^c \Lambda_\beta^d \eta^{ab} = \eta^{cd} \quad , \quad c, d = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.13)$$

και

$$\Lambda_\alpha^c \Lambda_\beta^d \eta_{cd} = \eta_{\alpha\beta} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.14)$$

και οι ανάλογες σχέσεις των (3) και (7) είναι

$$\hat{e}_\alpha = \Lambda_\alpha^a e_a \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.15)$$

και

$$x^\beta = \Lambda_\alpha^\beta \hat{x}^\alpha \quad , \quad \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (1.2.16)$$

1.3 Η ομάδα Lorentz

Από τις σχέσεις (1.2.5), για $c = d = 4$ παίρνουμε ότι $\Lambda^{\alpha}_4 \Lambda^{\beta}_4 \eta_{\alpha\beta} = -1$, δηλαδή $(\Lambda^1_4)^2 + (\Lambda^2_4)^2 + (\Lambda^3_4)^2 - (\Lambda^4_4)^2 = -1$ ή $(\Lambda^4_4)^2 = 1 + (\Lambda^1_4)^2 + (\Lambda^2_4)^2 + (\Lambda^3_4)^2$. Άρα ειδικότερα βρίσκουμε ότι $(\Lambda^4_4)^2 \geq 1$, συνεπώς

$$\Lambda^4_4 \geq 1 \quad \text{ή} \quad \Lambda^4_4 \leq -1 \quad (1.3.1)$$

Ένα στοιχείο Λ του \mathcal{L}_{GH} λέγεται **ορθόχρονο** (orthochronous) αν $\Lambda^4_4 \geq 1$ και **μη-ορθόχρονο** (unorthochronous) αν $\Lambda^4_4 \leq -1$.

Θεώρημα 5: Έστω v ένα χρονοειδές διάνυσμα και w ένα χρονοειδές ή μη μηδενικό φωτοειδές διάνυσμα. Επίσης $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} με $v = v^{\alpha} e_{\alpha}$ και $w = w^{\alpha} e_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Τότε

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad v^4 w^4 > 0 & \quad \text{οπότε} \quad g(v, w) < 0 \\ \text{ή} \quad v^4 w^4 < 0 & \quad \text{οπότε} \quad g(v, w) > 0 \end{aligned}$$

Απόδειξη:

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$g(v, v) = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 < 0 \quad \text{και} \quad (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 - (w^4)^2 < 0$$

άρα

$$(v^4 w^4)^2 > [(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2][(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2] \geq (v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3)^2$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Schwartz για τον \mathbb{R}^3 .

Έτσι βρίσκουμε ότι $|v^4 w^4| > |v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3|$ και ειδικότερα, $v^4 w^4 \neq 0$ και επιπλέον $g(v, w) \neq 0$.

Ας είναι $v^4 w^4 > 0$, τότε

$$v^4 w^4 = |v^4 w^4| > |v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3| \geq v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3$$

και έτσι

$$v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 - v^4 w^4 < 0 \quad \text{δηλαδή} \quad g(v, w) < 0$$

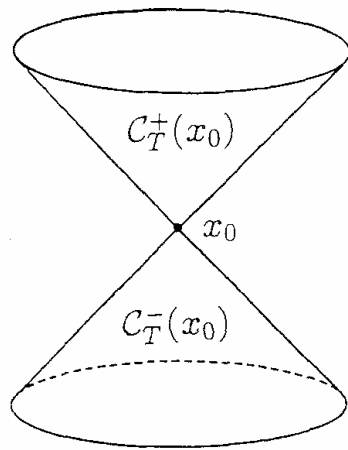
Από την άλλη, αν $v^4 w^4 < 0$, τότε θεωρώντας το $-w$, βρίσκουμε ότι $g(v, -w) < 0$ και λόγω γραμμικότητας $-g(v, w) < 0$ άρα $g(v, w) > 0$.

Πόρισμα 6: Αν ένα μη μηδενικό διάνυσμα στο \mathcal{M} είναι ορθογώνιο σε ένα χρονοειδές διάνυσμα, τότε πρέπει να είναι χωροειδές.

☞ Συμβολίζουμε με τ τη συλλογή όλων των χρονοειδών διανυσμάτων στο \mathcal{M} και ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας \sim στο τ ως εξής:

Αν v και w ανήκουν στην τ , τότε $v \sim w$ αν και μόνο αν $g(v,w) < 0$ (άρα τα v^4 , w^4 έχουν το ίδιο πρόσημο σε κάθε ορθοκανονική βάση από το θεώρημα 5).

Επίσης η τ είναι η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων τ^+ και τ^- με την ιδιότητα δύο χρονοειδή διανύσματα να είναι ισοδύναμα όταν και τα δύο ανήκουν είτε στο τ^+ είτε στο τ^- και να μην είναι ισοδύναμα όταν το ένα ανήκει στο τ^+ και το άλλο στο τ^- . (Ας πούμε αν ήταν τ^+ όλα τα χρονοειδή διανύσματα για τα οποία η τέταρτη συνιστώσα τους είναι θετική και τ^- εκείνα στα οποία είναι αρνητική).



Σχήμα 2

Θεωρούμε τα στοιχεία του τ^+ (του τ^- αντίστοιχα) να έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό. Ειδικότερα, επιλέγουμε (αυθαίρετα) το τ^+ και ονομάζουμε τα στοιχεία του ως **μελλοντικά κατευθυνόμενα** (future directed) χρονοειδή διανύσματα ενώ τα διανύσματα του τ^- τα ονομάζουμε **παρελθοντικά κατευθυνόμενα** (past directed).

Για κάθε x_0 στο \mathcal{M} ορίζουμε τον χρονικό κώνο $C_T(x_0)$, τον **μελλοντικό χρονικό κώνο** $C_T^+(x_0)$ και τον **παρελθοντικό χρονικό κώνο** $C_T^-(x_0)$ ως εξής:

$$C_T(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) < 0\}$$

$$C_T^+(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : x - x_0 \in \tau^+\} = C_T(x_0) \cap \tau^+$$

$$C_T^-(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : x - x_0 \in \tau^-\} = C_T(x_0) \cap \tau^-$$

Μπορούμε να φανταστούμε τον $C_T(x_0)$ ως το εσωτερικό του μηδενικού κώνου $C_N(x_0)$ και αυτός να είναι η ένωση των ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων $C_T^+(x_0)$ και $C_T^-(x_0)$. Επίσης θα ακολουθήσουμε τη σύμβαση ότι οι εικόνες μας θα σχεδιάζονται πάντοτε με μελλοντικά κατευθυνόμενα διανύσματα που δείχνουν προς τα πάνω.

Θα επιθυμούσαμε να επεκτείνουμε την έννοια των παρελθοντικών και μελλοντικών διανυσμάτων και στα (μη μηδενικά) φωτοειδή διανύσματα.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν n είναι ένα φωτοειδές μη μηδενικό διάνυσμα, τότε το $n \cdot v$ έχει το ίδιο πρόσημο για κάθε v στο τ^+ . Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν διανύσματα v και w στο τ^+ με $n \cdot v < 0$ και $n \cdot w > 0$. Θα είναι

$$|n \cdot v| = n \cdot w$$

(αν όχι, αντικαθιστούμε το v με το $\frac{n \cdot w}{|n \cdot v|} v$ το οποίο ανήκει στο τ^+ και ικανοποιεί την $g(n, \frac{n \cdot w}{|n \cdot v|} v) = \frac{n \cdot w}{|n \cdot v|} g(n, v) = -n \cdot w$).

$$\text{Άρα } n \cdot v = -n \cdot w \quad \text{δηλαδή } n \cdot v + n \cdot w = 0 \quad \text{ή } n \cdot (v + w) = 0.$$

Όμως, $v + w \in \tau^+$ και ειδικότερα είναι ένα χρονοειδές και επομένως δεν μπορεί (από το πόρισμα 6) να είναι ορθογώνιο με το μη μηδενικό χρονοειδές n .

Ορίζουμε επομένως, ένα μη μηδενικό φωτοειδές διάνυσμα n να ονομάζεται **μελλοντικά κατευθυνόμενο** αν $n \cdot v < 0$, για όλα τα v στο τ^+ και αν $n \cdot v > 0$, για όλα τα v στο τ^+ , παρελθοντικά κατευθυνόμενο.

Παρατήρηση: Δύο μη μηδενικά φωτοειδή διανύσματα έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό, αν και μόνο αν οι τέταρτες συντεταγμένες τους έχουν το ίδιο πρόσημο σε σχέση με οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} .

Για κάθε x_0 στο \mathcal{M} , ορίζουμε τον **μελλοντικό φωτοειδή κώνο στο x_0** με

$$C_N^+(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο}\}$$

και τον **παρελθοντικό φωτοειδή κώνο στο x_0** με

$$C_N^-(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ είναι παρελθοντικά κατευθυνόμενο}\}$$

Από φυσικής πλευράς, το γεγονός x βρίσκεται στον $C_N^+(x_0)$, αν τα x_0 και x αντίστοιχα μπορούν να θεωρηθούν ως η εκπομπή και η λήψη ενός φωτεινού σήματος. Συνεπώς ο $C_N^+(x_0)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η ιστορία στον χωροχρόνο ενός σφαιρικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος, του οποίου η εκπομπή έγινε από το x_0 .

☞ Η δυσάρεστη φύση των μη-ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz είναι ότι πάντοτε αντιστρέφουν τον χρονικό προσανατολισμό (και με τον τρόπο αυτό σχετίζονται με πλαίσια αναφοράς στα οποία τα ρολόγια κινούνται προς τα πίσω).

Θεώρημα 7: Έστω Λ ένα στοιχείο της \mathcal{L}_{GH} και $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μια ορθοκανονική βάση του \mathcal{M} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) ο Λ είναι ορθόχρονος

β) ο Λ διατηρεί το χρονικό προσανατολισμό όλων των μη μηδενικών φωτοειδών διανυσμάτων

γ) ο Λ διατηρεί το χρονικό προσανατολισμό όλων των χρονοειδών διανυσμάτων.

Εφόσον ένας ορθόχρονος μετασχηματισμός δεν αντιστρέφει ποτέ τον χρονικό προσανατολισμό ενός διανύσματος, μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας σε αυτούς, αγνοώντας τους μη-ορθόχρονους μετασχηματισμούς. Επίσης μπορούμε να περιορίσουμε την ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του \mathcal{M} , ώστε το e_4 να είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο.

(Τώρα ίσως γίνεται φανερό και η δεύτερη ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί ο μετασχηματισμός στο θεώρημα του Zeeman: $\Lambda^4_4 \geq 1$).

☞ Υπάρχει ένας ακόμη περιορισμός που θα θέλαμε να επιβάλλουμε στους μετασχηματισμούς Lorentz. Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε τις ορίζουσες των δύο μελών της (1.2.8) έχουμε:

$$(\det \Lambda^T)(\det \eta)(\det \Lambda) = \det \eta$$

και αφού $\det \Lambda^T = \det \Lambda$, παίρνουμε $(\det \Lambda)^2 = 1$ και επομένως

$$\det \Lambda = 1 \quad \text{ή} \quad \det \Lambda = -1 \quad (1.3.2)$$

Θα λέμε ότι ένας μετασχηματισμός Lorentz είναι **κανονικός** (proper) αν $\det \Lambda = 1$ και **μη κανονικός** (improper) αν $\det \Lambda = -1$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι ένας ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz είναι μη κανονικός, αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda \quad (1.3.3)$$

όπου Λ ένας κανονικός ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας στα αριστερά της (1.3.3) είναι ένας ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz και ως μετασχηματισμός συντεταγμένων επιδρά αλλάζοντας το πρόσημο της πρώτης χωρικής συντεταγμένης (δηλαδή αλλάζοντας τον προσανατολισμό από δεξιόστροφο σε αριστερόστροφο και αντίστροφα). Αφού δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος για τέτοιου είδους αλλαγές, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σύνολο \mathcal{L} των κανονικών ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz. Με τον τρόπο αυτό θα περιορίσουμε περαιτέρω τις ορθοκανονικές βάσεις του \mathcal{M} που μας ενδιαφέρουν επιλέγοντας έναν σταθερό χωρικό προσανατολισμό. Ειδικότερα, θα ορίσουμε μια **αποδεκτή – αδρανειακή (admissible) βάση** για το \mathcal{M} να είναι μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, με το e_4 να είναι χρονοειδές και

μελλοντικά προσανατολισμένο και $\{e_1, e_2, e_3\}$ να είναι χωροειδή και δεξιόστροφα, δηλαδή να ικανοποιούν την $e_1 \times e_2 \cdot e_3 = 1$.

Μπορούμε πλέον να ταυτίσουμε την «αποδεκτή βάση» με ένα «αποδεκτό πλαίσιο αναφοράς», δηλαδή μια «αδρανειακή βάση» με ένα «αδρανειακό σύστημα αναφοράς», όπως αυτό αναφέρθηκε στην εισαγωγή.

Κάθε δύο τέτοιες βάσεις (πλαίσια) συνδέονται με έναν κανονικό, ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz.

Πρόταση 8: Το σύνολο \mathcal{L} των κανονικών, ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz είναι μια υποομάδα της \mathcal{L}_{GH} .

(Οι μη κανονικοί ορθόχρονοι μετασχηματισμοί Lorentz δεν σχηματίζουν υποομάδα, αφού δεν περιέχουν τον ταυτοτικό μετασχηματισμό και αυτός είναι ένας ακόμη λόγος για τον οποίο αξίζει να περιορίσουμε τη μελέτη μας στους κανονικούς μετασχηματισμούς).

Γενικά, θα αναφερόμαστε στην \mathcal{L} ως την **ομάδα Lorentz** και στα στοιχεία της ως μετασχηματισμοί Lorentz συμφωνώντας ότι αυτοί θα είναι όλοι κανονικοί και ορθόχρονοι. Κατά περίπτωση είναι βολικό να επεκτείνουμε την ομάδα των μετασχηματισμών συντεταγμένων ώστε να συμπεριλάβουμε χωροχρονικές μετατοπίσεις και με τον τρόπο αυτό να πάρουμε την ονομαζόμενη **ανομοιογενή ομάδα Lorentz** ή **ομάδα Poincare**.

Από φυσικής άποψης, αυτό επιτρέπει στους αδρανειακούς παρατηρητές να χρησιμοποιούν διαφορετικές χωροχρονικές πηγές (αρχή των συντεταγμένων τους).

☞ Η ομάδα Lorentz \mathcal{L} έχει μια σημαντική υποομάδα \mathcal{R} που αποτελείται από τους μετασχηματισμούς του τύπου

$$R = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ [R^i_j] & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $[R^i_j]_{i,j=1,2,3}$ είναι ένας ορθογώνιος⁴ πίνακας με ορίζουσα ίση με 1. Παρατηρήστε ότι η συνθήκη ορθογωνιότητας (1.2.5) ικανοποιείται από τέτοιου είδους πίνακες και επιπλέον $R^4_4 = 1$ και $\det R = 1$ επομένως $R \in \mathcal{L}$.

⁴Ένας πίνακας A 3×3 λέγεται ορθογώνιος όταν $A^T A = A A^T = I_3$ δηλαδή όταν $A^T = A^{-1}$.

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων που σχετίζεται με τον \mathcal{R} αντιστοιχεί κατά φυσικό τρόπο με μια στροφή των χωρικών αξόνων συντεταγμένων στο δεδομένο σύστημα αναφοράς. Γι αυτό το λόγο η \mathcal{R} καλείται η **υποομάδα στροφών** της \mathcal{L} και τα στοιχεία της καλούνται **στροφές** στην \mathcal{L} .

Λήμμα 9: Έστω Λ ένας κανονικός, ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- α) ο Λ είναι μια στροφή
- β) $\Lambda^1_4 = \Lambda^2_4 = \Lambda^3_4 = 0$
- γ) $\Lambda^4_1 = \Lambda^4_2 = \Lambda^4_3 = 0$
- δ) $\Lambda^4_4 = 1$

Απόδειξη:

Θέτοντας $c = d = 4$ στην (1.2.5) παίρνουμε

$$(\Lambda^1_4)^2 + (\Lambda^2_4)^2 + (\Lambda^3_4)^2 - (\Lambda^4_4)^2 = -1 \quad (1.3.4)$$

και όμοια, θέτοντας στην (1.2.6) $\alpha = \beta = 4$ παίρνουμε

$$(\Lambda^4_1)^2 + (\Lambda^4_2)^2 + (\Lambda^4_3)^2 - (\Lambda^4_4)^2 = -1 \quad (1.3.5)$$

Από την (1.3.4) προκύπτει προφανώς η ισοδυναμία των (β) και (δ) και από την (1.3.5) η ισοδυναμία των (γ) και (δ). Επομένως, αν συμβαίνει ένα από τα (β), (γ) ή (δ) τότε συμβαίνουν και τα άλλα δύο.

Αν ο Λ είναι μια στροφή, τότε προφανώς συμβαίνουν (εξ ορισμού) τα άλλα τρία. Έστω ότι συμβαίνει κάποιο (άρα όλα) από τα (β), (γ), (δ). Θα δείξουμε ότι ο Λ είναι μια στροφή. Καταρχάς ο Λ είναι της μορφής $\Lambda = \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$, όπου ο πίνακας X είναι ένας 3×3 πίνακας και ο $\mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας στήλη 3×1 . Αφού ο Λ είναι κανονικός πρέπει η ορίζουσά του να είναι ίση με 1. Όμως $\det \Lambda = \det X = 1$, άρα ο 3×3 υποπίνακας X έχει μοναδιαία ορίζουσα. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X είναι και ορθογώνιος. Όμως γνωρίζουμε ότι $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta$ και $\Lambda^T = \begin{bmatrix} X^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ (απλά χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ανάστροφου ενός πίνακα). Είναι

$$\eta \Lambda \eta = \begin{bmatrix} I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

άρα $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$.

Πρόταση 10: Η \mathcal{R} είναι υποομάδα της \mathcal{L} .

Απόδειξη: Αν $\Lambda, M \in \mathcal{R}$, τότε ο $X = \Lambda \cdot M \in \mathcal{R}$, αφού $X^4_4 = \Lambda^4_a M^a_4 = \Lambda^4_4 M^4_4 = 1$. Επίσης για τον $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$, ισχύει ότι $\Lambda^4_4 = 1$. Επομένως η \mathcal{R} είναι κλειστή ως προς τον

πολλαπλασιασμό πινάκων και ως προς την αντιστροφή πινάκων, επομένως είναι υποομάδα της \mathcal{L} .

Παρατήρηση: Έστω $\Lambda \in \mathcal{L}$ και $R \in \mathcal{R}$. Τότε

- ο πίνακας $R\Lambda$ έχει την ίδια τέταρτη γραμμή με τον Λ , και
- ο πίνακας ΛR έχει την ίδια τέταρτη στήλη με τον Λ

Πράγματι

$$\begin{bmatrix} R_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^i_j & \Sigma \\ \Gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 \Lambda^i_j & R_3 \Sigma \\ \Gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} \Lambda^i_j & \Sigma \\ \Gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^i_j R_3 & \Sigma \\ \Gamma R_3 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου Σ 3x1 πίνακας στήλη και Γ 1x3 πίνακας γραμμή όπως προκύπτουν από τον Λ .

☞ Σε κάθε μετασχηματισμό Lorentz υπάρχουν 16 άγνωστες ποσότητες (όσα και τα στοιχεία του πίνακα Λ) αν και δεν είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποιες απλές φυσικές ερμηνείες για κάποιες από αυτές τις παραμέτρους.

Ας θεωρήσουμε δύο αδρανειακές βάσεις $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ και $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ και τα αντίστοιχα αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S' . Κάθε δύο γεγονότα στην κοσμική γραμμή ενός σημείου που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένει ακίνητο στο S' έχουν συντεταγμένες στο S' που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Delta x'^1 = \Delta x'^2 = \Delta x'^3 = 0$$

ενώ η $\Delta x'^4$ δίνει τη χρονική διαφορά των δύο γεγονότων όπως αυτή μετρείται στο S' .

Από την (1.2.16) βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχες συντεταγμένες στο S είναι

$$\Delta x^\beta = \Lambda_\alpha^\beta \Delta x'^\alpha = \Lambda_4^\beta \Delta x'^4 \quad (1.3.6)$$

Από την τελευταία και το γεγονός ότι τα Λ^4_4 και Λ_4^4 δεν είναι ίσα με μηδέν προκύπτει ότι οι λόγοι

$$\frac{\Delta x^i}{\Delta x^4} = \frac{\Lambda_4^i}{\Lambda_4^4} = -\frac{\Lambda^4_i}{\Lambda^4_4} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

είναι σταθεροί και ανεξάρτητοι από το συγκεκριμένο σημείο του S' που επιλέξαμε να θεωρήσουμε ως ακίνητο.

Από φυσικής πλευράς, αυτοί οι λόγοι ερμηνεύονται ως οι συνιστώσες της συνήθους 3-διάστατης σχετικής ταχύτητας του S' ως προς το S .

$$\vec{u} = u^i e_i \quad \text{όπου} \quad u^i = \frac{\Lambda_4^i}{\Lambda_4^4} = -\frac{\Lambda^4_i}{\Lambda^4_4} \quad \text{για} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.7)$$

Όμοια, η ταχύτητα του S ως προς το S' είναι

$$\vec{u}' = u'^i e'_i \quad \text{όπου } u'^i = \frac{\Lambda^i_4}{\Lambda^4_4} = -\frac{\Lambda_i^4}{\Lambda^4_4} \quad \text{για } i = 1, 2, 3 \quad (1.3.8)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta x^i}{\Delta x^4} \right)^2 = (\Lambda^4_4)^{-2} \cdot \sum_{i=1}^3 (\Lambda^4_i)^2 = (\Lambda^4_4)^{-2} [(\Lambda^4_4)^2 - 1] = 1 - (\Lambda^4_4)^{-2}$$

και όμοια

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta x'^i}{\Delta x'^4} \right)^2 = (\Lambda^4_4)^{-2} [(\Lambda^4_4)^2 - 1] = 1 - (\Lambda^4_4)^{-2}$$

Ερμηνεύουμε αυτές τις ισότητες ως επιβεβαίωση του γεγονότος ότι η ταχύτητα του S' ως προς το S και του S ως προς το S' έχουν το ίδιο σταθερό μέγεθος, το οποίο θα συμβολίζουμε με β . Έτσι $\beta^2 = 1 - (\Lambda^4_4)^{-2}$ και ειδικότερα $0 \leq \beta < 1$, όπου $\beta = 0$ αν και μόνο αν ο Λ είναι μια στροφή. (Σε αυτή την περίπτωση το σημείο θα παραμένει ακίνητο και στα δύο συστήματα αναφοράς)

Λύνοντας ως προς Λ^4_4 και παίρνοντας τη θετική τετραγωνική ρίζα (αφού ο Λ είναι ορθόχρονος), παίρνουμε

$$\Lambda^4_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (= \Lambda_4^4) \quad (1.3.9)$$

Η ποσότητα αυτή εμφανίζεται συχνά και συνήθως συμβολίζεται με γ .

Θεωρώντας ότι ο Λ δεν είναι μια στροφή, μπορούμε να γράψουμε την \vec{u} ως εξής:

$$\vec{u} = \beta \vec{d} = \beta (d^1 e_1 + d^2 e_2 + d^3 e_3), \quad \text{όπου } d^i = \frac{u^i}{\beta} \quad (1.3.10)$$

όπου \vec{d} είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης του S' σε σχέση με το S και τα d^i είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος Σ κατά την οποία ο παρατηρητής στο S βλέπει το Σ' να κινείται.

Παρόμοια

$$\vec{u}' = \beta \vec{d}' = \beta (d'^1 e'_1 + d'^2 e'_2 + d'^3 e'_3), \quad \text{όπου } d'^i = \frac{u'^i}{\beta} \quad (1.3.11)$$

Τα d^i είναι οι συνιστώσες της κανονικοποιημένης προβολής του e'_4 πάνω στον υπόχωρο που παράγουν τα $\{e_1, e_2, e_3\}$ δηλαδή

$$d^i = \left(\sum_{j=1}^3 (e'_4 \cdot e_j)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (e'_4 \cdot e_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.12)$$

και όμοια

$$d'^i = \left(\sum_{j=1}^3 (e_4 \cdot e'_j)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (e_4 \cdot e'_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.13)$$

Επομένως, προκύπτει ότι $e'_4 = \gamma (\beta \vec{d} + e_4)$ και $e_4 = \gamma (\beta \vec{d}' + e'_4)$ και από αυτές ότι $e'_4 \cdot e_4 = e_4 \cdot e'_4 = -\gamma$.

Συγκρίνοντας την (1.3.7) και την (1.3.10) και χρησιμοποιώντας την (1.3.9) παίρνουμε ότι:

$$\Lambda_4^i = -\Lambda_i^4 = \beta \gamma d^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.14)$$

και όμοια $\Lambda_4^i = -\Lambda_i^4 = \beta \gamma d'^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.15)$

Οι εξισώσεις 1.3.9, 1.3.14 και 1.3.15 μας δίνουν την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη του Λ . Πράγματι, από την (1.2.7) παίρνουμε ότι

$$\Delta x'^4 = -\beta \gamma (d^1 \Delta x^1 + d^2 \Delta x^2 + d^3 \Delta x^3) + \gamma \Delta x^4 \quad (1.3.16)$$

για οποιαδήποτε δύο γεγονότα.

Αν θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση δύο γεγονότων στην κοσμική γραμμή ενός ακίνητου σημείου στην S , τότε $\Delta x^1 = \Delta x^2 = \Delta x^3 = 0$, άρα η (1.3.16) γίνεται

$$\Delta x'^4 = \gamma \Delta x^4 \quad (1.3.17)$$

Ειδικότερα, $\Delta x'^4 = \Delta x^4$ αν και μόνο αν ο Λ είναι μια στροφή.

Επομένως, κάθε σχετική κίνηση των S και S' οδηγεί σε μια **διαστολή του χρόνου** σύμφωνα με την οποία $\Delta x'^4 > \Delta x^4$ και εφόσον τα δύο γεγονότα μπορούν να ερμηνευθούν ως δύο αναγνώσεις του ακίνητου ρολογιού στο S , ένας παρατηρητής στο S' θα συμπεράνει ότι τα ρολόγια στο S θα προχωρούν πιο αργά, παρόλο που εξ υποθέσεως τα ρολόγια είναι πανομοιότυπα.

Όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου είναι συμμετρικό, δηλαδή, αν θεωρήσουμε δύο γεγονότα με $\Delta x'^1 = \Delta x'^2 = \Delta x'^3 = 0$, τότε ισχύει ότι $\Delta x^4 = \gamma \Delta x'^4$.

Θα επιστρέψουμε στο φαινόμενο αυτό αργότερα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, όταν θα έχουμε εισάγει μια γεωμετρική δομή για να μπορούμε να το αναπαραστήσουμε. Όμως πρέπει να διαβεβαιώσουμε ότι δεν υπάρχει καμία απάτη ή ψευδαίσθηση. Είναι αρκετά αληθινό φαινόμενο και εμφανίζεται από μόνο του σε παρατηρήσιμα φαινόμενα. Κάτι τέτοιο εμφανίζεται στη μελέτη των κοσμικών ακτίνων («βροχή» από διάφορων τύπων στοιχειώδη σωματΙΑ από το διάστημα που συγκρούονται με τη Γη). Συγκεκριμένοι τύποι μεσονίων που βρίσκονται στην

κοσμική ακτινοβολία, έχουν τόσο μικρή διάρκεια ζωής όταν δημιουργούνται στο εργαστήριο (δηλαδή όταν είναι ακίνητα) που ακόμα και αν μπορούσαν να ταξιδέψουν με την ταχύτητα του φωτός (που δεν μπορούν), ο χρόνος που θα χρειάζονταν για να διασχίσουν την ατμόσφαιρα της Γης θα ήταν σχεδόν δεκαπλάσιος από το συνήθη χρόνο ζωής τους. Όμως τη διασχίζουν! Η διαστολή του χρόνου, κατά μία έννοια, τα «κρατάει νέα». Το νόημα του χρόνου για ένα μεσόνιο δεν είναι το ίδιο με το δικό μας. Αυτό που για ένα σωματίο μοιάζει με μια φυσιολογική διάρκεια ζωής, για μας φαντάζει πολύ περισσότερο. Πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας επίσης ότι είμαστε αρκετά ασαφείς σχετικά με το τι σημαίνει ο όρος «ρολόι». Πρακτικά, κάθε φαινόμενο που εμπλέκει παρατηρήσιμες αλλαγές (το κοίταγμα ενός ρολογιού χειρός, οι ταλαντώσεις ενός ατόμου, η ζωή ενός μεσονίου ή ενός ανθρώπου) είναι ένα «ρολόι» και επομένως είναι ευάλωτο στην επίδραση του φαινομένου της διαστολής του χρόνου. Βέβαια η επίδραση θα είναι ασήμαντα μικρή, εκτός αν το β πλησιάσει αρκετά το 1 (την ταχύτητα του φωτός). Από την άλλη μεριά, καθώς το β τείνει να γίνει 1, η (1.3.17) δείχνει ότι $\Delta x'^4 \rightarrow \infty$, δηλαδή καθώς η ταχύτητα προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός η επίδραση γίνεται άπειρα μεγάλη.

Άλλη μια ειδική περίπτωση της (1.3.16) έχει ενδιαφέρον. Ας υποθέσουμε ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα στο S , δηλαδή $\Delta x^4 = 0$. Τότε

$$\Delta x'^4 = -\beta\gamma (d^1 \Delta x^1 + d^2 \Delta x^2 + d^3 \Delta x^3) \quad (1.3.18)$$

Θεωρώντας επιπλέον ότι $\beta \neq 0$, βρίσκουμε ότι γενικά το $\Delta x'^4$ δεν είναι μηδέν, δηλαδή τα δύο γεγονότα δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα για τον παρατηρητή στο S' ! Πράγματι, θα είναι ταυτόχρονα τα δύο γεγονότα και στο S' μόνο αν ισχύει για τις χωρικές συντεταγμένες τους στο S ότι:

$$d^1 \Delta x^1 + d^2 \Delta x^2 + d^3 \Delta x^3 = 0 \quad (1.3.19)$$

(δηλαδή είτε το διάνυσμα μετατόπισης μεταξύ των δύο τοποθεσιών είναι μηδενικό είτε είναι κάθετο στην κίνηση του S' μέσα στο S).

Σε άλλη περίπτωση τα δύο γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα στο S' και έτσι εμφανίζεται αυτό που ονομάζεται **σχετικότητα του ταυτόχρονου**.

Προφανώς, αυτή η ασυμφωνία συμβαίνει μόνο για ταυτόχρονα γεγονότα σε διαφορετικά χωρικά σημεία. Αν δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα στο ίδιο χωρικό σημείο, τότε το διάνυσμα μετατόπισης είναι μηδενικό και επομένως δεν παρατηρείται καμία διαφορά στα δύο συστήματα.

Θα ήταν χρήσιμο σε αυτό το σημείο, να απομονώσουμε μια συγκεκριμένη υποομάδα της ομάδας Lorentz \mathcal{L} , η οποία περιέχει όλες τις ενδιαφέρουσες από φυσικής άποψης πληροφορίες για τους μετασχηματισμούς Lorentz, αλλά έχοντας βάλει στην άκρη αρκετές ασήμαντες λεπτομέρειες. Θα το κάνουμε αυτό με τον προφανή τρόπο να θεωρήσουμε ότι οι χωρικοί άξονες του S και του S' έχουν έναν απλό συγκεκριμένο σχετικό προσανατολισμό. Ειδικότερα, θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου τα κατευθυνόμενα συνημίτονα δίνονται από τις τιμές $d^1 = 1, d'^1 = -1$, ενώ $d^2 = d'^2 = d^3 = d'^3 = 0$. Έτσι, τα διανύσματα κατεύθυνσης είναι τα e_1 και e'_1 . Φυσικά αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής στο S βλέπει το S' να κινείται στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα της πρώτης συντεταγμένης και ο παρατηρητής στο S' βλέπει το σύστημα S να κινείται κατά μήκος του αρνητικού ημιάξονα της πρώτης συντεταγμένης του. Αφού οι πηγές των χωρικών συντεταγμένων των δύο συστημάτων ταυτίζονται όταν $x^4 = x'^4 = 0$, απεικονίζουμε την κίνηση των δύο αυτών συστημάτων σαν να γίνονται κατά μήκος των κοινών τους πρώτων αξόνων. Τώρα, από τις (1.3.9), (1.3.14) και (1.3.15) βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού Λ πρέπει να έχει τη μορφή

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & -\beta\gamma \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & 0 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Μάλιστα από τις συνθήκες ορθογωνιότητας (1.2.5) και (1.2.6) βρίσκουμε ότι ο Λ πρέπει τελικά να πάρει τη μορφή

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & 0 \\ 0 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (1.3.20)$$

όπου ο υποπίνακας $[\Lambda^i_j]_{i,j=2,3}$ είναι ένας 2×2 πίνακας ορθογώνιος και με ορίζουσα ίση με 1, δηλαδή είναι ένας πίνακας στροφής στο επίπεδο \mathfrak{R}^2 .

Για να ανακαλύψουμε τις διαφορές μεταξύ αυτών των στοιχείων του \mathcal{L} , θα θεωρήσουμε την απλούστερη δυνατή επιλογή για τον 2×2 υποπίνακα, δηλαδή τον ταυτοτικό. Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Lorentz είναι ο

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (1.3.21)$$

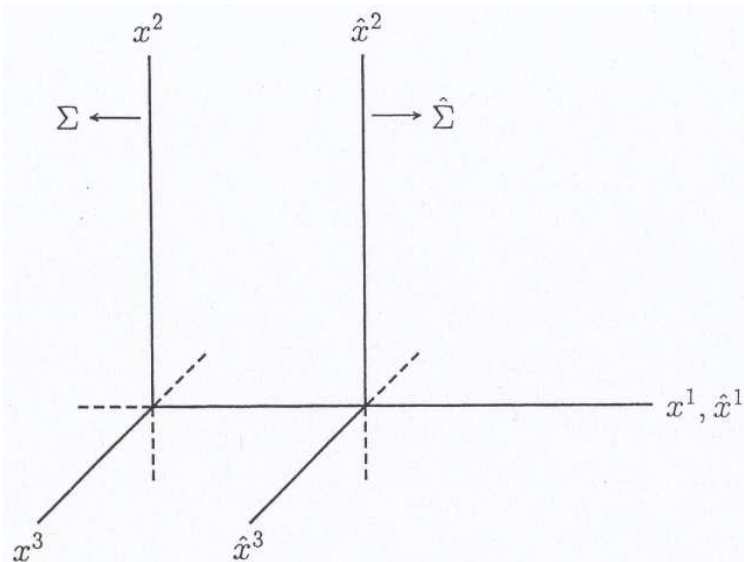
και οι αντίστοιχες σχέσεις για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned}
x'^1 &= \gamma x^1 - \beta\gamma x^4 \\
x'^2 &= x^2 \\
x'^3 &= x^3 \\
x'^4 &= -\beta\gamma x^1 + \gamma x^4
\end{aligned}
\tag{1.3.22}$$

Από τις σχέσεις αυτές φαίνεται ξεκάθαρα ποια είναι η φυσική σχέση μεταξύ των δύο συστημάτων. Οι x^1 - και x'^1 - άξονες είναι παράλληλοι μεταξύ τους και το S' κινείται ως προς το S κατά τη διεύθυνση αυτών των αξόνων (όπως φαίνεται στο σχήμα 3).

Πλαίσια αναφοράς με χωρικούς άξονες που σχετίζονται όπως φαίνεται στο σχήμα λέμε ότι βρίσκονται σε **τυποποιημένο σχηματισμό** (standard configuration).

Τώρα γίνεται φανερό ότι κάθε μετασχηματισμός Lorentz του τύπου (1.3.20) αντιστοιχεί σε μια φυσική κατάσταση όπου οι άξονες x'^2 και x'^3 του S' είναι



Σχήμα 3

στραμμένοι στο επίπεδο που αυτοί ορίζουν από τη θέση στην οποία βρίσκονται στο σχήμα 3.

Από την (1.2.10) ο αντίστροφος κάθε μετασχηματισμού Lorentz, που ορίζεται από την (1.3.21) είναι

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}
\tag{1.3.23}$$

και οι σχέσεις για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned}
x^1 &= \gamma x'^1 + \beta\gamma x'^4 \\
x^2 &= x'^2 \\
x^3 &= x'^3 \\
x^4 &= \beta\gamma x'^1 + \gamma x'^4
\end{aligned}
\tag{1.3.24}$$

Κάθε μετασχηματισμός Lorentz αυτού του τύπου ονομάζεται **ειδικός** (special) **μετασχηματισμός Lorentz**. Αφού οι Λ και Λ^{-1} διαφέρουν μόνο κατά το πρόσημο των στοιχείων στις θέσεις (1,4) και (4,1) είναι σύννητες, όταν μελετάμε τους ειδικούς μετασχηματισμούς Lorentz, να θεωρούμε ότι $-1 < \beta < 1$. Επιλέγοντας $\beta > 0$, όταν $\Lambda^1_4 < 0$ και $\beta < 0$ όταν $\Lambda^1_4 > 0$, όλοι οι ειδικοί μετασχηματισμοί μπορούν να γραφούν στη μορφή (1.3.21) και σκοπεύουμε να ακολουθήσουμε αυτή τη σύμβαση.

Για κάθε πραγματικό αριθμό β με $-1 < \beta < 1$, ορίζουμε το $\gamma = \gamma(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ και

$$\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\Lambda(\beta)$ ονομάζεται **πίνακας προώθησης** (boost) κατά την x^1 -διεύθυνση.

Οι μετασχηματισμοί προώθησης μπορεί να είναι ως προς κάποιον άλλο χωρικό άξονα. Έτσι προκύπτουν οι πίνακες:

$$\Lambda_2(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

της προώθησης κατά τον x^2 - άξονα και κατά τον x^3 - άξονα αντίστοιχα.

Για τον $\Lambda(\beta)$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- 1) $\Lambda(0) = I_4$ (ο ταυτοτικός 4x4 πίνακας)
- 2) $\Lambda(\beta) \Lambda(-\beta) = I_4$, άρα $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$
- 3) $\Lambda(\beta_1) \Lambda(\beta_2) = \Lambda\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}\right)$

Η τελευταία ιδιότητα έχει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία: Αν θεωρήσουμε τρία συστήματα αναφοράς S , S' και S'' και η ταχύτητα του S' ως προς το S είναι β_1 , ενώ η ταχύτητα του S'' ως προς το S' είναι β_2 , τότε η ταχύτητα του S'' ως προς το S δεν είναι η $\beta_1 + \beta_2$ όπως κάποιος λανθασμένα θα περίμενε, αλλά η $\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$. (Εννοείται ότι οι δύο προωθήσεις πρέπει να γίνονται κατά την ίδια διεύθυνση).

Επειδή οι ταχύτητες δεν έχουν την προσθετική ιδιότητα είναι συχνά προτιμότερο να μετράμε τις ταχύτητες με μια άλλη παράμετρο ταχύτητας θ (rapidity) που να είναι προσθετική. Κάτι ανάλογο συναντάμε και στην επίπεδη Γεωμετρία, όταν προσπαθούμε να περιγράψουμε τον σχετικό προσανατολισμό δύο Καρτεσιανών

συστημάτων αναφοράς χρησιμοποιώντας γωνίες (που λειτουργούν προσθετικά) ή κλίσεις (που δεν είναι προσθετικές). Από τη σχέση που ζητάμε να ισχύει

$$f(\theta_1 + \theta_2) = \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{1 + f(\theta_1)f(\theta_2)}$$

η ιδανικότερη περίπτωση είναι η υπερβολική εφαπτομένη

$$\beta = \tanh\theta \quad \text{ή} \quad \theta = \tanh^{-1}\beta$$

Η υπερβολική μορφή του ειδικού μετασχηματισμού Lorentz $\Lambda(\beta)$ είναι η

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

Νωρίτερα προτείναμε ότι όλες οι φυσικώς ενδιαφέρουσες συμπεριφορές των κανονικών, ορθόχρονων μετασχηματισμών Lorentz εκφράζονται με τους ειδικούς μετασχηματισμούς. Πράγματι, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, κάθε στοιχείο του \mathcal{L} διαφέρει από κάποιο $L(\theta)$ μόνο το πολύ δύο στροφές.

Θεώρημα 11: Έστω Λ ένας κανονικός ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz. Τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός θ και δύο στροφές $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ ώστε

$$\Lambda = R_1 L(\theta) R_2$$

Η φυσική σημασία του θεωρήματος αυτού είναι περίπου η εξής: Ο μετασχηματισμός Lorentz από το S στο S' μπορεί να πραγματοποιηθεί

1) στρέφοντας τους άξονες του S έτσι, ώστε ο x^1 - άξονας να ταυτιστεί με τη γραμμή κατά μήκος της οποίας λαμβάνει χώρα η σχετική κίνηση του S' ως προς το S (ο θετικός ημιάξονας θα ταυτίζεται με την κατεύθυνση της κίνησης του S' ως προς το S),

2) προωθώντας (“boosting”) το σύστημα σε ένα άλλο πλαίσιο αναφοράς, του οποίου οι χωρικοί άξονες είναι παράλληλοι προς τους στραμμένους άξονες του S και σε ηρεμία σε σχέση με το S' .

3) στρέφοντας μια ακόμη φορά αυτούς τους χωρικούς άξονες μέχρι να ταυτιστούν με αυτούς του S' .

Σε αρκετές στοιχειώδεις καταστάσεις, το κομμάτι των περιστροφών είναι ασήμαντο και αρκεί να επικεντρώσει κανείς την προσοχή του στους ειδικούς μετασχηματισμούς Lorentz.

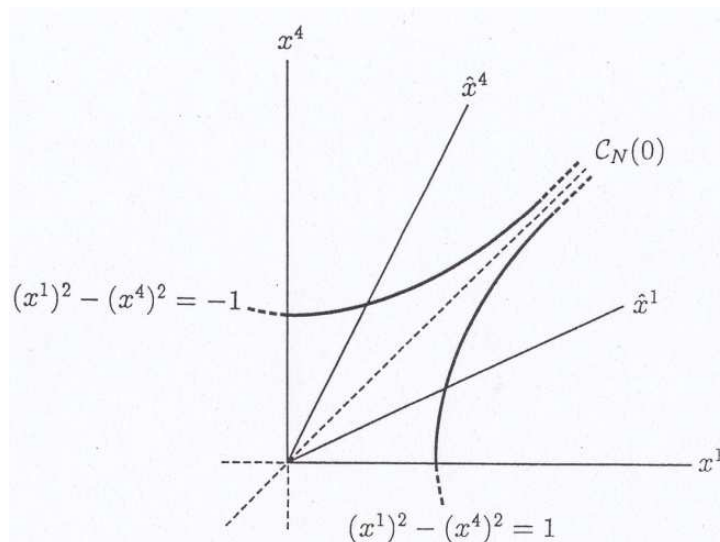
☞ Οι ειδικοί μετασχηματισμοί Lorentz (1.3.22) και (1.3.24) αντιστοιχούν σε μια φυσική κατάσταση κατά την οποία δύο από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες είναι

ίδιες και στα δύο συστήματα αναφοράς. Συμπιέζοντας αυτές τις δύο συντεταγμένες είναι δυνατόν να πάρουμε μια απλή και εκπληκτικά χρήσιμη δισδιάστατη γεωμετρική αναπαράσταση του \mathcal{M} και της επίδρασης ενός μετασχηματισμού Lorentz.

Θα ξεκινήσουμε σχεδιάζοντας δύο κάθετους άξονες στο επίπεδο που θα τους ονομάσουμε « x^1 » και « x^4 ». Πρέπει όμως να προσέξουμε ότι αυτή η καθετότητα δεν έχει καμιά φυσική σημασία. Είναι θέμα σύμβασης και δεν έχει καμία σχέση με την καθετότητα στο \mathcal{M} . Κάθε γεγονός έχει τότε συντεταγμένες σε σχέση με τα e_1 και e_4 , που μπορεί να αναπαραστήσει κανείς φέροντας τις παράλληλες στον αντίθετο άξονα (όπως στον κανόνα του παραλληλογράμμου).

Ο \hat{x}^4 - άξονας θα ταυτίζεται με το σύνολο όλων των γεγονότων με $\hat{x}^1 = 0$, δηλαδή με $x^1 = \beta x^4$ και όμοια ο \hat{x}^1 - άξονας θα είναι το σύνολο των σημείων όπου $\hat{x}^4 = 0$, δηλαδή με $x^4 = \beta x^1$.

Στο σχήμα 4 έχουμε σχεδιάσει αυτούς τους άξονες στο ίδιο σχήμα μαζί με έναν κλάδο καθεμιά από τις υπερβολές $(x^1)^2 - (x^4)^2 = 1$ και $(x^1)^2 - (x^4)^2 = -1$. Αφού οι μετασχηματισμοί (1.3.22) αφήνουν αμετάβλητη την τετραγωνική μορφή στο \mathcal{M} και αφού $\hat{x}^2 = x^2$ και $\hat{x}^3 = x^3$, έπεται ότι οι υπερβολές $(x^1)^2 - (x^4)^2 = 1$, $(x^1)^2 - (x^4)^2 = -1$ και οι $(\hat{x}^1)^2 - (\hat{x}^4)^2 = 1$, $(\hat{x}^1)^2 - (\hat{x}^4)^2 = -1$ αντίστοιχα ταυτίζονται. Από αυτό είναι φανερό ότι απεικονίζοντας τους άξονες \hat{x}^1 και \hat{x}^4 μαζί με τους άλλους δύο έχουμε παραμορφώσει κάπως την εικόνα τους. Το σημείο τομής της υπερβολής $(x^1)^2 - (x^4)^2 = 1$ με τον \hat{x}^1 - άξονα πρέπει να έχει συντεταγμένες στο \hat{S} (1, 0). Αυτό

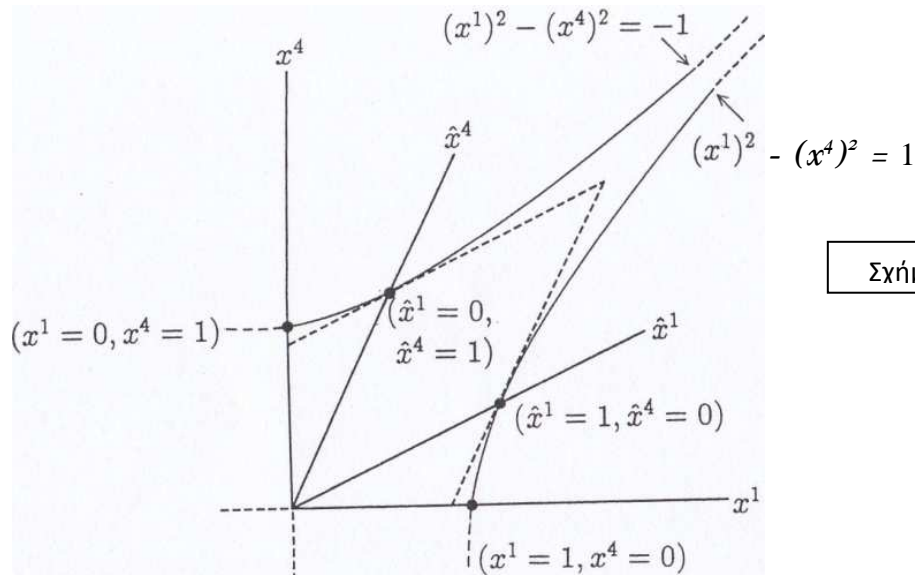


Σχήμα 4

καθιστά αναγκαία μια αλλαγή κλίμακας σε αυτούς τους άξονες. Για να καθορίσουμε ακριβώς πως πρέπει να γίνει αυτή η αλλαγή στον \hat{x}^1 - άξονα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η μονάδα μήκους πρέπει να αναπαριστά την Ευκλείδεια

απόσταση στην εικόνα της πηγής από το σημείο $(\hat{x}^1, \hat{x}^4) = (1, 0)$. Αυτό το σημείο έχει συντεταγμένες στο S , $(x^1, x^4) = (\gamma, \beta\gamma)$ (από την 1.3.24) και η Ευκλείδεια απόσταση από αυτό το σημείο μέχρι την αρχή είναι $\gamma(1 + \beta^2)^{1/2}$. Με παρόμοια επιχειρήματα δείχνουμε ότι και ο \hat{x}^4 - άξονας πρέπει να αριθμηθεί χρησιμοποιώντας το Ευκλείδειο μήκος $\gamma(1 + \beta^2)^{1/2}$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι υπερβολές $(x^1)^2 - (x^4)^2 = \pm k^2$, ($k > 0$), τέμνουν τους \hat{x}^1 - , \hat{x}^4 - άξονες σε απόσταση $k\gamma(1 + \beta^2)^{1/2}$, από την αρχή. Με τον τρόπο αυτό καθορίζουμε τη μονάδα στους άξονες όπως φαίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5

Αυτή η προσαρμογή των αξόνων μας επιτρέπει να καθορίζουμε γεωμετρικά τη θέση κάθε γεγονότος στο \hat{S} απλώς φέροντας παράλληλες προς τον αντίθετο άξονα, όπως και στο S . Έτσι, οι διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 5, που είναι παράλληλες προς τους \hat{x}^1 - και \hat{x}^4 - άξονες και διέρχονται από τα σημεία $(\hat{x}^1, \hat{x}^4) = (0, 1)$ και $(\hat{x}^1, \hat{x}^4) = (1, 0)$ είναι οι ευθείες $\hat{x}^4 = 1$ και $\hat{x}^1 = 1$ αντίστοιχα. Μάλιστα, κάθε ευθεία $\hat{x}^4 = k$ τέμνει την υπερβολή $(x^1)^2 - (x^4)^2 = -k^2$ μόνο στο σημείο $(\hat{x}^1, \hat{x}^4) = (0, k)$, όπου και είναι η εφαπτομένη της. Όμοια και οι $\hat{x}^1 = k$ εφαπτεται στην υπερβολή $(x^1)^2 - (x^4)^2 = k^2$ στο σημείο $(\hat{x}^1, \hat{x}^4) = (k, 0)$, και αυτό είναι το μοναδικό κοινό σημείο τους.

Τα διαγράμματα αυτά, που ονομάζονται **διαγράμματα Minkowski**, είναι πολύ χρήσιμα στη μελέτη κινήσεων στην ειδική σχετικότητα. Στο δεύτερο μέρος θα δούμε μερικά πολύ ενδιαφέροντα παραδείγματα.

1.4 Χρονοειδή διανύσματα και καμπύλες

Ας μελετήσουμε τώρα κάπως πιο διεξοδικά ένα ζευγάρι γεγονότων x_0 και x για τα οποία το $x - x_0$ είναι χρονοειδές, δηλαδή $Q(x - x_0) < 0$. Σε σχέση με μια αδρανειακή βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ έχουμε ότι:

$$(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 < (\Delta x^4)^2$$

και επομένως ξεκάθαρα είναι $\Delta x^4 \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Delta x^4 > 0$ δηλαδή ότι το $x - x_0$ είναι μελλοντοκατευθυνόμενο. Έτσι παίρνουμε το πηλίκο

$$\frac{[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2}}{\Delta x^4} < 1$$

Από φυσικής άποψης, εκείνο που λέμε είναι ότι αν κάποιος επρόκειτο να ταξιδέψει με ταχύτητα $\frac{[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2}}{\Delta x^4}$ ως προς το S (που αντιστοιχεί στη βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$) κατά μήκος της γραμμής Σ από το (x_0^1, x_0^2, x_0^3) στο (x^1, x^2, x^3) και αν αυτός ο κάποιος ήταν παρών στο x_0 , τότε θα μπορούσε να βιώσει και το γεγονός x (θα «προλάβαινε» να είναι παρών και στα δύο γεγονότα). Υπάρχει δηλαδή ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς \hat{S} , στο οποίο τα x_0 και x συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο, το ένα μετά το άλλο. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι αν κάποιος επιλέξει $\beta = \frac{[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2}}{\Delta x^4}$ και τα d^1, d^2, d^3 είναι τα συνημίτονα διεύθυνσης στο Σ του ευθύγραμμου τμήματος από το (x_0^1, x_0^2, x_0^3) στο (x^1, x^2, x^3) , τότε η βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ του \mathcal{M} που προκύπτει από την $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μέσω ενός οποιουδήποτε μετασχηματισμού Lorentz του οποίου η τέταρτη γραμμή είναι

$$\Lambda^4_i = -\frac{\beta\gamma}{d^i}, \text{ για } i=1, 2, 3 \quad \text{και} \quad \Lambda^4_4 = \gamma$$

έχει την ιδιότητα $\Delta \hat{x}^1 = \Delta \hat{x}^2 = \Delta \hat{x}^3 = 0$.

Παρατήρηση: Θα υπάρχουν γενικά αρκετοί μετασχηματισμοί Lorentz με αυτή την τέταρτη γραμμή. Ορίζοντας τα υπόλοιπα στοιχεία με $\Lambda^i_4 = -\beta \gamma d^i$, για $i = 1, 2, 3$ και $\Lambda^i_j = (\gamma - 1) d^i d^j + \delta^i_j$ (όπου δ^i_j το δ του Kronecker), παίρνουμε ένα στοιχείο του \mathcal{L} .

Ας αποδείξουμε όμως τον παραπάνω ισχυρισμό. Θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το $\Delta \hat{x}^4 = \Lambda^4_\beta \Delta x^\beta$ και για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας ας είναι $\Delta \vec{x} = [(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2}$. Ας θεωρήσουμε ότι $\Delta \vec{x} \neq 0$, αλλιώς δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε. Είναι

$$\beta^2 = \frac{\Delta \vec{x}^2}{(\Delta x^4)^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta x^4}{\sqrt{-Q(x - x_0)}}$$

$$\beta\gamma = \frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{-Q(x-x_0)}} \quad , \quad d^i = \frac{\Delta x_i}{\Delta\vec{x}} \quad , \quad \text{για } i = 1, 2, 3$$

Από την (1.3.16) βρίσκουμε ότι

$$\Delta\hat{x}_4 = -\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{-Q(x-x_0)}}(\Delta\vec{x}) + \frac{\Delta x^4}{\sqrt{-Q(x-x_0)}}\Delta x^4 = \sqrt{-Q(x-x_0)}$$

επομένως $Q(x-x_0) = -(\Delta\hat{x}_4)^2$.

Όμως, υπολογίζοντας το $Q(x-x_0)$ ως προς τη βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ βρίσκουμε ότι:

$$Q(x-x_0) = (\Delta\hat{x}^1)^2 + (\Delta\hat{x}^2)^2 + (\Delta\hat{x}^3)^2 - (\Delta\hat{x}^4)^2$$

και επομένως

$$(\Delta\hat{x}^1)^2 + (\Delta\hat{x}^2)^2 + (\Delta\hat{x}^3)^2 = 0$$

δηλαδή πράγματι

$$\Delta\hat{x}^1 = \Delta\hat{x}^2 = \Delta\hat{x}^3 = 0$$

☞ Για κάθε χρονοειδές διάνυσμα v στο \mathcal{M} ορίζουμε την **διάρκεια** (duration) $\tau(v)$ του v ως

$$\tau(v) = \sqrt{-Q(v)}$$

Αν το v είναι το διάνυσμα μετατόπισης $x-x_0$, τότε η $\tau(x-x_0)$ ερμηνεύεται φυσικά ως η χρονική διαφορά των γεγονότων x_0 και x σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο.

☞ Ένα υποσύνολο του \mathcal{M} της μορφής $\{x_0 + t(x-x_0) : t \in \mathfrak{R}\}$, όπου $x-x_0$ είναι ένα χρονοειδές, λέγεται **χρονοειδής ευθεία** στο \mathcal{M} . Μια χρονοειδής ευθεία που διέρχεται από την αρχή ονομάζεται **άξονας χρόνου** (time axis).

Θα δείξουμε ότι αυτό το όνομα του ταιριάζει αποδεικνύοντας το παρακάτω:

Θεώρημα 12: Αν T είναι ένας άξονας χρόνου, τότε υπάρχει μια αδρανειακή βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ του \mathcal{M} τέτοια, ώστε ο υπόχωρος του \mathcal{M} που παράγεται από το \hat{e}_4 είναι ο T .

Απόδειξη: Επιλέγουμε ένα γεγονός \tilde{e}_4 στο T , με $\tilde{e}_4 \cdot \tilde{e}_4 = -1$ και έστω $\langle \tilde{e}_4 \rangle$ να είναι η γραμμική θήκη⁵ του \tilde{e}_4 στο \mathcal{M} . Ορίζουμε επίσης και το $\langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$ να είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα της γραμμικής θήκης του \tilde{e}_4 , η οποία είναι κι αυτή ένας υπόχωρος του \mathcal{M} . Θεωρούμε ότι $\mathcal{M} = \langle \tilde{e}_4 \rangle \oplus \langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$.

⁵ Γραμμική θήκη ενός διανύσματος v του διανυσματικού χώρου V , ονομάζεται το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής λv , για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$.

(Θυμηθείτε ότι ένας διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων του V_1 και V_2 αν $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ και κάθε διάνυσμα v του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διανύσματος από το V_1 και ενός διανύσματος από το V_2).

Αφού κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στον $\langle \tilde{e}_4 \rangle$ είναι χρονοειδές, από το Πρόγραμμα 6, κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$ θα είναι χωροειδές. Άρα αυτοί οι δύο χώροι πράγματι έχουν μηδενική τομή.

Έστω v ένα τυχαίο διάνυσμα στο \mathcal{M} και ας θεωρήσουμε το διάνυσμα $w = v + (v \cdot \tilde{e}_4) \cdot \tilde{e}_4$ στο \mathcal{M} . Είναι

$$\begin{aligned} w \cdot \tilde{e}_4 &= [v + (v \cdot \tilde{e}_4) \cdot \tilde{e}_4] \cdot \tilde{e}_4 \\ &= v \cdot \tilde{e}_4 + (v \cdot \tilde{e}_4) \cdot (\tilde{e}_4 \cdot \tilde{e}_4) \\ &= v \cdot \tilde{e}_4 + (v \cdot \tilde{e}_4) \cdot (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

άρα $w \in \langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$.

Έτσι το $v = -(v \cdot \tilde{e}_4) \cdot \tilde{e}_4 + w$, όπου το $-(v \cdot \tilde{e}_4) \cdot \tilde{e}_4 \in \langle \tilde{e}_4 \rangle$ και το $w \in \langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$.

Τώρα, ο περιορισμός του εσωτερικού γινομένου του \mathcal{M} στον $\langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$ είναι θετικά ορισμένος και επομένως (από το Θεώρημα 1) μπορούμε να βρούμε τρία διανύσματα $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \in \langle \tilde{e}_4 \rangle^\perp$ τέτοια, ώστε $\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Τότε όμως η $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για το \mathcal{M} .

Ας φτιάξουμε τώρα μια αδρανειακή βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ για το \mathcal{M} . Θα υπάρχει ένας μοναδικός ορθογώνιος μετασχηματισμός του \mathcal{M} που θα μεταφέρει τα e_α στα \tilde{e}_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Αν ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Lorentz είναι μη κανονικός ή μη ορθόχρονος ή και τα δύο μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το \tilde{e}_1 ή το \tilde{e}_4 ή και τα δύο με -1 , για να πάρουμε μια αποδεκτή βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ του \mathcal{M} με $\langle \tilde{e}_4 \rangle = T$.

Κάθε άξονας χρόνου είναι επομένως ο x^4 – άξονας κάποιου αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων του \mathcal{M} και έτσι πρέπει να ταυτίζεται με την κοσμική γραμμή κάποιου αδρανειακού παρατηρητή. Αφού κάθε χρονοειδής ευθεία είναι παράλληλη με κάποιον άξονα χρόνου, θα θεωρούμε κάθε τέτοια ευθεία ως την κοσμική γραμμή ενός σημείου σε ηρεμία στο αντίστοιχο σύστημα αναφοράς (ας πούμε η κοσμική γραμμή κάποιου «βοηθού» του παρατηρητή μας).

Παρατηρήσεις

1) Αν T είναι ένας άξονας χρόνου και x, x_0 είναι δυο γεγονότα, τότε το $x - x_0$ είναι ορθογώνιο στο T αν και μόνο αν τα x και x_0 είναι διαδοχικά σε κάθε σύστημα αναφοράς που έχει ως x^4 – άξονα τον T .

2) Αν $x - x_0$ είναι ένα χρονοειδές και s είναι ένας τυχαίος, μη αρνητικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο, η χωρική απόσταση των x και x_0 είναι s . Επίσης η χρονική διαφορά των x και x_0 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος στην $\tau(x - x_0)$.

Η διάρκεια $\tau(x - x_0)$ είναι επομένως η μικρότερη χρονική διαφορά που μπορεί να έχουν δύο γεγονότα και γι αυτό συνήθως ονομάζεται και **κανονική (proper) χρονική διαφορά** (ή **ιδιόχρονος**) των x_0 και x . Όταν δεν υπάρχει περίπτωση παρανόησης θα τη συμβολίζουμε με Δt .

Κάθε χρονοειδές διάνυσμα v βρίσκεται μεταξύ κάποιων αξόνων χρόνου, έτσι η $\tau(v)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «χρονικό μήκος» του v (η χρονική διαφορά της ουράς και της κορυφής του όπως καταγράφεται από έναν παρατηρητή που τα βιώνει και τα δύο). Είναι μια μάλλον ασυνήθιστη έννοια μήκους, όμως, αφού οι ανάλογες βασικές ανισότητες που κάποιος έχει συνηθίσει να χρησιμοποιεί στο Ευκλείδειο μήκος είναι γενικά αντεστραμμένες.

Θεώρημα 13: (αντεστραμμένη ανισότητα Schwartz)

Αν v, w είναι δύο χρονοειδή διανύσματα στο \mathcal{M} , τότε

$$(v \cdot w)^2 \geq v^2 \cdot w^2 \tag{1.4.1}$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το διάνυσμα $u = av - bw$, όπου $a = v \cdot w$ και $b = v \cdot v = v^2$. Παρατηρούμε ότι $u \cdot v = a v^2 - b w \cdot v = (v \cdot w) v^2 - v^2 (v \cdot w) = 0$. Επειδή το v είναι χρονοειδές, το πόρισμα 1.6 μας δίνει ότι το u είναι είτε το μηδενικό είτε χωροειδές διάνυσμα. Έτσι $0 \leq u^2 = a^2 v^2 + b^2 w^2 - 2ab (v \cdot w)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $u = 0$. Επομένως, ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2ab (v \cdot w) &\leq a^2 v^2 + b^2 w^2 \\ 2 v^2 (v \cdot w)^2 &\leq v^2 (v \cdot w)^2 + (v^2)^2 w^2 \\ 2 (v \cdot w)^2 &\geq (v \cdot w)^2 + v^2 w^2 && (\text{αφού } v^2 < 0) \\ (v \cdot w)^2 &\geq v^2 w^2 \end{aligned}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $u = 0$, δηλαδή όταν $av - bw = 0$ και επειδή $a = v \cdot w \neq 0$ αφού είναι χρονοειδή, συνεπάγεται ότι τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου και ισχύει ακριβώς η ισότητα στην 1.4.1.

Θεώρημα 14: (Αντίστροφη Τριγωνική Ανισότητα)

Αν v και w είναι δύο χρονοειδή διανύσματα με τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό (δηλαδή $v \cdot w < 0$), τότε

$$\tau(v + w) \geq \tau(v) + \tau(w) \quad (1.4.2)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη:

Από το Θεώρημα 1.13, $(v \cdot w)^2 \geq v^2 w^2 = (-v^2)(-w^2)$ άρα $|v \cdot w| \geq \sqrt{-v^2} \sqrt{-w^2}$.

Όμως $v \cdot w < 0$ και επομένως

$$-2 v \cdot w \geq 2 \sqrt{-v^2} \sqrt{-w^2} \quad (1.4.3)$$

Τώρα, το $v + w$ είναι επίσης χρονοειδές. Επιπλέον

$$-(v + w)^2 = -v^2 - 2v \cdot w - w^2 \geq -v^2 + 2 \sqrt{-v^2} \sqrt{-w^2} - w^2 \quad (\text{από την 1.4.3}).$$

Έτσι

$$\begin{aligned} -(v + w)^2 &\geq (\sqrt{-v^2} + \sqrt{-w^2})^2 \\ \sqrt{-(v + w)^2} &\geq \sqrt{-v^2} + \sqrt{-w^2} \\ \sqrt{-Q(v + w)} &\geq \sqrt{-Q(v)} + \sqrt{-Q(w)} \\ \tau(v + w) &\geq \tau(v) + \tau(w) \end{aligned}$$

όπως θέλαμε. Αν ισχύει η ισότητα τότε, αντιστρέφοντας τα βήματα παίρνουμε ότι

$-2 v \cdot w = 2 \sqrt{-v^2} \sqrt{-w^2}$ και επομένως $(v \cdot w)^2 = v^2 w^2$ και επομένως από το θεώρημα 1.13, τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Λήμμα 15: Το άθροισμα κάθε πεπερασμένου αριθμού διανυσμάτων στο \mathcal{M} , που είναι όλα χρονοειδή ή φωτοειδή και μελλοντικά κατευθυνόμενα (αντίστοιχα παρελθοντικά κατευθυνόμενα) είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο (αντίστοιχα παρελθοντικά κατευθυνόμενο) εκτός αν είναι όλα φωτοειδή και παράλληλα οπότε τότε το άθροισμά τους είναι φωτοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο (αντίστοιχα παρελθοντικά κατευθυνόμενο).

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για μελλοντικά κατευθυνόμενα διανύσματα αφού το αντίστοιχο αποτέλεσμα για παρελθοντικά κατευθυνόμενα προκύπτει με απλή αλλαγή προσήμων. Επιπλέον είναι ξεκάθαρο ότι οποιοδήποτε άθροισμα μελλοντικά κατευθυνόμενων διανυσμάτων είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο. Πρώτα παρατηρούμε ότι αν τα v και w είναι χρονοειδή τότε $v \cdot w < 0$, $v \cdot v < 0$ και $w \cdot w < 0$. Έτσι $(v + w) \cdot (v + w) = v \cdot v + 2 v \cdot w + w \cdot w < 0$ και άρα το $v + w$ είναι χρονοειδές.

Παρόμοια αν το v είναι χρονοειδές και το w φωτοειδές, πάλι το $v + w$ είναι χρονοειδές.

Έστω v, w δύο φωτοειδή διανύσματα. Είναι $(v + w) \cdot (v + w) = 2v \cdot w$. Από την πρόταση 1.2, τα v και w είναι ορθογώνια αν και μόνο αν είναι παράλληλα. Επομένως το $v + w$ είναι φωτοειδές μόνο τότε. Αν τα v και w δεν είναι παράλληλα θεωρούμε μια αδρανειακή βάση $\{e_\alpha\}$ για το \mathcal{M} και έστω $v = v^\alpha e_\alpha$, $w = w^\alpha e_\alpha$.

Για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ ορίζουμε το w_n στο \mathcal{M} με

$$w_n = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 + (v^4 + \frac{1}{n}) e_4$$

Τότε κάθε w_n είναι χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο. Από το θεώρημα 1.5, $0 > w_n \cdot w = v \cdot w - \frac{1}{n} w^4$, δηλαδή $v \cdot w < \frac{1}{n} w^4$, για κάθε n . Έτσι, $v \cdot w \leq 0$ και επειδή από υπόθεση $v \cdot w \neq 0$, είναι $v \cdot w < 0$.

Η απόδειξη συμπληρώνεται με επαγωγή στον αριθμό των διανυσμάτων.

Πόρισμα 16: Έστω v_1, v_2, \dots, v_n χρονοειδή διανύσματα, όλα με τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό. Τότε

$$\tau(v_1 + v_2 + \dots + v_n) \geq \tau(v_1) + \tau(v_2) + \dots + \tau(v_n) \quad (1.4.4)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι όλα παράλληλα.

Πόρισμα 17: Έστω v και w δύο μη παράλληλα φωτοειδή διανύσματα. Τότε τα v και w έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό αν και μόνο αν $v \cdot w < 0$.

Απόδειξη:

Έστω ότι τα v και w έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό. Τότε, από το Λήμμα 1.15, το $v + w$ είναι χρονοειδές και άρα $0 > (v + w) \cdot (v + w) = 2v \cdot w$, επομένως $v \cdot w < 0$.

Αντίστροφα, αν τα v και w έχουν αντίθετο χρονικό προσανατολισμό, τότε τα v και $-w$ έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό και επομένως $v \cdot (-w) < 0$ και επομένως $v \cdot w > 0$.

Η αιτία για την οποία η τριγωνική ανισότητα είναι «αντεστραμμένη» γίνεται απόλυτα κατανοητή, αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων σε σχέση με το οποίο $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$, $w = (w^1, w^2, w^3, w^4)$ και $v + w = (0, 0, 0, v^4 + w^4)$ (αυτό απλά σημαίνει να θεωρήσουμε τον άξονα χρόνου που διέρχεται από το $v^4 + w^4$

ως τον $x^4 - \text{άξονα}$). Τότε όμως $\tau(v) = [(v^4)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2]^{1/2} < v^4$ και όμοια $\tau(w) < w^4$. Όμως $\tau(v + w) = v^4 + w^4$.

Μία χρονοειδής ευθεία γραμμή θεωρείται ως η κοσμική γραμμή ενός υλικού σημείου που είναι «ελεύθερο» με την έννοια της Νευτώνειας μηχανικής και επομένως βρίσκεται σε ηρεμία σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Δεν έχουν όλα τα υλικά σημεία που μας ενδιαφέρουν αυτή την ιδιότητα. Για να τα μοντελοποιήσουμε στο \mathcal{M} θα χρειαστούμε κάποια προκαταρκτικά.

Έστω $I \subseteq \mathfrak{R}$ ένα ανοικτό διάστημα. Μια απεικόνιση $\varphi : I \rightarrow \mathcal{M}$ είναι μια **καμπύλη** στο \mathcal{M} . Σε σχέση με οποιαδήποτε αδρανειακή βάση $\{e_a\}$ για το \mathcal{M} μπορούμε να γράψουμε $\varphi(t) = x^a(t) e_a$, για κάθε $t \in I$. Θα υποθέσουμε ότι η φ είναι λεία, δηλαδή κάθε συνιστώσα της $x^a(t)$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και ότι το διάνυσμα της ταχύτητας της φ , $\varphi'(t) = \frac{dx^a}{dt} e_a$ είναι μη μηδενικό για κάθε t στο I .

Αυτός ο τρόπος ορισμού της λείας συνάρτησης δεν εξαρτάται από την επιλογή της αδρανειακής βάσης. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια άλλη βάση $\{e'_a\}$ και L τον ορθογώνιο μετασχηματισμό που μεταφέρει τη μία βάση στην άλλη με αντίστοιχα στοιχεία Λ^a_β του \mathcal{L} . Αν $\varphi(t) = x^a(t) e'_a$ τότε $x^a(t) = \Lambda^a_\beta x^\beta(t)$ και επομένως $\frac{dx^a}{dt} = \Lambda^a_\beta \frac{dx^\beta}{dt}$. Με δεδομένο ότι οι Λ^a_β δεν είναι μοναδικοί έπεται το ζητούμενο.

Μια καμπύλη $\varphi : I \rightarrow \mathcal{M}$ θα λέμε ότι είναι **χωροειδής**, **χρονοειδής** ή **φωτοειδής** ανάλογα με το ποια ιδιότητα έχει η ταχύτητά της, δηλαδή αν $\varphi'(t) \cdot \varphi'(t)$ είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν για κάθε t .

Μια χρονοειδής ή φωτοειδής καμπύλη είναι μελλοντοκατευθυνόμενη (αντίστοιχα παρελθοντοκατευθυνόμενη) αν η $\varphi'(t)$ είναι μελλοντοκατευθυνόμενη (αντίστοιχα παρελθοντοκατευθυνόμενη) για κάθε t .

Μια μελλοντοκατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη καλείται **χρονοειδής κοσμική γραμμή** ή κοσμική γραμμή ενός υλικού σημείου.

Επεκτείνουμε όλους αυτούς τους ορισμούς στην περίπτωση κατά την οποία το I περιλαμβάνει κάποιο ή και τα δύο άκρα του απαιτώντας η φ να είναι επεκτάσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα που να περιέχει το I . Ειδικότερα, αν I είναι ένα (όχι απαραίτητα ανοικτό) διάστημα στο \mathfrak{R} , τότε η $\varphi : I \rightarrow \mathcal{M}$ είναι λεία, χρονοειδής, ... αν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα \tilde{I} που περιέχει το I και η $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \mathcal{M}$ είναι λεία,

χρονοειδής, ... και ικανοποιεί την $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ για κάθε $t \in I$. Γενικά θα αγνοήσουμε την περισπωμένη και θα συμβολίζουμε με φ και την επέκταση της καμπύλης.

Αν $\varphi : I \rightarrow \mathcal{M}$ είναι μια καμπύλη, $J \subseteq \mathfrak{R}$ είναι ένα άλλο διάστημα και $h : J \rightarrow I$, με $t = h(s)$ είναι μια απεριόριστα διαφορίσιμη συνάρτηση με $h'(s) > 0$ για κάθε $s \in J$, τότε η καμπύλη $\psi = \varphi \circ h : J \rightarrow \mathcal{M}$ ονομάζεται **αναπαραμετροποίηση** της φ .

Αν $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{M}$ είναι μια χρονοειδής κοσμική γραμμή στο \mathcal{M} ορίζουμε το κανονικό (proper) χρονικό μήκος της φ με

$$L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|\varphi'(t) \cdot \varphi'(t)|} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt}} dt$$

Ως μια κατάλληλη ερμηνεία του $L(\varphi)$ θα θεωρήσουμε την

Υπόθεση του Ρολογιού: Αν $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{M}$ είναι μια χρονοειδής κοσμική γραμμή στο \mathcal{M} , τότε η $L(\varphi)$ είναι η χρονική διαφορά μεταξύ των γεγονότων $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$ όπως την μετρά ένα ιδανικό τυποποιημένο ρολόι που φέρει μαζί του το σωματίδιο του οποίου η κοσμική γραμμή παριστάνεται από τη φ .

Θεώρημα 18: Έστω p και q δύο σημεία στο \mathcal{M} . Τότε το $p - q$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο αν και μόνο αν υπάρχει μια λεία, μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{M}$ με $\varphi(\alpha) = q$ και $\varphi(\beta) = p$.

Θα αναβάλλουμε την απόδειξη του θεωρήματος για την ώρα για να δείξουμε τη σχέση του με την Υπόθεση του Ρολογιού.

Διαμερίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n υποδιαστήματα $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, με $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$. Τότε, από το θεώρημα 1.18, καθένα από τα διανύσματα μετατόπισης $v_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο. Η $\tau(v_i)$ προκύπτει τότε ως ο χρόνος μεταξύ των $\varphi(t_{i-1})$ και $\varphi(t_i)$, όπως μετριέται από έναν αδρανειακό παρατηρητή που είναι παρών και στα δύο γεγονότα.

Αν το «υλικό σωματίδιο» του οποίου η κοσμική γραμμή παριστάνεται με τη φ έχει σταθερή ταχύτητα μεταξύ των γεγονότων $\varphi(t_{i-1})$ και $\varphi(t_i)$, τότε η $\tau(v_i)$ θα είναι ο χρόνος μεταξύ αυτών των γεγονότων όπως μετριέται από ένα ρολόι που κινείται μαζί με το σωματίδιο. Σε σχέση με οποιοδήποτε αδρανειακό πλαίσιο

$$\tau(v_i) = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \Delta x^{\alpha}_i \Delta x^{\beta}_i} = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{\Delta x^{\alpha}_i}{\Delta t_i} \frac{\Delta x^{\beta}_i}{\Delta t_i} \Delta t_i}$$

Επιλέγοντας το Δt_i ικανοποιητικά μικρό, το Δx^4_i μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό θέλουμε (από τη συνέχεια της φ) και αφού η ταχύτητα του σωματιδίου σε σχέση με το πλαίσιο αναφοράς που χρησιμοποιούμε είναι «σχεδόν» σταθερή σε «μικρές» μεταβολές του x^4 – χρόνου, τότε η $\tau(v_i)$ θα μπορούσε να είναι μια καλή προσέγγιση στη διαφορά χρόνου μεταξύ των $\varphi(t_{i-1})$ και $\varphi(t_i)$, μετρημένη από το υλικό σωματίδιο.

Συνεπώς το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{\Delta x^{\alpha}_i}{\Delta t_i} \frac{\Delta x^{\beta}_i}{\Delta t_i}} \Delta t_i \quad (1.4.5)$$

προσεγγίζει τη χρονική διαφορά μεταξύ των $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$ που αυτό το σωματίδιο μετράει. Η προσέγγιση γίνεται καλύτερη καθώς το Δt_i τείνει στο 0 και στο όριο, το άθροισμα (1.4.5) προσεγγίζει τον ορισμό του $L(\varphi)$.

Το επιχείρημα φαίνεται αρκετά πειστικό, αλλά βασίζεται σε μια παραδοχή για τη συμπεριφορά των ιδανικών ρολογιών, που δεν έχει εξηγηθεί προηγουμένως, δηλαδή ότι μια επιτάχυνση όπως αυτή που υπάρχει εδώ δεν έχει καμιά επίδραση στο ρυθμό του (ο στιγμιαίος ρυθμός ενός τέτοιου ρολογιού εξαρτάται μόνο από τη στιγμιαία ταχύτητά του και όχι από το πόσο γρήγορα γίνεται η αλλαγή της ταχύτητας αυτής). Η δικαιολόγηση μιας τέτοιας υπόθεσης δεν είναι καθόλου τετριμμένη. Πρέπει κανείς να πραγματοποιήσει μια σειρά από πειράματα με ρολόγια διαφόρων τύπων, που να δέχονται αληθινές επιταχύνσεις και τελικά να καταλήξουμε σε μια πιο ακριβή πρόταση όπως « η Υπόθεση του Ρολογιού ισχύει για ρολόγια τέτοιου και τέτοιου είδους κάτω από αυτές τις συνθήκες επιτάχυνσης».

Λήμμα 19: Έστω $\varphi: (A, B) \rightarrow \mathcal{M}$ μια λεία, χρονοειδής και μελλοντικά κατευθυνόμενη καμπύλη και σταθεροποιούμε ένα $t_0 \in (A, B)$. Υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε το διάστημα $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ να περιέχεται στο (A, B) και

- το $\varphi(t)$ να ανήκει στον παρελθοντικό χρονικό κώνο στο $\varphi(t_0)$ για κάθε $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$
- το $\varphi(t)$ να ανήκει στον μελλοντικό χρονικό κώνο στο $\varphi(t_0)$ για κάθε $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $\varphi(t) \in C_T^+(\varphi(t_0))$ για κάθε $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_1)$. Το επιχείρημα για την ύπαρξη ενός $\varepsilon_2 > 0$ με $\varphi(t) \in C_T^-(\varphi(t_0))$ για κάθε $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ είναι παρόμοιο. Θεωρώντας τελικά ως ε το ελάχιστο των δύο ($\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$) θα έχουμε το ζητούμενο.

Σταθεροποιούμε μια αδρανειακή βάση $\{e_\alpha\}$ και γράφουμε το $\varphi(t) = x^\alpha(t) e_\alpha$, για $A < t < B$. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κανένα ε_1 με την ιδιότητα που θέλουμε. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε μια ακολουθία $t_1 > t_2 > \dots > t_0$ στο (t_0, B) τέτοια ώστε το $t_n \rightarrow t_0$ (καθώς το $n \rightarrow \infty$) και ισχύει μία από τις παρακάτω δύο προτάσεις:

1) $Q(\varphi(t_n) - \varphi(t_0)) \geq 0$, για κάθε n (δηλαδή ότι το $\varphi(t_n) - \varphi(t_0)$ είναι χωροειδές ή φωτοειδές για κάθε n).

2) $Q(\varphi(t_n) - \varphi(t_0)) < 0$, αλλά το $\varphi(t_n) - \varphi(t_0)$ είναι παρελθοντικά κατευθυνόμενο για κάθε n (δηλαδή το $\varphi(t_n) \in C_T^-(\varphi(t_0))$ για κάθε n).

Έστω ότι ισχύει το (1). Τότε

$$Q\left(\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0}\right) \geq 0 \quad \text{για κάθε } n$$

άρα

$$Q\left(\frac{x^1(t_n) - x^1(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{x^2(t_n) - x^2(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{x^3(t_n) - x^3(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{x^4(t_n) - x^4(t_0)}{t_n - t_0}\right) \geq 0$$

δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q\left(\frac{x^1(t_n) - x^1(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{x^2(t_n) - x^2(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{x^3(t_n) - x^3(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{x^4(t_n) - x^4(t_0)}{t_n - t_0}\right) \geq 0$$

$$Q\left(\frac{dx^1}{dt}(t_0), \frac{dx^2}{dt}(t_0), \frac{dx^3}{dt}(t_0), \frac{dx^4}{dt}(t_0)\right) \geq 0$$

$$Q(\varphi \mathbb{I} t_0) \geq 0$$

Όμως το $\varphi'(t_0)$ είναι χρονοειδές ($Q(\varphi \mathbb{I} t_0) < 0$) άρα οδηγούμαστε σε άτοπο! Όμοια δείχνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει ούτε το (2).

Απόδειξη θεωρήματος 18:

Το αναγκαίο είναι προφανές. Για να αποδείξουμε το ικανό ορίζουμε με φ μια λεία, μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονοειδή επέκταση της φ σε κάποιο διάστημα (A, B) που να περιέχει το $[\alpha, \beta]$. Από το λήμμα 19, υπάρχει ένα $\varepsilon_1 > 0$ με $(\alpha, \alpha + \varepsilon_1) \subseteq (A, B)$ και τέτοιο ώστε $\varphi(t) \in C_T^+(q)$ για κάθε $t \in (\alpha, \alpha + \varepsilon_1)$. Έστω t_0 το supremum όλων αυτών των ε_1 . Αφού $\beta < B$ πρέπει να δείξουμε ότι $t_0 = B$.

Έστω ότι $A < t_0 < B$. Σύμφωνα με το λήμμα 19, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq (A, B),$$

$$\varphi(t) \in C_T^-(\varphi(t_0)) \quad \text{για κάθε } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0), \quad \text{και}$$

$$\varphi(t) \in C_T^+(\varphi(t_0)) \quad \text{για κάθε } t \in (t_0, t_0 + \varepsilon).$$

Παρατηρούμε ότι, αν το $\varphi(t_0)$ ανήκε στο $C_T^+(q)$, τότε για κάθε $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ θα είχαμε ότι το $[\varphi(t_0) - q] + [\varphi(t) - \varphi(t_0)] = \varphi(t) - q$ θα είναι ένα μελλοντικά κατευθυνόμενο και χρονοειδές από το λήμμα 15 αλλά αυτό αντιτίθεται στον ορισμό του t_0 ως supremum. Από την άλλη μεριά, αν το $\varphi(t_0)$ βρίσκεται εκτός του φωτοειδούς κώνου στο q , τότε για κάποια $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$, η $\varphi(t)$ θα βρίσκεται εκτός του κώνου φωτός στο q και αυτό είναι αδύνατο αφού, πάλι από τον ορισμό του t_0 , κάθε τέτοιο $\varphi(t)$ είναι μέσα στον $C_T^+(q)$. Η μόνη δυνατότητα που υπάρχει για το $\varphi(t_0)$ είναι να βρίσκεται εντός του μηδενικού κώνου στο q . Αλλά τότε ο παρελθοντικός χρονικός κώνος στο $\varphi(t_0)$ χωρίζεται από τον μελλοντικό χρονικό κώνο στο q και κάθε $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ δίνει μια αντίφαση. Συμπεραίνουμε ότι τελικά $t_0 = B$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θα δώσουμε τώρα την παραμετροποίηση μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής $\varphi : I \rightarrow \mathcal{M}$, που είναι για πολλούς λόγους η πιο χρήσιμη. Πρώτα θα μεταφράσουμε τον ορισμό της φ σε μια πραγματική γραμμή αν είναι αναγκαίο να υποθέσουμε ότι περιέχει το 0.

Ορίζουμε την **κανονική** (proper) **χρονική συνάρτηση** $\tau(t)$ στο I (ή **ιδιοσυνάρτηση**) ως εξής:

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t |\varphi'(u) \cdot \varphi'(u)|^{1/2} du$$

Έτσι, $\frac{d\tau}{dt} = |\varphi'(t) \cdot \varphi'(t)|^{1/2}$, που είναι θετική και απεριόριστα διαφορίσιμη, αφού η φ

είναι χρονοειδής. Η αντίστροφη $t = h(\tau)$ επίσης υπάρχει και $\frac{dh}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1} > 0$, άρα συμπεραίνουμε ότι η τ είναι μια νομιμοποιημένη παράμετρος κατά μήκος της φ (από φυσικής πλευράς, απλώς παραμετροποιούμε την φ με χρονικές μετρήσεις που καταγράφονται κατά μήκος της φ). Θα καταχραστούμε κατά κάποιον τρόπο το συμβολισμό μας και θα χρησιμοποιούμε περισσότερο το τ παρά το t :

$$\varphi(\tau) = x^a(\tau) e_a \quad (1.4.6)$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\varphi'(\tau) = \frac{dx^a}{d\tau} e_a$ της φ καλείται **κοσμική ταχύτητα** ή **τετραταχύτητα της φ** και συμβολίζεται με $U = U^a e_a$. Ακριβώς όπως η οικεία παραμετροποίηση του μήκους τόξου μιας καμπύλης στον \mathcal{R}^3 έχει μοναδιαία ταχύτητα, έτσι και η τετραταχύτητα μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής είναι πάντα

ένα μοναδιαίο χρονοειδές διάνυσμα και μάλιστα $U \cdot U = -1$, για κάθε σημείο κατά μήκος της φ .

Η δεύτερη κανονική χρονική παράγωγος $\varphi''(\tau) = \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} e_a$ της φ καλείται **κοσμική επιτάχυνση** ή **τετραεπιτάχυνση της φ** και συμβολίζεται με $A = A^a e_a$. Είναι πάντα ορθογώνια στην U και έτσι, ειδικότερα, πρέπει να είναι χωροειδής (αν είναι μη μηδενική).

Η 4-ταχύτητα και η 4-επιτάχυνση μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής είναι κρίσιμες για την κατανόηση της δυναμικής του σωματιδίου του οποίου η κοσμική γραμμή παριστάνεται από την φ . Ένας δεδομένος αδρανειακός παρατηρητής όμως, μοιάζει να παραμετροποιεί την κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου περισσότερο με το χρόνο x^4 παρά με την τ και επομένως θα χρειαστούν διαδικασίες για να υπολογιστούν οι U και A από αυτή την παραμετροποίηση. Πρώτα παρατηρούμε ότι αφού η $\varphi(\tau) = (x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau), x^4(\tau))$ είναι λεία, η $x^4(\tau)$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη.

Αφού η φ είναι μελλοντικά κατευθυνόμενη, η $\frac{dx^4}{d\tau}$ είναι θετική και έτσι η αντίστροφη συνάρτηση $\tau = h(x^4)$ υπάρχει και η $h'(x^4) = \left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^{-1}$ είναι θετική. Έτσι, η x^4 είναι μια νομιμοποιημένη παράμετρος για την φ . Επιπλέον

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dx^4} &= |\varphi'(x^4) \cdot \varphi'(x^4)|^{1/2} \\ &= \sqrt{1 - \left[\left(\frac{dx^1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4}\right)^2 \right]} \\ &= \sqrt{1 - \beta^2(x^4)} \end{aligned}$$

όπου συμβολίζουμε με $\beta(x^4)$ τη συνηθισμένη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου, του οποίου η κοσμική γραμμή είναι φ σε σχέση με το πλαίσιο $S(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Έτσι, $\frac{dx^4}{d\tau} = (1 - \beta^2(x^4))^{-1/2}$, το οποίο συμβολίζουμε με $\gamma = \gamma(x^4)$. Τώρα υπολογίζουμε

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^4}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dx^4}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{και} \quad U^4 = \gamma$$

άρα

$$U = (U^1, U^2, U^3, U^4) = \gamma \left(\frac{dx^1}{dx^4}, \frac{dx^2}{dx^4}, \frac{dx^3}{dx^4}, 1 \right) \quad (1.4.9)$$

ή ακόμα πιο συνοπτικά

$$U = \gamma (\vec{u}, 1) \quad (1.4.10)$$

όπου \vec{u} είναι η συνηθισμένη τρισδιάστατη ταχύτητα του φ στο S .

Όμοια υπολογίζουμε

$$A^i = \gamma \frac{d}{dx^4} \left(\gamma \frac{dx^i}{dx^4} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{και} \quad A^4 = \gamma \frac{d}{dx^4} (\gamma)$$

άρα

$$A = \gamma \frac{d}{dx^4} (\gamma \vec{u}, \gamma) \quad (1.4.11)$$

Σε κάθε σταθερό σημείο $\varphi(\tau_0)$ κατά μήκος μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής φ , η $U(\tau_0)$ είναι ένα μελλοντικά κατευθυνόμενο, μοναδιαίο, χρονοειδές διάνυσμα και έτσι μπορεί να λαμβάνεται ως το χρονοειδές διάνυσμα e_4 κάποιας αδρανειακής βάσης για το \mathcal{M} . Σε σχέση με μια τέτοια βάση είναι $U(\tau_0) = (0, 0, 0, 1)$.

Θεωρώντας ως $x_0^4 = x^4(\tau_0)$ βρίσκουμε, από την (1.4.9), ότι $\left(\frac{dx^i}{dx^4} \right)_{x^4=x_0^4} = 0$,

για $i = 1, 2, 3$ και επομένως $\beta(x_0^4) = 0$ και $\gamma(x_0^4) = 1$.

Το πλαίσιο αναφοράς που αντιστοιχεί σε μια τέτοια βάση μπορεί όμως να θεωρηθεί σαν να είναι «σε στιγμιαία ηρεμία» σε σχέση με το σωματίδιο του οποίου η κοσμική γραμμή είναι η φ . Κάθε τέτοιο πλαίσιο αναφοράς καλείται **πλαίσιο στιγμιαίας ηρεμίας** για την φ στο $\varphi(\tau_0)$.

Παρατηρούμε εδώ ότι σε ένα τέτοιο πλαίσιο στιγμιαίας ηρεμίας είναι

$$g(A, A) = |\vec{a}|^2 \quad (1.4.12)$$

όπου \vec{a} είναι η 3-επιτάχυνση της φ .

Πράγματι, αφού $\gamma = 1$, βρίσκουμε ότι

$$g(A, A) = \left[\frac{d}{dx^4} (\vec{u}, 1) \right] \left[\frac{d}{dx^4} (\vec{u}, 1) \right] = \left[\frac{d\vec{u}}{dx^4} \right]^2 = |\vec{a}|^2$$

Αφού το $g(A, A)$ παραμένει αμετάβλητο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, διαπιστώνουμε ότι όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές θα συμφωνούν, σε κάθε σημείο κατά μήκος της φ , για το μέτρο της 3-επιτάχυνσης της φ σε σχέση με το δικό της πλαίσιο στιγμιαίας ηρεμίας.

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα με ένα θεώρημα που ισχυρίζεται με αρκετά γενικό τρόπο ότι ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής πρέπει να υπόκειται σε μια διαστολή του χρόνου που δεν τη βιώνουν όσοι παραμένουν σε ηρεμία σε ένα αδρανειακό πλαίσιο.

Θεώρημα 20: Έστω $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{M}$ μια χρονοειδής κοσμική γραμμή στο \mathcal{M} από το $\varphi(\alpha) = q$ στο $\varphi(\beta) = p$. Τότε

$$L(\varphi) \leq \tau(p - q) \quad (1.4.25)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η φ είναι μια παραμετροποίηση μιας χρονοειδούς ευθείας γραμμής που ενώνει τα q και p .

Απόδειξη: Από το θεώρημα 1.18, το $p - q$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, άρα μπορούμε να διαλέξουμε μια βάση $\{e_a\}$ με

$$q = x_0^1 e_1 + x_0^2 e_2 + x_0^3 e_3 + x_q^4 e_4, \quad p = x_p^1 e_1 + x_p^2 e_2 + x_p^3 e_3 + x_p^4 e_4$$

και
$$\tau(p - q) = x_p^4 - x_q^4 = \Delta x^4.$$

Παραμετροποιούμε την φ με το x^4 . Τότε

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \int_{x_q^4}^{x_p^4} \sqrt{1 - \left[\left(\frac{dx^1}{dx^4} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4} \right)^2 \right]} dx^4 \\ &\leq \int_{x_q^4}^{x_p^4} dx^4 = \Delta x^4 = \tau(p - q) \end{aligned}$$

Επιπλέον, η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\frac{dx^i}{dx^4} = 0$, για $i = 1, 2, 3$, δηλαδή αν και μόνο αν κάθε x^i είναι σταθερό και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\varphi(x^4) = x_0^1 e_1 + x_0^2 e_2 + x_0^3 e_3 + x^4 e_4$ για $x_q^4 < x^4 < x_p^4$, όπως ισχύει.

1.5 Χωροειδή διανύσματα

Θα στραφούμε τώρα στην κατηγορία των χωροειδών διανυσμάτων, δηλαδή θα θεωρήσουμε δύο γεγονότα x και x_0 για τα οποία $\mathcal{Q}(x - x_0) > 0$. Σε σχέση με οποιαδήποτε αδρανειακή βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ έχουμε ότι:

$$(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 > (\Delta x^4)^2$$

και επομένως το $x - x_0$ βρίσκεται στο εξωτερικό του φωτοειδούς κώνου στο x_0 και προφανώς δεν υπάρχει καμιά αδρανειακή βάση στο πλαίσιο της οποίας τα δύο γεγονότα θα συνέβαιναν στο ίδιο χωρικό σημείο, δηλαδή δεν υπάρχει αδρανειακός παρατηρητής που θα μπορούσε να βιώσει και τα δύο γεγονότα (για να συμβεί αυτό θα έπρεπε να κινούνταν με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός). Παρόλα αυτά χρησιμοποιώντας ένα ανάλογο επιχείρημα όπως και τα χρονοειδή διανύσματα, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα πλαίσιο αναφοράς ως προς το οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Έστω $\{e_a\}$ μια αυθαίρετη βάση του \mathcal{M} και x, x_0 δύο γεγονότα με το $x - x_0$ να είναι χωροειδές, δηλαδή $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta x^4} > 1$, όπου $\Delta \vec{x} = [(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2}$. Θεωρούμε $\beta = \frac{\Delta x^4}{\Delta \vec{x}} < 1$, $d^i = \frac{\Delta x^i}{\Delta \vec{x}}$, $i = 1, 2, 3$ και επομένως $\gamma = \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\mathcal{Q}(x - x_0)}}$ και $\beta\gamma = \frac{\Delta x^4}{\sqrt{\mathcal{Q}(x - x_0)}}$. Τότε, η (1.3.16) δίνει ότι $\Delta \hat{x}^4 = 0$. Επομένως υπάρχει μια αδρανειακή βάση $\{\hat{e}_a\}$ του \mathcal{M} σε σχέση με την οποία τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα.

Μπορούμε ακόμα να δείξουμε (επιλέγοντας κατάλληλα το β) ότι αν s είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει μια αδρανειακή βάση για το \mathcal{M} σε σχέση με την οποία η χρονική διαφορά των x και x_0 είναι s (άρα γενικά οι αδρανειακοί παρατηρητές δεν συμφωνούν μεταξύ τους ούτε καν στη σειρά με την οποία τα δύο γεγονότα συνέβησαν).

Αφού $[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2]^{1/2} = \sqrt{(\Delta x^4)^2 + \mathcal{Q}(x - x_0)}$ σε κάθε αδρανειακό πλαίσιο και αφού η $(\Delta x^4)^2$ μπορεί να πάρει οποιονδήποτε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό, η χωρική διαφορά των x και x_0 είναι μεγαλύτερη ή ίση με $\sqrt{\mathcal{Q}(x - x_0)}$. Δεν υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η χωρική τους απόσταση να γίνει μικρότερη.

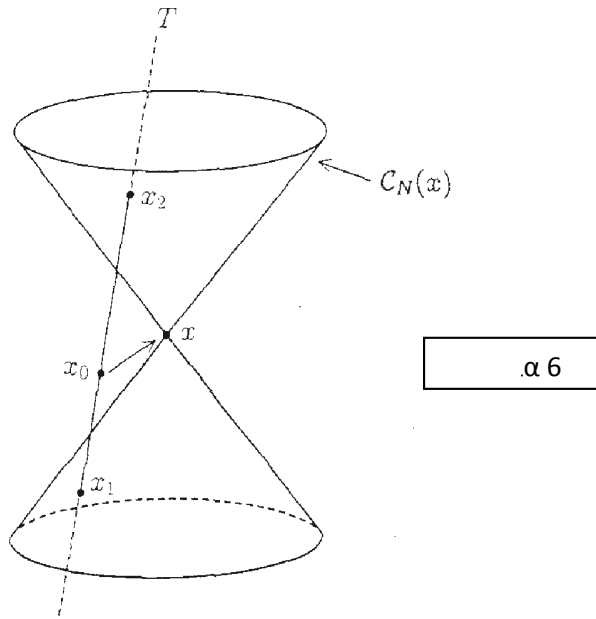
Ορίζουμε, για κάθε δύο γεγονότα x και x_0 για τα οποία $\mathcal{Q}(x - x_0) > 0$, την **κανονική (proper) χωρική απόσταση** $S(x - x_0)$ του x από το x_0 με

$$S(x - x_0) = \sqrt{\mathcal{Q}(x - x_0)}$$

και τη θεωρούμε ως τη χωρική διαφορά τους σε κάθε σύστημα αναφοράς στο οποίο τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα (λέγεται και **ιδιομήκος** του $x - x_0$).

Έστω T μια τυχαία χρονοειδής ευθεία που περιέχει το x_0 . Είδαμε ότι η T μπορεί να θεωρηθεί ως η κοσμική γραμμή κάποιου παρατηρητή σε ηρεμία σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που όμως δεν βρίσκεται υποχρεωτικά στην αρχή των χωρικών συντεταγμένων αυτού του συστήματος.

Έστω x στο \mathcal{M} τέτοιο ώστε το $x - x_0$ να είναι χωροειδές και έστω x_1, x_2 τα δύο σημεία τομής της T με τον $C_N(x)$ όπως φαίνεται στο σχήμα 6.



Παρατηρούμε ότι

$$S^2(x - x_0) = \tau(x_0 - x_1) \tau(x_2 - x_0) \quad (1.5.1)$$

Πράγματι, αφού το $x - x_1$ είναι φωτοειδές είναι $0 = (x - x_1) = [(x_0 - x_1) + (x - x_0)]$

άρα

$$0 = -\tau^2(x_0 - x_1) + 2(x_0 - x_1)(x - x_0) + S^2(x - x_0) \quad (1.5.2)$$

Όμοια, αφού το $x_2 - x$ είναι φωτοειδές, $0 = (x_2 - x) = [(x_2 - x_0) + (x - x_0)]$ άρα

$$0 = -\tau^2(x_2 - x_0) - 2(x_2 - x_0)(x - x_0) + S^2(x - x_0) \quad (1.5.3)$$

Αφού τα $x_2 - x_0$ και $x_0 - x_1$ είναι συγγραμμικά, υπάρχει μια σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια, ώστε $x_2 - x_0 = \kappa(x_0 - x_1)$ άρα $\tau^2(x_2 - x_0) = \kappa^2 \tau^2(x_0 - x_1)$.

Πολλαπλασιάζοντας την (1.5.2) με κ και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στην (1.5.3) βρίσκουμε

$$-(\kappa + \kappa^2) \tau^2(x_0 - x_1) + (\kappa + 1) S^2(x - x_0) = 0$$

Αφού $\kappa + 1 \neq 0$ (τα x_1 και x_2 δεν ταυτίζονται) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} S^2(x - x_0) &= \kappa \tau^2(x_0 - x_1) \\ &= \tau(x_0 - x_1) [\kappa \tau(x_0 - x_1)] \\ &= \tau(x_0 - x_1) \tau(x_2 - x_0) \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι το χωροειδές διάνυσμα μετατόπισης $x - x_0$ είναι ορθογώνιο στη χωροειδή ευθεία T . Τότε $(x_0 - x_1) \cdot (x - x_0) = (x_2 - x_0) \cdot (x - x_0) = 0$ και οι (1.5.2) και (1.5.3) δίνουν $S(x - x_0) = \tau(x_2 - x_0) = \tau(x_0 - x_1)$ το οποίο γράφουμε συνήθως στη μορφή

$$S(x - x_0) = \frac{1}{2} [\tau(x_2 - x_0) + \tau(x_0 - x_1)] \quad (1.5.4)$$

Ειδικότερα, αυτό αληθεύει όταν η T είναι ένας χρονικός άξονας. Έχουμε δει ότι σε αυτή την περίπτωση το T είναι η κοσμική γραμμή ενός αδρανειακού παρατηρητή O και τα γεγονότα x και x_0 είναι ταυτόχρονα στο πλαίσιο αυτού του παρατηρητή. Όμως τότε το $S(x - x_0)$ είναι η απόσταση μεταξύ x και x_0 σε αυτό το πλαίσιο αναφοράς. Αφού το x_0 βρίσκεται πάνω στην T , η (1.5.4) έχει την εξής φυσική ερμηνεία:

«Η O - απόσταση ενός γεγονότος x από έναν αδρανειακό παρατηρητή O , είναι ίση με το μισό του χρόνου που μετρά ο O μεταξύ της εκπομπής και της λήψης ενός φωτεινού σήματος που συνδέει τον O με το x ».

Αν x , x_0 και x_1 είναι τρία γεγονότα στο \mathcal{M} για τα οποία τα διανύσματα μετατόπισης $x - x_0$ και $x_1 - x$ είναι χωροειδή και ορθογώνια, τότε

$$S^2(x_1 - x_0) = S^2(x_1 - x) + S^2(x - x_0) \quad (1.5.5)$$

όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τον ορισμό του S και της Q και το γεγονός ότι τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια.

Αυτά που έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα είναι τα εξής:

Έστω v , w δύο μη μηδενικά διανύσματα στον \mathcal{M} με $v \cdot w = 0$.

- 1) Αν τα v , w είναι φωτοειδή, τότε πρέπει να είναι παράλληλα.
- 2) Αν το v είναι χωροειδές, τότε το w πρέπει να είναι χωροειδές.
- 3) Αν τα v και w είναι χωροειδή, τότε το ιδιομήκος ικανοποιεί το

Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$S^2(v + w) = S^2(v) + S^2(w)$$

1.6 Σχέσεις αιτιολογίας

Ξεκινάμε ορίζοντας δύο σχέσεις διάταξης \ll και $<$ στο \mathcal{M} ως εξής:

Για x, y στο \mathcal{M} , λέμε ότι το x **προηγείται χρονολογικά** του y , και γράφουμε $x \ll y$, αν το $y - x$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, δηλαδή αν το $y \in C_T^+(x)$. Επίσης θα λέμε ότι το x **προηγείται αιτιολογικά** του y και θα γράφουμε $x < y$, αν το $y - x$ είναι φωτοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, δηλαδή αν το $y \in C_N^+(x)$.

Και οι δύο σχέσεις ονομάζονται **σχέσεις αιτιολογίας**, γιατί εγκαθιστούν μια αιτιολογική σύνδεση μεταξύ των δύο γεγονότων, με την έννοια ότι το γεγονός x μπορεί να επηρεάσει το γεγονός y , είτε με τη διάδοση κάποιου υλικού φαινομένου αν $x \ll y$, είτε κάποιου ηλεκτρομαγνητικού αποτελέσματος αν $x < y$.

Η \ll είναι μεταβατική αφού αν $x \ll y$ και $y \ll z$ τότε το $y - x$ και το $z - y$ είναι χρονοειδή και μελλοντικά κατευθυνόμενα, άρα και το άθροισμά τους είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, δηλαδή το $z - x = (z - y) + (y - x)$, άρα $z \ll x$. Όμως, αν $x < y$ και $y < z$, το $z - x$ δεν είναι απαραίτητα φωτοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, αφού

$$\begin{aligned} Q(z - x) &= Q[(z - y) + (y - x)] = Q(z - y) + Q(y - x) + 2g(z - y, y - x) \\ &= 0 + 0 + 2g(z - y, y - x) \neq 0 \end{aligned}$$

(γενικά, εκτός αν τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια).

Έχει ενδιαφέρον επίσης ότι καθεμιά από τις σχέσεις μπορεί να εκφραστεί με όρους της άλλης.

Λήμμα 21: Για διακριτά σημεία x και y στο \mathcal{M} , $x < y$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} x \not\ll y & \text{και} \\ y \ll z \end{cases} \Rightarrow x \ll z$$

Απόδειξη: Έστω $x < y$. Τότε $Q(x - y) = 0$, άρα το x δεν προηγείται χρονολογικά του y ($x \not\ll y$). Επιπλέον, αν $y \ll z$, τότε το $z - y$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο. Αφού το $y - x$ είναι φωτοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, από το Λήμμα 15 έπεται ότι το

$$z - x = (z - y) + (y - x)$$

είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, δηλαδή $x \ll z$.

Για το αντίστροφο θα υποθέσουμε ότι $x \not\ll y$ και θα δείξουμε ότι είτε $x \ll y$ είτε ότι υπάρχει $z \in \mathcal{M}$ με $y \ll z$ και $x \not\ll z$.

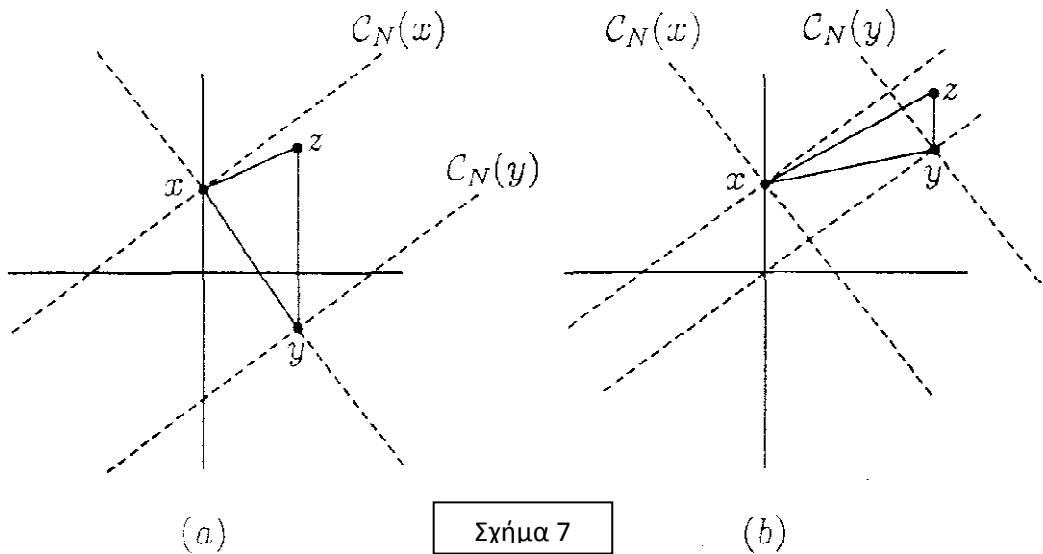
Αν $x \not\ll y$ και $x \not\ll y$, τότε το $y - x$ είναι είτε χρονοειδές και παρελθοντικά κατευθυνόμενο είτε φωτοειδές παρελθοντικά κατευθυνόμενο, είτε χωροειδές.

Στην πρώτη περίπτωση, κάθε z με $x < z$ έχει την ιδιότητα το

$$z - y = (z - x) + (x - y)$$

να είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο (Λήμμα 15), άρα $y \ll z$ αλλά $x \not\ll z$.

Τελικά υποθέτουμε ότι το $y - x$ είναι είτε φωτοειδές και παρελθοντικά κατευθυνόμενο, είτε χωροειδές (δες σχήμα 7 (α) ή (β) αντίστοιχα).



Σε κάθε περίπτωση παράγεται ένα z στο \mathcal{M} με $y \ll z$, αλλά $x \not\ll z$ με τον ίδιο τρόπο.

Σταθεροποιούμε μια αδρανειακή βάση $\{e_a\}$ για το \mathcal{M} με $x = x^a e_a$ και $y = y^a e_a$. Αν $y - x$ είναι φωτοειδές και παρελθοντικά κατευθυνόμενο, τότε $x^4 - y^4 > 0$. Αν $y - x$ είναι χωροειδές, μπορούμε να εκλέξουμε τη βάση έτσι ώστε πάλι $x^4 - y^4 > 0$. Τώρα, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ ορίζουμε $z_n \in \mathcal{M}$ με

$$z_n = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3 + (y^4 + \frac{1}{n}) e_4$$

Τότε το $z_n - y = \frac{1}{n} e_4$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο, άρα $y \ll z_n$ για κάθε n . Όμως

$$\begin{aligned} Q(z_n - x) &= [(z_n - y) + (y - x)]^2 \\ &= Q(z_n - y) + 2(z_n - y)(y - x) + Q(y - x) \\ &= -\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}(x^4 - y^4) + Q(y - x) \\ &= Q(y - x) + \frac{1}{n}[2(x^4 - y^4) + \frac{1}{n}] \end{aligned}$$

Αφού $Q(y - x) \geq 0$ και $2(x^4 - y^4) > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε το n κατάλληλα μεγάλο, ώστε $Q(z_n - x) > 0$. Γι αυτό το n , το $z = z_n$ ικανοποιεί την $y \ll z$ αλλά $x \not\ll z$.

Όμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι για διακεκριμένα γεγονότα x και y του \mathcal{M}

$$x \ll y \text{ αν και μόνο αν } \begin{cases} x \not\ll y \text{ και} \\ x < z < y \text{ για κάποιο } z \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Μια απεικόνιση $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ καλείται ένας **αιτιολογικός (causal) αυτομορφισμός** αν είναι 1-1, επί και οι F και F^{-1} διατηρούν τη σχέση $<$, δηλαδή $x < y \Leftrightarrow F(x) < F(y)$.

Παρατηρήσεις

- 1) Η F δεν απαιτείται να είναι γραμμική ή συνεχής.
- 2) Προφανώς η F είναι αιτιολογικός αυτομορφισμός αν διατηρεί την \ll , όπως φαίνεται από το Λήμμα 21.

Σκοπεύουμε στη συνέχεια να δώσουμε μια απόδειξη του εκπληκτικού αποτελέσματος του Zeeman στο οποίο αναφερθήκαμε στην εισαγωγή. Για τη διατύπωση του θεωρήματος ορίζουμε μια **παράλληλη μετατόπιση** (translation) του \mathcal{M} να είναι μια απεικόνιση $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ του τύπου $T(v) = v + v_0$ για κάποιο σταθερό $v_0 \in \mathcal{M}$ και μια **διαστολή** (dilation) να είναι μια απεικόνιση $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $K(v) = kv$, για κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό k .

Ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, θα λέγεται **ορθόχρονος** (orthochronous), αν $x \cdot Lx < 0$ για κάθε χρονοειδές ή φωτοειδές μη μηδενικό x .

Λήμμα 22: Κάθε παράλληλη μετατόπιση, διαστολή, ορθόχρονος ορθογώνιος μετασχηματισμός ή κάθε σύνθεση τέτοιων απεικονίσεων είναι ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός.

Απόδειξη:

Έστω $x < y$. Τότε $Tx = x + v_0$, $Ty = y + v_0$, άρα το $Ty - Tx = y - x$ είναι φωτοειδές και μελλοντικά κατευθυνόμενο άρα η T διατηρεί την $<$ και επομένως είναι ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός. Όμοια είναι $Ky - Kx = k(y - x)$ και επομένως $Q(Ky - Kx) = k^2 Q(y - x) = 0$, δηλαδή $Kx < Ky$. Τέλος, αν $x \cdot Lx < 0$ και $y \cdot Ly < 0$ τότε $Q(Ly - Lx) = Q(Ly) + Q(Lx) - 2LyLx = Q(y) + Q(x) - 2LyLx = 0$.

(Από το Λήμμα 4, κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός διατηρεί την τετραγωνική μορφή, δηλαδή $Q(Lx) = Q(x)$).

Θεώρημα 23: Έστω $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός του \mathcal{M} . Τότε, υπάρχει ένας ορθόχρονος ορθογώνιος μετασχηματισμός $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, μια μεταφορά $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ και μια διαστολή $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ τέτοιες ώστε $F = T \circ K \circ L$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε μια πεντάδα λημμάτων την οποία παρουσιάζουμε ευθύς αμέσως.

Λήμμα 23α: Ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ απεικονίζει ακτίνες φωτός σε ακτίνες φωτός. Ειδικότερα, αν $x < y$ και $R_{x,y}$ είναι η ακτίνα φωτός διαμέσου του x και y , τότε $F(R_{x,y}) = R_{F(x),F(y)}$.

Απόδειξη:

Αφού οι F και F^{-1} διατηρούν την $<$, η F απεικονίζει φωτοειδείς κώνους σε φωτοειδείς κώνους και επομένως ισχύουν $F(C_N(x)) = C_N(F(x))$ και $F(C_N(y)) = C_N(F(y))$. Από το θεώρημα 3, $R_{x,y} = C_N(x) \cap C_N(y)$ και $R_{F(x),F(y)} = C_N(F(x)) \cap C_N(F(y))$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} F(R_{x,y}) &= F(C_N(x) \cap C_N(y)) \\ &= F(C_N(x)) \cap F(C_N(y)) \\ &= C_N(F(x)) \cap C_N(F(y)) \\ &= R_{F(x),F(y)} \end{aligned}$$

Λήμμα 23β: Ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ απεικονίζει παράλληλες ακτίνες φωτός σε παράλληλες ακτίνες φωτός.

Απόδειξη:

Έστω R_1 και R_2 δύο διακεκριμένες παράλληλες ακτίνες φωτός στο \mathcal{M} και P ένα (2-διάστατο) επίπεδο που τις περιέχει. Κάθε επίπεδο στο \mathcal{M} είναι μια παράλληλη μετατόπιση ενός επιπέδου διαμέσου της αρχής που περιέχει 0, 1 ή 2 ανεξάρτητα φωτοειδή διανύσματα (εξαρτάται από το αν το επίπεδο είναι εξ ολοκλήρου εκτός του φωτοειδούς κώνου, αν είναι εφαπτόμενο σε αυτούς τους φωτοειδείς κώνους, ή αν τέμνεται από όλους τους χρονικούς κώνους του). Όμως, μόνο οι δύο τελευταίες περιπτώσεις σχετίζονται με το P .

Υποθέτουμε αρχικά ότι το P περιέχει δύο ανεξάρτητες φωτοειδείς κατευθύνσεις. Τότε, περιέχει δύο οικογένειες $\{R_a\}$ και $\{S_b\}$ ακτινών φωτός με όλα τα R_a παράλληλα στα R_1 και R_2 και όλα τα S_b παράλληλα σε κάποια ακτίνα φωτός η οποία τέμνει και τις δύο ακτίνες R_1 και R_2 . Έτσι οι οικογένειες $\{F(R_a)\}$ και $\{F(S_b)\}$ είναι δύο οικογένειες ακτινών φωτός στο \mathcal{M} με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Οι $F(R_a)$ δεν τέμνονται ανά ζεύγη.

2. Οι $F(S_b)$ δεν τέμνονται ανά ζεύγη.

3. Κάθε $F(R_a)$ τέμνει κάθε $F(S_b)$.

Για να δείξουμε ότι τα $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλα, αρκεί (αφού δεν τέμνονται) να δείξουμε ότι είναι συνεπίπεδα. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Τότε οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ εκτείνονται σε κάποιον 3-διάστατο ομοπαράλληλο (affine) υπόχωρο R^3 του \mathcal{M} . Αφού, κάθε $F(S_b)$ τέμνει και τις δύο $F(R_1)$ και $F(R_2)$, πρέπει να βρίσκεται και αυτό στο R^3 . Έτσι, από την παραπάνω ιδιότητα 3, όλες οι $F(R_a)$ περιέχονται στο R^3 . Ισχυριζόμαστε ότι, σαν αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος, καμία $F(R_a)$ δεν μπορεί να είναι συνεπίπεδη είτε με την $F(R_1)$ είτε με την $F(R_2)$ (εκτός εάν $a=1$ ή $a=2$). Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι κάποια $F(R_a)$ ήταν συνεπίπεδη, έστω η $F(R_1)$. Κάθε $F(S_b)$ τέμνει τις $F(R_a)$ και $F(R_1)$ άρα εκτείνεται σε αυτό το επίπεδο. Αφού η $F(R_2)$ δεν εκτείνεται (εξ υποθέσεως) σε αυτό το επίπεδο, μπορεί να το τέμνει σε ένα το πολύ σημείο. Έτσι, η $F(R_2)$ τέμνει το πολύ μία από τις $F(S_b)$ και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω ιδιότητα 3. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε μια $F(R_3)$ έτσι, ώστε δύο από τις $\{F(R_1), F(R_2), F(R_3)\}$ να μην είναι συνεπίπεδες. Αφού η $\{F(S_b)\}$ είναι τότε η οικογένεια των ευθειών στο R^3 , η οποία τέμνει όλες τις $\{F(R_1), F(R_2), F(R_3)\}$, είναι η οικογένεια των γενετειρών για ένα υπερβολοειδές ενός κώνου στο R^3 . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $\{F(R_a)\}$ είναι μια άλλη οικογένεια γενετειρών αυτού του υπερβολοειδούς. Όμως τότε κάθε $F(R_a)$ θα πρέπει να είναι παράλληλο με κάποιο $F(S_b)$ γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω ιδιότητα 3.

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση στην οποία το P περιέχει μόνο μία ανεξάρτητη φωτεινή κατεύθυνση (και επομένως είναι εφαπτόμενο σε κάθε έναν από τους μηδενικούς κώνους). Για οποιοδήποτε σημείο στο \mathcal{M} υπάρχει μια ακτίνα φωτός διαμέσου του σημείου αυτού παράλληλη και στα δύο R_1 και R_2 . Αφού το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο του R_1 είναι (μόνο) 3-διάστατο και αφού το ίδιο ισχύει και για το R_2 , μπορούμε να επιλέξουμε μια φωτεινή ακτίνα R_3 παράλληλη και στις δύο ακτίνες R_1 και R_2 που να μην ανήκει σε κανένα από τα δύο εφαπτόμενα επίπεδα. Έτσι, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, βρίσκει εφαρμογή και για τις ακτίνες R_1 και R_3 , καθώς και για το ζευγάρι R_2, R_3 . Συνεπώς, οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι και οι δύο παράλληλες στην $F(R_3)$ και επομένως είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Έστω $R_{x,y} = \{x + r(y - x) : r \in \mathfrak{R}\}$ μια ακτίνα φωτός και $F(R_{x,y}) = \{F(x) + s(F(y) - F(x)) : s \in \mathfrak{R}\}$ η εικόνα του μέσω της F . Θεωρούμε το s ως μια συνάρτηση

του $r: s = f(r)$. Το επόμενο ζήτημα που θα μας απασχολήσει, είναι να δείξουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι γραμμική, δηλαδή ότι $f(r + t) = f(r) + f(t)$ και $f(tr) = tf(r)$ για κάθε $r, t \in \mathbb{R}$.

Μια απεικόνιση $g : R_{x,y} \rightarrow R_{x,y}$ λέγεται **παράλληλη μετατόπιση** (translation) της $R_{x,y}$, αν υπάρχει ένα σταθερό $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(x + r(y - x)) = x + (r + t)(y - x)$$

για κάθε $r \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η παράλληλη μετατόπιση g της R **ανυψώνεται** (lifts to) στην $F(R)$, αν υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση $e : F(R) \rightarrow F(R)$ όπως αυτή που δείχνει το διάγραμμα, δηλαδή τέτοια ώστε $F \circ g = e \circ F$.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \longrightarrow & \\ R & & F(R) \\ g \downarrow & & \downarrow e \\ & F & \\ R & & F(R) \end{array}$$

Θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα, όλες οι παράλληλες μετατοπίσεις της R ανυψώνονται στην $F(R)$.

Λήμμα 23γ: Έστω R μια ακτίνα φωτός, $g : R \rightarrow R$ μια παράλληλη μετατόπιση της R και $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός. Τότε, η g ανυψώνεται σε μια παράλληλη μετατόπιση e της $F(R)$.

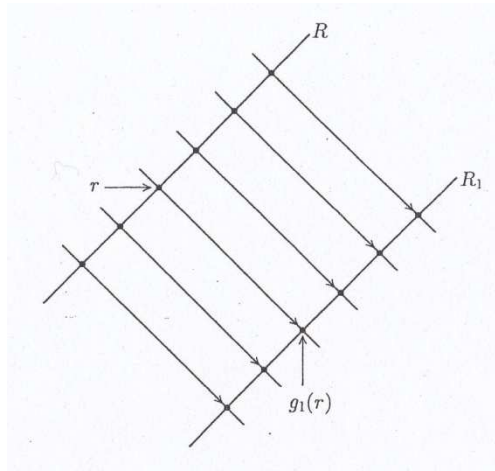
Απόδειξη:

Για την απόδειξη θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια παράλληλων μετατοπίσεων του R που ξεκάθαρα υψώνονται και μετά θα αποδείξουμε ότι αυτή η οικογένεια εξαντλεί όλες τις παράλληλες μετατοπίσεις του R .

Επιλέγουμε μια ακτίνα φωτός R_1 παράλληλη στην R και τέτοια ώστε το επίπεδο των R και R_1 να περιέχει δύο ανεξάρτητες φωτοειδείς κατευθύνσεις. Αυτό το επίπεδο όμως περιέχει μια οικογένεια $\{S_b\}$ από παράλληλες ακτίνες φωτός που τέμνουν τις R και R_1 . Η οικογένεια $\{S_b\}$ όμως καθορίζει μια προφανή παράλληλη απεικόνιση μετατόπισης g_1 του R στο R_1 (σχήμα 8). Αφού η F μεταφέρει παράλληλες ακτίνες φωτός σε παράλληλες ακτίνες φωτός, υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση e_1 του $F(R)$ στο $F(R_1)$ για την οποία το παρακάτω διάγραμμα αντιμετωπίζεται.

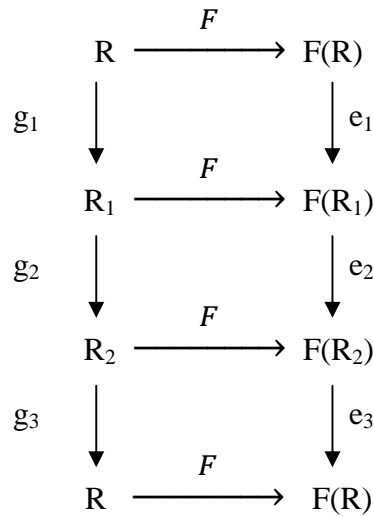
$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \longrightarrow & \\ R & & F(R) \\ g_1 \downarrow & & \downarrow e_1 \\ & F & \\ R_1 & & F(R_1) \end{array}$$

Τώρα επιλέγουμε μια ακτίνα φωτός R_2 παράλληλη στην R_1 (και επομένως στην R) τέτοια ώστε τα επίπεδα των R_1 και R_2 και των R και R_2 να περιέχουν και τα δύο από δύο ανεξάρτητες μηδενικές κατευθύνσεις.

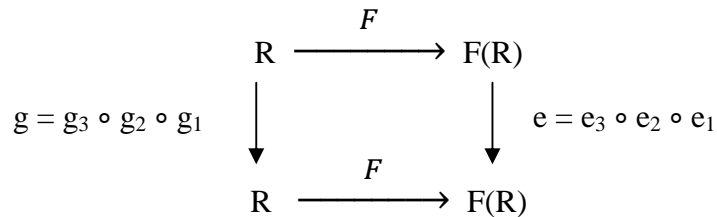


Σχήμα 8

Κατασκευάζουμε τις g_2, e_2 και τις g_3, e_3 όπως πριν έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμετατίθεται.



Τώρα συνθέτουμε τα παραπάνω και παίρνουμε το διάγραμμα:



Παρατηρείστε ότι αν οι R, R_1 και R_2 ήταν όλες συνεπίπεδες, τότε οι g και e θα έπρεπε απαραίτητως να ήταν και οι δύο η ταυτοτική απεικόνιση. Αφού είναι g και e , που είναι συνθέσεις των παράλληλων μετατοπίσεων, είναι παράλληλες μετατοπίσεις των R και $F(R)$, αντίστοιχα. Συνεπώς, οποιαδήποτε παράλληλη μετατόπιση g του R κατασκευασμένη με αυτόν τον τρόπο ως σύνθεση τριών τέτοιων παράλληλων μετατοπίσεων ανυψώνεται στο $F(R)$.

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν μπορούσαμε να δείξουμε ότι για κάποια συγκεκριμένη ακτίνα φωτός R' , κάθε παράλληλη μετατόπιση της R' πραγματοποιείται ως σύνθεση τέτοιων μετατοπίσεων. Πράγματι, αν αυτό αποδειχθεί για κάποια ακτίνα R' , μπορούμε να δείξουμε ότι είναι επίσης αληθές και για το R ως εξής:

Επιλέγουμε μια σύνθεση G μιας παράλληλης μετατόπισης και ενός ορθόχρονου ορθογώνιου μετασχηματισμού που μεταφέρει την R στην R' (θα πρέπει εδώ να πιστέψετε ότι αυτό μπορεί να γίνει ή αλλιώς δείτε το θεώρημα XXX). Αφού η G είναι αφινική, μια παράλληλη μετατόπιση g του R ανυψώνεται σε μια παράλληλη μετατόπιση $g' = G \circ g \circ G^{-1}$ του R' . Αντικαθιστούμε τώρα το g' ως μια σύνθεση $g' = g_3' \circ g_2' \circ g_1'$ παράλληλων μετατοπίσεων, όπως παραπάνω. Τότε

$$g = G^{-1} \circ g_3' \circ g_2' \circ g_1' \circ G = (G^{-1} \circ g_3' \circ G) \circ (G^{-1} \circ g_2' \circ G) \circ (G^{-1} \circ g_1' \circ G)$$

Επιπλέον, αφού οι G, G^{-1} είναι αιτιολογικοί αυτομορφισμοί και επομένως διατηρούν τις παράλληλες ακτίνες φωτός από το λήμμα 23β, μπορούμε να παράγουμε μια ανάλυση

$$R = G^{-1}(R') \xrightarrow{g_1} G^{-1}(R_1') \xrightarrow{g_2} G^{-1}(R_2') \xrightarrow{g_3} G^{-1}(R') = R$$

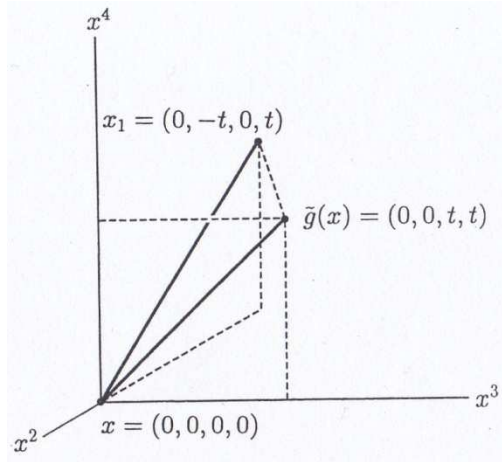
του g σε μια σύνθεση παράλληλων μετατοπίσεων $g_i = G^{-1} \circ g_i' \circ G$, όπως ήταν το ζητούμενο.

Η συγκεκριμένη ακτίνα φωτός στην οποία επιλέγουμε να εστιάσουμε την προσοχή μας λαμβάνεται ως εξής: Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε μια αδρανειακή βάση $\{e_a\}$ και έστω R' η ακτίνα φωτός που περνάει από τα σημεία $x = (0, 0, 0, 0)$ και $y = (0, 0, 1, 1)$. Τώρα, θεωρούμε μια παράλληλη μετατόπιση g' του R' που ορίζεται από τη σχέση $g'(x + r(y - x)) = g'(0, 0, r, r) = (0, 0, r + t, r + t)$. Συγκεκριμένα η g' μεταφέρει το $x = (0, 0, 0, 0)$ στο $g'(x) = (0, 0, t, t)$.

Έστω $x_1 = (0, -t, 0, -t)$ και $x_2 = (0, 0, 0, 2t)$ και παίρνουμε R'_1 και R'_2 να είναι ακτίνες φωτός παράλληλες στην R' που να διέρχονται από τα x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι οι επιθυμητές παράλληλες μετατοπίσεις g'_1, g'_2 , και g'_3 καθορίζονται και μάλιστα ότι

$$x \xrightarrow{g'_1} x_1 \xrightarrow{g'_2} x_2 \xrightarrow{g'_3} g'(x) \quad (1.6.1)$$

έτσι ώστε $g'(x) = (g'_3 \circ g'_2 \circ g'_1)(x)$. Αφού το $g'_3 \circ g'_2 \circ g'_1$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση του R' , που συμπίπτει με τη g' στο $x = (0, 0, 0, 0)$, τότε $g' = g'_3 \circ g'_2 \circ g'_1$. Όλες οι επαληθεύσεις στην (1.6.1) είναι ίδιες και έτσι τις δείχνουμε μόνο από το ότι



Σχήμα 9

$g'_1(x) = x_1$ (σχήμα 9).

Παρατηρήστε ότι το επίπεδο που σχηματίζεται από τις R' και R'_1 μπορεί να περιέχει το πολύ 2 οικογένειες παράλληλων ακτινών φωτός. Οι ακτίνες φωτός που είναι παράλληλες στο R' (και στο R'_1) αποτελούν μια τέτοια οικογένεια. Από τη στιγμή που η γραμμή η οποία ενώνει τα x και x_1 είναι επίσης μηδενική και μη παράλληλη στην R' πρέπει να ανήκει στη δεύτερη οικογένεια. Οπότε η g'_1 υπάρχει και, προφανώς, $g'_1(x) = x_1$.

Με το λήμμα 23γ μπορούμε να δείξουμε ότι ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός είναι γραμμικός πάνω σε κάθε ακτίνα φωτός. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε ότι:

Λήμμα 23δ : Έστω $R = \{x + r(y - x) : x < y, r \in \mathbb{R}\}$ μια ακτίνα φωτός, $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός και $F(R) = \{F(x) + s(F(y) - F(x)) : s \in \mathbb{R}\}$ η εικόνα της R μέσω της F . Τότε, θεωρώντας το s ως συνάρτηση του r , έστω $s = f(r)$, έχουμε $f(r + t) = f(r) + f(t)$ και $f(t \cdot r) = t \cdot f(r)$ για κάθε r και t στο \mathbb{R} .

Απόδειξη:

Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Τώρα, σταθεροποιούμε ένα t στο \mathbb{R} . Θέλουμε να δείξουμε ότι, για οποιοδήποτε r στο \mathbb{R} , $f(r + t) = f(r) + f(t)$, δηλαδή, ότι

$$F(x + (r + t)(y - x)) = F(x) + (f(r) + f(t))(F(y) - F(x)) \quad (1.6.2)$$

Έστω η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που εκτείνει την παράλληλη μετατόπιση του R κατά t , δηλαδή, $g(x + r(y - x)) = x + (r + t)(y - x)$. Από το λήμμα 23γ, υπάρχει μια

παράλληλη μετατόπιση $e: F(\mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R})$ του $F(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $F \circ g = e \circ F$. Ας υποθέσουμε ότι η e είναι η παράλληλη μετατόπιση του $F(\mathbb{R})$ κατά $u = u(t)$, δηλαδή, ότι $e(F(x) + s(F(y) - F(x))) = F(x) + (s + u(t))(F(y) - F(x))$. Τότε

$$\begin{aligned} F(x + (r + t)(y - x)) &= F(g(x + r(y - x))) \\ &= F \circ g(x + r(y - x)) \\ &= e \circ F(x + r(y - x)) \\ &= e(F(x) + f(r)(F(y) - F(x))) \\ &= F(x) + [f(r) + u(t)](F(y) - F(x)) \end{aligned}$$

οπότε $f(r + t) = f(r) + u(t)$ για κάθε r . Θέτοντας $r = 0$ παίρνουμε $f(t) = f(0) + u(t) = u(t)$ οπότε παίρνουμε το $f(r + t) = f(r) + f(t)$ που θέλουμε.

Ειδικότερα, είναι $f(2r) = f(r+r) = 2f(r)$ και επομένως επαγωγικά βρίσκουμε ότι $f(nr) = nf(r)$ για $n = 0, 1, 2, \dots$. Επιπλέον, $f(r) = f(-r + 2r) = f(-r) + 2f(r)$ άρα $f(-r) = -f(r)$ και (πάλι με επαγωγή) $f(nr) = nf(r)$ για $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Αν m είναι επίσης ένας ακέραιος και n ένας μη μηδενικός ακέραιος, είναι $nf(\frac{m}{n}r) = f(mr) = mf(r)$ άρα $f(\frac{m}{n}r) = \frac{m}{n}f(r)$. Επομένως, $f(tr) = tf(r)$ για κάθε ρητό αριθμό t . Τέλος, παρατηρούμε ότι, αφού η F διατηρεί την σχέση $<$ στο \mathcal{M} , η f διατηρεί τη $<$ στο \mathbb{R} και γι αυτό είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Επειδή κάθε πραγματικός αριθμός t είναι το όριο μιας σειράς από διαδοχικούς πραγματικούς αριθμούς, βρίσκουμε ότι $f(tr) = tf(r)$ για κάθε t στο \mathbb{R} και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Από το λήμμα 23δ συμπεραίνουμε ότι αν $R_{x,y} = \{x + r(y - x) : r \in \mathbb{R}\}$ είναι μια ακτίνα φωτός και F ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός, τότε υπάρχει μια μη μηδενική σταθερά k , που ονομάζεται **συντελεστής επέκτασης** του F στο $R_{x,y}$, τέτοια ώστε $F(R_{x,y}) = \{F(x) + kr(F(y) - F(x)) : r \in \mathbb{R}\}$.

Λήμμα 23ε : Έστω $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός. Τότε η F είναι μια αφινική απεικόνιση, δηλαδή η σύνθεσή του με κάποια παράλληλη μετατόπιση του \mathcal{M} (πιθανόν την ταυτοτική) είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

Απόδειξη:

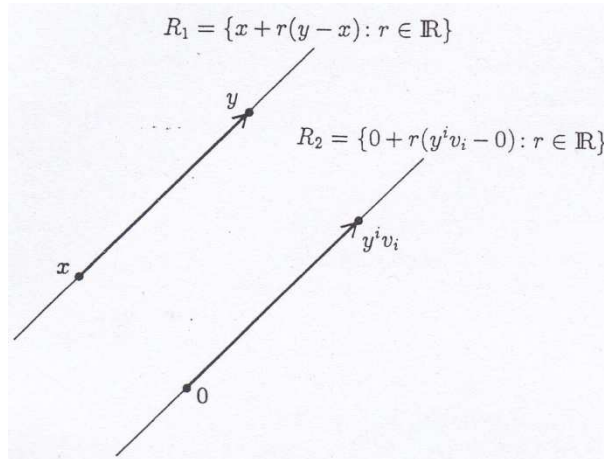
Αρχικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $F(0) = 0$, αρκεί να συνθέσουμε την F με μια κατάλληλη παράλληλη μετατόπιση και έτσι το πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι η F είναι γραμμική (η σύνθεση ενός αιτιολογικού αυτομορφισμού και μιας παράλληλης μετατόπισης είναι ξεκάθαρα ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός).

Επιλέγουμε μια βάση (v_1, v_2, v_3, v_4) για το \mathcal{M} που αποτελείται από φωτεινά διανύσματα. Προσδιορίζουμε την απεικόνιση $G: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ με

$$G(y) = G\left(\sum_{i=1}^4 y^i v_i\right) = \sum_{i=1}^4 y^i F(v_i) \quad \text{για κάθε } y = \sum_{i=1}^4 y^i v_i$$

(για το υπόλοιπο αυτής της απόδειξης δεν θα χρησιμοποιούμε την αθροιστική σύμβαση αλλά το σύμβολο Σ , όπου εννοείται άθροιση). Η G είναι προφανώς γραμμική και θα δείξουμε ότι η F είναι γραμμική δείχνοντας, στην πραγματικότητα, ότι $F = G$. Για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$ θέτουμε το \mathcal{M}_i να προσδιορίζει τον υπόχωρο του \mathcal{M} που παράγεται από τα $\{v_j : j \leq i\}$. Έτσι το \mathcal{M}_1 είναι μια ακτίνα φωτός και το \mathcal{M}_4 είναι όλο το \mathcal{M} . Αποδεικνύουμε ότι η $F|_{\mathcal{M}_i} = G|_{\mathcal{M}_i}$, για όλα τα $i = 1, 2, 3, 4$.

Για $i = 1$ είναι προφανές αφού $F(v_1) = G(v_1)$ και από το λήμμα 23δ, η F είναι γραμμική στον \mathcal{M}_1 . Τώρα υποθέτουμε ότι $i = 2, 3$, ή 4 και ότι $F|_{\mathcal{M}_{i-1}} = G|_{\mathcal{M}_{i-1}}$. Από αυτό δείχνουμε ότι $F|_{\mathcal{M}_i} = G|_{\mathcal{M}_i}$ ως εξής: Κάθε y στο \mathcal{M}_i μπορεί να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο ως $y = x + y^i v_i$, όπου το x είναι στο \mathcal{M}_{i-1} και δεν εννοείται άθροισμα ως προς i στο $y^i v_i$. Έτσι, το $y - x = y^i v_i$ είναι μηδενικό, αφού και v_i είναι φωτεινά. Θεωρούμε 2 ακτίνες φωτός, η πρώτη (R_1) περνάει από τα x και y και η δεύτερη (R_2) από τα 0 και $y^i v_i$ (βλέπε σχήμα 10). Οι R_1 και R_2 είναι παράλληλες και



Σχήμα 10

επομένως και οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλες σύμφωνα με το λήμμα 23β. Επιπλέον, αν οι συντελεστές επέκτασης του F στις R_1 και R_2 δεν ήταν ίδιοι, τότε οι εικόνες των ακτίνων φωτός στο F που τέμνουν και την R_1 και την R_2 δεν θα ήταν παράλληλες (σε περίπτωση που δεν υπάρχει τέτοια οικογένεια χρησιμοποιούμε μια τρίτη ακτίνα φωτός R_3 όπως και στην απόδειξη του λήμματος 23β). Συνεπώς, υπάρχει ένας μη μηδενικός αριθμός k τέτοιος ώστε :

$$F(R_1) = \{F(x) + kr(F(y) - F(x)) : r \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\begin{aligned} F(R_2) &= \{F(0) + kr(F(y^i v_i) - F(0)) : r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{0 + kr(F(y^i v_i) - 0) : r \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Επειδή οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλες και για $r = 0$ παίρνουμε $F(R_2) = 0$ και $F(R_1) = F(x)$, η παράλληλη μετατόπιση του $F(R_2)$ κατά $F(x)$ δίνει $F(R_1)$.

Για $r = 1$ αυτό δίνει

$$F(x) + [0 + k(F(y^i v_i) - 0)] = F(x) + k(F(y) - F(x)),$$

δηλαδή,

$$F(y^i v_i) = F(y) - F(x).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x) + F(y^i v_i) \\ &= G(x) + F(y^i v_i) \quad , \quad \text{αφού το } x \in \mathcal{M}_{i-1} \\ &= G(x) + y^i F(v_i) \quad , \quad \text{από λήμμα 23δ} \\ &= G(x) + y^i G(v_i) \\ &= G(x) + G(y^i v_i) \quad , \quad \text{από τη γραμμικότητα της } G \\ &= G(x + y^i v_i) \\ &= G(y) \end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Απόδειξη του θεωρήματος 23:

Σύμφωνα με το λήμμα 23ε, υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση, $T^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, τέτοια ώστε η $T^{-1} \circ F$ να είναι γραμμική. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειάζεται να παράγουμε μια θετική σταθερά $\frac{1}{k}$ τέτοια ώστε η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$ να διατηρεί την τετραγωνική μορφή στο \mathcal{M} . Γι αυτό, από το λήμμα 4, η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$ είναι ένας (αναγκαστικά ορθόχρονος) ορθογώνιος μετασχηματισμός L . Συμβολίζοντας με K τη διαστολή $K(v) = kv$ και με L την $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$, όμως παίρνουμε ότι $F = T \circ L \circ K$ όπως θέλουμε.

Αφού οι δύο απεικονίσεις η $T^{-1} \circ F$ και η αντίστροφή της κάνουν μηδέν στο μηδέν και διατηρούν την $<$, η $T^{-1} \circ F$ μεταφέρει το μηδενικό κώνο $C_N(0)$ στον εαυτό του, δηλαδή $Q(x) = 0$ αν και μόνο αν $Q(T^{-1} \circ F(x)) = 0$. Αφού η $T^{-1} \circ F$ είναι γραμμική, οι $Q(x)$ και $Q(T^{-1} \circ F(x))$ είναι τετραγωνικές μορφές και, όπως έχουμε παρατηρήσει, έχουν τον ίδιο πυρήνα, δηλαδή μηδενίζονται από τα ίδια x . Αλλά δύο τετραγωνικές μορφές με τον ίδιο πυρήνα διαφέρουν το πολύ κατά μία πολλαπλασιαστική σταθερά (θεώρημα 14.10 του [K]) και έτσι υπάρχει μια σταθερά

k' έτσι ώστε $Q(x) = k' Q(T^{-1} \circ F(x))$, για όλα τα x . Αλλά η $T^{-1} \circ F$ είναι ένας αιτιολογικός αυτομορφισμός και επομένως διατηρεί τον άνω χρονοειδή κώνο. Συγκεκριμένα, $Q(x) < 0$ αν και μόνο αν $Q(T^{-1} \circ F(x)) < 0$, οπότε το k' πρέπει να είναι θετικό. Θέτοντας $k = (k')^{-1/2}$ έχουμε $Q(x) = Q(\frac{1}{k} T^{-1} \circ F(x))$ και συνεπώς η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$ διατηρεί την τετραγωνική μορφή του \mathcal{M} και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

1.7. Μετασχηματισμοί στροφής και η ομάδα Lorentz

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε μια καινούρια και πολύ ισχυρή τεχνική για την κατασκευή και την μελέτη των μετασχηματισμών Lorentz. Το βασικό εργαλείο είναι ένας συγκεκριμένος ομομορφισμός (που λέγεται «απεικόνιση spinor») από την ομάδα των 2×2 μιγαδικών πινάκων με μοναδιαία ορίζουσα στην ομάδα Lorentz \mathcal{L} . Με αυτόν θα αποκαλύψουμε μια αξιοπρόσεκτη σύνδεση μεταξύ των μετασχηματισμών Lorentz και των γνωστών κλασματικών γραμμικών μετασχηματισμών της μιγαδικής ανάλυσης. Αυτό, σε ανταπόδοση έχει να μας πει μερικά εντυπωσιακά πράγματα για την ομάδα Lorentz και το φαινόμενο της συστολής του μήκους.

Ξεκινάμε αναφέροντας μερικούς συμβολισμούς: Με $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των 2×2 πινάκων $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς. Χρησιμοποιώντας την άνω μπάρα για να συμβολίζουμε τον συζυγή⁶ ενός μιγαδικού αριθμού, ο **ανάστροφος συζυγής** A^* του A ορίζεται ως ο $A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$. Ένας πίνακας $H \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ λέγεται **Ερμιτιανός** αν $H^* = H$ και θα συμβολίζουμε με \mathcal{H}_2 το σύνολο αυτών των πινάκων.

Πρόταση 24: Κάθε Ερμιτιανός πίνακας $H \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$H = \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix} \quad (1.7.1)$$

όπου οι x_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Μάλιστα, η αναπαράσταση (1.7.1) είναι ισοδύναμη με την

$$H = x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 + x^4 \sigma_4 \quad (1.7.2)$$

όπου σ_i , είναι οι πίνακες περιστροφής του Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και σ_4 είναι ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας.

Απόδειξη:

Πρέπει $H^* = H$, δηλαδή $\begin{bmatrix} \alpha_1 + ib_1 & \alpha_2 + ib_2 \\ \alpha_3 + ib_3 & \alpha_4 + ib_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - ib_1 & \alpha_3 - ib_3 \\ \alpha_2 - ib_2 & \alpha_4 - ib_4 \end{bmatrix}$, με $\alpha_i, b_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε όμως έχουμε (εξισώνοντας τα στοιχεία των δύο πινάκων):

$$\alpha_1 + ib_1 = \alpha_1 - ib_1 \quad \text{δηλαδή } b_1 = 0 \text{ και επομένως } \alpha_{11} \in \mathbb{R}$$

⁶ Συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + ib$ λέγεται ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = \alpha - ib$.

$\alpha_4 + i\beta_4 = \alpha_4 - i\beta_4$ δηλαδή $\beta_4 = 0$ και επομένως $\alpha_{22} \in \mathbb{R}$

$\alpha_2 + i\beta_2 = \alpha_3 - i\beta_3$ δηλαδή $\alpha_2 - \alpha_3 = i(\beta_2 + \beta_3)$, οπότε $\alpha_2 = \alpha_3$ και $\beta_2 = -\beta_3$, άρα οι α_{12} και α_{21} είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Επομένως ο πίνακας H παίρνει τη ζητούμενη μορφή αφού για δύο τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι

$$\alpha + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right) \text{ και } \alpha - \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right)$$

Η ισοδυναμία της έκφρασης (1.7.1) με την (1.7.2) είναι προφανής.

Ορίζουμε με $SL(2, \mathbb{C})$ το σύνολο όλων των πινάκων $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ με ορίζουσα 1. Το $SL(2, \mathbb{C})$ καλείται η **ειδική γραμμική ομάδα τάξης 2** και είναι πράγματι μια ομάδα πινάκων, η οποία είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή πινάκων. Τα στοιχεία της $SL(2, \mathbb{C})$ καλούνται συχνά μετασχηματισμοί στροφής. Κάθε πίνακας A στην $SL(2, \mathbb{C})$ αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση $M_A : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ που ορίζεται ως εξής: $M_A(H) = AHA^*$, για κάθε H στο \mathcal{H}_2 (το $M_A(H)$ ανήκει στο \mathcal{H}_2 , αφού $(AHA^*)^* = (A^*)^* H^* A^* = A H^* A^* = A H A^*$). Επιπλέον για την ορίζουσα του $M_A(H)$ είναι $\det(M_A(H)) = \det(AHA^*) = (\det A) (\det H) (\det A^*) = \det H$. Όμως η $M_A(H)$ μπορεί κατά μοναδικό τρόπο να γραφεί στη μορφή

$$M_A(H) = \begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} \quad (1.7.3)$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς \hat{x}^α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Υπολογίζοντας τις ορίζουσες στις (1.7.1) και (1.7.3) παίρνουμε την ισότητα

$$(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2 - (\hat{x}^4)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \quad (1.7.4)$$

Έτσι, η απεικόνιση $[x^\alpha] \rightarrow [\hat{x}^\alpha]$ ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix} A^* \quad (1.7.5)$$

η οποία είναι ξεκάθαρο ότι είναι γραμμική και ότι διατηρεί την τετραγωνική μορφή $\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$. Σύμφωνα με το λήμμα 4, ο πίνακας αυτής της απεικόνισης είναι ένας γενικός, ομογενής μετασχηματισμός Lorentz. Θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε

αυτόν τον πίνακα αποκλειστικά από τα στοιχεία του πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

Έστω $h_{11} = x^3 + x^4$, $h_{12} = x^1 + ix^2$, $h_{21} = x^1 - ix^2$, $h_{22} = -x^3 + x^4$, και αντίστοιχα θεωρούμε τα στοιχεία με καπέλο. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

το οποίο θα γράφουμε πιο συνοπτικά ως $[h_{ij}] = G[x^i]$ και όμοια για το $[\hat{h}_{ij}]$.

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε επίσης, υπολογίζοντας ακριβώς το γινόμενο AHA^* να δείξουμε ότι η ισότητα $M_A(H) = AHA^*$ είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} \\ \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} \\ \hat{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} & \beta\bar{\alpha} & \beta\bar{\beta} \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} & \gamma\bar{\beta} & \delta\bar{\alpha} & \delta\bar{\beta} \\ \gamma\bar{\gamma} & \gamma\bar{\delta} & \delta\bar{\gamma} & \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix}$$

την οποία γράφουμε πιο συνοπτικά ως

$$[\hat{h}_{ij}] = R_A[h_{ij}]$$

Συμπερασματικά, η απεικόνιση $[x^a] \rightarrow [\hat{x}^a]$ που ορίζεται από τη σχέση (1.7.5) δίνεται με βάση το διάγραμμα

$$[x^a] \xrightarrow{G} [h_{ij}] \xrightarrow{R_A} [\hat{h}_{ij}] \xrightarrow{G^{-1}} [\hat{x}^a] \quad (1.7.6)$$

και ο μετασχηματισμός Lorentz Λ_A που ορίζεται μέσω της (1.7.5) [ή της (1.7.6)] από τον A είναι ο $\Lambda_A = G^{-1} R_A G$.

Υπολογίζοντας ακριβώς τα στοιχεία του πίνακα Λ_A , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \Lambda^1_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma + \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta) & \Lambda^1_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta) \\ \Lambda^2_1 &= \frac{i}{2}(-\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta) & \Lambda^2_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\delta} - \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta) \\ \Lambda^3_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} + \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\delta) & \Lambda^3_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} - \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta) \\ \Lambda^4_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta) & \Lambda^4_2 &= \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} - \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\delta) \\ \Lambda^1_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\delta} - \bar{\beta}\delta) & \Lambda^1_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta) \\ \Lambda^2_3 &= \frac{i}{2}(-\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\delta} - \bar{\beta}\delta) & \Lambda^2_4 &= \frac{i}{2}(-\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta) \\ \Lambda^3_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) & \Lambda^3_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}) \\ \Lambda^4_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}) & \Lambda^4_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

Παρατηρούμε ότι το Λ^4_4 είναι θετικό και επομένως ο Λ_A είναι ορθόχρονος. Επιπλέον $\det \Lambda_A = \det(G^{-1} R_A G) = (\det G^{-1})(\det R_A)(\det G) = \det R_A$ και με απευθείας

υπολογισμό βρίσκουμε ότι $\det R_A = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma})^2 = 1$ και άρα ο Λ_A είναι κανονικός.

Η απεικόνιση $A \rightarrow \Lambda_A$ της $SL(2, \mathbb{C})$ στην \mathcal{L} λέγεται **απεικόνιση στροφής**. Παρατηρήστε ότι αν A και B δύο στοιχεία της ειδικής γραμμικής ομάδας τάξης 2, τότε

$$\Lambda_A \Lambda_B = (G^{-1} R_A G)(G^{-1} R_B G) = G^{-1} (R_A R_B) G \quad (1.7.8)$$

Όμως, αφού $M_{AB}(H) = (AB) H (AB)^* = A B H B^* A^* = A(B H B^*)A^* = M_A(B H B^*) = M_A \circ M_B(H)$ συμπεραίνουμε ότι $M_{AB} = M_A \circ M_B$ και επομένως $R_{AB} = R_A R_B$. Έτσι, η (1.7.8) δίνει ότι $\Lambda_A \Lambda_B = G^{-1} R_{AB} G$ και έτσι

$$\Lambda_A \Lambda_B = \Lambda_{AB} \quad (1.7.9)$$

Επομένως, η απεικόνιση στροφής διατηρεί τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλαδή, είναι μια ομάδα ομομορφισμών της $SL(2, \mathbb{C})$ στην \mathcal{L} . Δεν είναι 1-1 αφού από την (1.7.7) φαίνεται ότι οι A και $-A$ έχουν την ίδια εικόνα στην \mathcal{L} . Στην πραγματικότητα, θεωρούμε ότι είναι ακριβώς «δύο προς ένα», δηλαδή, ότι αν A και B είναι στοιχεία της $SL(2, \mathbb{C})$ και $\Lambda_A = \Lambda_B$, τότε $A = \pm B$. Για να το δούμε αυτό ας θεωρήσουμε ότι ο AB^{-1} ανήκει στην $SL(2, \mathbb{C})$ και, αφού η απεικόνιση στροφής είναι ένας ομομορφισμός, είναι $\Lambda_{AB^{-1}} = \Lambda_A \Lambda_{B^{-1}} = \Lambda_A (\Lambda_B)^{-1} = \Lambda_A (\Lambda_A)^{-1} = I_4$ (όπου I_4 ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας).

Πρόταση 25: Για κάθε πραγματικό αριθμό θ , ορίζουμε τον 2×2 πίνακα $A(\theta)$ με

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} & -\sinh \frac{\theta}{2} \\ -\sinh \frac{\theta}{2} & \cosh \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι ο $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{C})$ και ότι

$$\Lambda_{A(\theta)} = L(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

Η απόδειξη είναι στοιχειώδης και προκύπτει μέσω απλών τριγωνομετρικών σχέσεων των υπερβολικών ημιτόνων και συνημιτόνων.

Ένα στοιχείο A της $SL(2, \mathbb{C})$ καλείται **μοναδιαίο** (unitary) αν $A^{-1} = A^*$, δηλαδή αν

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.10)$$

Το σύνολο όλων αυτών των πινάκων συμβολίζεται με SU_2 και είναι μια υποομάδα της $SL(2, \mathbb{C})$, δηλαδή η SU_2 είναι κι αυτή κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή πινάκων.

Πράγματι, αν $A, B \in SU_2$, τότε $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$ και για τον A^{-1} έχουμε ότι $A^{-1}(A^{-1})^* = A^{-1}(A^*)^* = A^{-1}A = I$, άρα $A = (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^*$, δηλαδή τα AB και A^{-1} ανήκουν στην SU_2 .

Παρατηρούμε ότι αν ο A είναι στοιχείο της SU_2 τότε, από την (1.7.10) το στοιχείο στη θέση (4,4) του πίνακα Λ_A είναι $\Lambda^4_4 = \frac{1}{2}(a\bar{a} + b\bar{b} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) = 1$ και επομένως ο Λ_A είναι μια στροφή στην \mathcal{L} από το λήμμα 9. Άρα, η απεικόνιση στροφής μεταφέρει την SU_2 μέσα στην υποομάδα περιστροφής \mathcal{R} της \mathcal{L} . Στην πραγματικότητα απεικονίζει την SU_2 πάνω στην \mathcal{R} . Για να το δείξουμε αυτό χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα της γραμμικής άλγεβρας, σύμφωνα με το οποίο κάθε πίνακας στροφής 3×3 μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των τριών γωνιών Euler⁷. Έτσι κάθε πίνακας A

της SU_2 απεικονίζεται μονοσήμαντα σε έναν πίνακα της μορφής
$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [R^i_j] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

μέσω της απεικόνισης στροφής. Δηλαδή, κάθε κανονικός, ορθόγρονος, μετασχηματισμός Lorentz Λ είναι κάποιος $\Lambda_{\pm A}$, για κάποιον A στην $SL(2, \mathbb{C})$. Από το θεώρημα 11 υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός θ και δύο στροφές R_1 και R_2 στην \mathcal{L} τέτοιοι ώστε $\Lambda = R_1 L(\theta) R_2$. Υπάρχουν στοιχεία A_1 και A_2 του SU_2 τα οποία η απεικόνιση περιστροφής μεταφέρει στα R_1 και R_2 αντίστοιχα. Επιπλέον, ο $A(\theta)$, όπως ορίστηκε στην πρόταση 25 απεικονίζεται στον $L(\theta)$. Αφού η απεικόνιση στροφής είναι ένας ομομορφισμός, ο $A_1 A(\theta) A_2$ απεικονίζεται στον $R_1 L(\theta) R_2 = \Lambda$.

Έτσι τα στοιχεία του $SL(2, \mathbb{C})$ γενικεύουν το μετασχηματισμό Lorentz. Όμως κάνουν και άλλα πράγματα, ίσως πιο οικεία. Ειδικότερα, κάθε 2×2 μιγαδικός μοναδιαίως ορίζουσας πίνακας ορίζει έναν (κανονικοποιημένο) κλασματικό γραμμικό μετασχηματισμό της σφαίρας του Riemann (εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο). Υπάρχει στην πραγματικότητα μια αρκετά εντυπωσιακή σύνδεση μεταξύ των δύο την οποία σκοπεύουμε να ερευνήσουμε, αφού ρίχνει αρκετό φως τόσο στα μαθηματικά όσο και στην κινηματική της ομάδας Lorentz.

⁷ Για πληροφορίες σχετικά με τις γωνίες Euler επισκεφτείτε την ιστοσελίδα: http://en.Wikipedia.org/wiki/Euler_angles

Μέχρι εδώ έχουμε θεωρήσει τον μετασχηματισμό Lorentz Λ αποκλειστικά ως έναν πίνακα μετασχηματισμού συντεταγμένων – αυτό που κάποιιοι ονομάζουν **παθητικό μετασχηματισμό** (γιατί αφήνει σταθερά κάποια σημεία καθώς αλλάζει το σύστημα συντεταγμένων). Είναι χρήσιμο όμως να κατανοήσουμε ότι ο Λ δέχεται μια ισότιμη φυσική ερμηνεία ως ένας **δραστηκός** (active) μετασχηματισμός (που αφήνει το σύστημα συντεταγμένων αμετάβλητο και μεταβάλλει μόνο μερικά σημεία).

Ειδικότερα, ας θεωρήσουμε έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ και ας επιλέξουμε μια βάση $\{e_a\}$. Τότε η $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$ είναι η εικόνα της βάσης αυτής και αν γράψουμε $e_b = \Lambda^a_b \hat{e}_a$, τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Lorentz Λ ορίζεται ως

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & \Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & \Lambda^2_4 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & \Lambda^3_4 \\ \Lambda^4_1 & \Lambda^4_2 & \Lambda^4_3 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix}$$

Θυμίζουμε με έμφαση ότι ο Λ είναι ο πίνακας της L^{-1} που σχετίζεται με τη βάση $\{\hat{e}_a\}$. Τώρα, για κάθε $x \in \mathcal{M}$ μπορούμε να γράψουμε $x = x^a e_a = \hat{x}^a \hat{e}_a$, όπου $[\hat{x}^a] = \Lambda[x^a]$. Έτσι, σκεφτόμαστε τον Λ σαν να δρα πάνω στις συντεταγμένες ενός σταθερού σημείου για να δώσει τις συντεταγμένες του *ίδιου σημείου* σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Όμως, παρατηρούμε ότι

$$L^{-1}x = L^{-1}(\hat{x}^a \hat{e}_a) = \hat{x}^a L^{-1} \hat{e}_a = \hat{x}^a e_a$$

έτσι μπορούμε εξίσου καλά να θεωρήσουμε ότι ο Λ δρα επί των συντεταγμένων του σημείου x ως προς τη βάση $\{e_a\}$ και παράγει τις συντεταγμένες $[\hat{x}^a]$ του νέου σημείου (που ονομάζεται $L^{-1}x$), **στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων**. Είναι σημαντικό για αργότερα να το παρατηρήσουμε αυτό. Με αυτή τη νέα προσέγγιση του Λ , το $L^{-1}x$ έχει την ίδια θέση και τον ίδιο χρόνο στο S που είχε το x στο \hat{S} .

Θα μας απασχολήσουν περισσότερο στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου οι παρελθοντικές φωτεινές κατευθύνσεις και η επίδραση που έχει σε αυτές ο μετασχηματισμός Lorentz. Για κάθε x στον παρελθοντικό κώνο φωτός $\mathcal{C}_N^-(0)$ στο 0 του \mathcal{M} ορίζουμε την **παρελθοντική μηδενική κατεύθυνση** R_x^- διαμέσου του x να είναι η

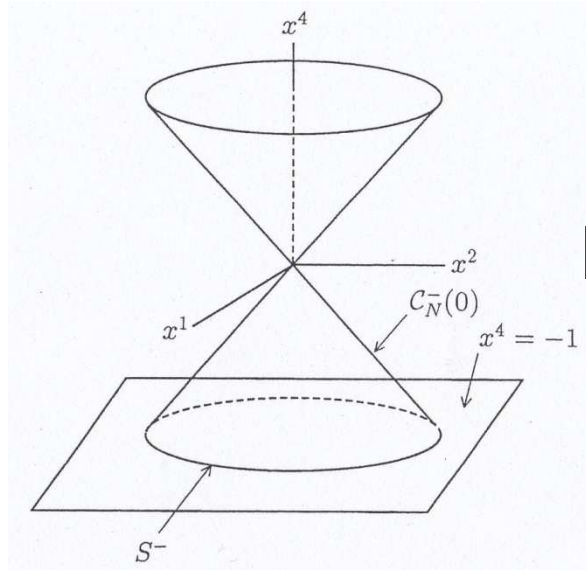
$$R_x^- = \{\alpha x : \alpha \geq 0\}.$$

Μια μελλοντική μηδενική κατεύθυνση μπορεί επίσης να οριστεί με ανάλογο τρόπο και όλα τα αποτελέσματά μας θα έχουν και ένα προφανές μελλοντικό δυϊκό αποτέλεσμα. Η μηδενική κατεύθυνση διαμέσου του x είναι το σύνολο όλων των πραγματικών πολλαπλασίων του x , δηλαδή το $R_{0,x}$. Προφανώς, αν το y είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του x , τότε $R_y^- = R_x^-$. Παρατηρούμε ότι αν το $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ είναι

έναν ορθογώνιο μετασχηματισμός που αντιστοιχεί σε κάποιον ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz Λ , τότε το $x \in \mathcal{C}_N^-(0) \Rightarrow Lx \in \mathcal{C}_N^-(0)$ και επομένως η R_{Lx}^- ορίζεται. Επιπλέον, $L(R_x^-) = L(\{ax : a \geq 0\}) = \{L(ax) : a \geq 0\} = \{aLx : a \geq 0\} = R_{Lx}^-$, δηλαδή

$$L(R_x^-) = R_{Lx}^- \quad (1.7.11)$$

Συνεπώς, ο L (και επομένως και ο L^{-1} αλλά και ο Λ) μπορούν να θεωρηθούν ως μια απεικόνιση επί των παρελθοντικών μηδενικών κατευθύνσεων.



Για να αναδείξουμε τη σύνδεση μεταξύ των μετασχηματισμών Lorentz και των κλασματικών γραμμικών μετασχηματισμών παρατηρούμε ότι υπάρχει μια φυσική ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των παρελθοντικών μηδενικών κατευθύνσεων και των σημείων μιας σφαίρας Riemann. Ειδικότερα, αν επιλέξουμε μια αδρανειακή βάση $\{e_a\}$ για τον \mathcal{M} και συμβολίσουμε με S^- την τομή του παρελθοντικού μηδενικού κώνου $\mathcal{C}_N^-(0)$ στο 0 με το υπερεπίπεδο $x^4 = -1$:

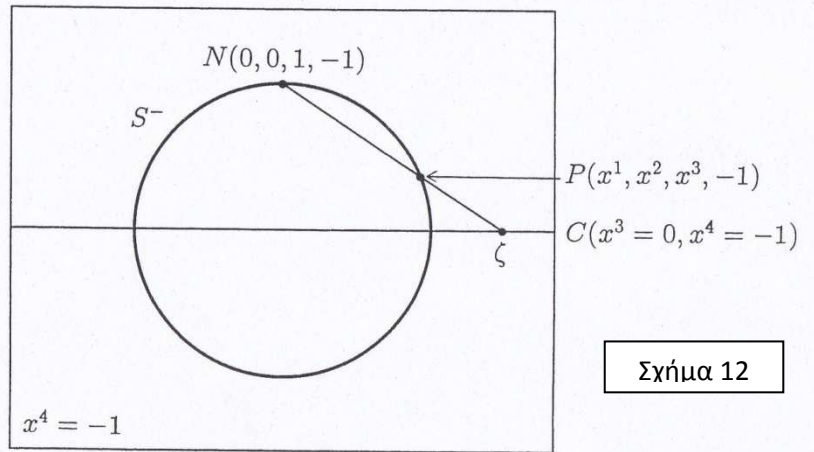
$$S^- = \{x = x^a e_a : x \in \mathcal{C}_N^-(0), x^4 = -1\}$$

Παρατηρήστε ότι, αφού το $x \in \mathcal{C}_N^-(0)$ αν και μόνο αν $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^4)^2$, τότε το $S^- = \{x = x^a e_a : x \in \mathcal{C}_N^-(0), (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$ και επομένως είναι ένα αντίγραφο της συνηθισμένης 2-σφαιρας S^2 στη στιγμιαία 3-χωρη $x^4 = -1$. (δες σχήμα 11)

Αντίστροφα, κάθε σημείο στο S^- ορίζει μια μοναδική παρελθοντική μηδενική κατεύθυνση στο \mathcal{M} . Για να έχουμε μια σαφή αναπαράσταση αυτής της παρελθοντικής μηδενικής κατεύθυνσης θεωρούμε το S^- ως τη σφαίρα Riemann, που σημαίνει ότι θέλουμε να ταυτίσουμε τα σημεία του S^- με μιγαδικούς αριθμούς μέσω στερεογραφικής προβολής. Σε αυτό το σημείο παίρνουμε $N = (0, 0, 1, -1)$ στο S^- να

είναι ο βόρειος πόλος και προβάλλουμε στο διδιάστατο επίπεδο C στο $x^4 = -1$ που δίνεται από το $x^3 = 0$ (βλέπε σχήμα 12). Η σχέση μεταξύ ενός σημείου $P(x^1, x^2, x^3, -1)$ διαφορετικού από το N στο S^- και της εικόνας του ζ στο μιγαδικό επίπεδο C υπό την στερεογραφική προβολή από το N υπολογίζεται εύκολα και συνοψίζεται στις σχέσεις (1.7.12) και (1.7.13):

$$\zeta = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3} \quad (1.7.12)$$



$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \\ x^2 &= \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)} \\ x^3 &= \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1} \\ x^4 &= -1 \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Φυσικά, ο βόρειος πόλος $N(0, 0, 1, -1)$ στο S^- αντιστοιχεί στο σημείο του απείρου στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Για να αποφύγουμε τον χειρισμό αυτού του σημείου προτιμάμε να παραστήσουμε τους μιγαδικούς ζ με αυτές που καλούνται «προβολικές ομογενείς συντεταγμένες», οι οποίες είναι ένα ζευγάρι $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ μιγαδικών αριθμών, οι οποίοι δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν και που ικανοποιούν τη σχέση

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta}$$

(κάθε ζεύγος $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ με $\xi \neq 0$ δίνει το σημείο στο άπειρο).

Προφανώς, αν είναι και $\zeta = \frac{\xi'}{\eta'}$, τότε $\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{\xi}{\eta}$ ή $\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \lambda$, με λ μιγαδικό αριθμό, άρα $\xi' = \lambda \xi$ και $\eta' = \lambda \eta$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αυτό, οι (1.7.13) γίνονται

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{\xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \\ x^2 &= \frac{\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})} \\ x^3 &= \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \\ x^4 &= -1 \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

Αντιστρέφοντας την οπτική μας γωνία βρίσκουμε ότι κάθε ζευγάρι $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ μιγαδικών αριθμών, που δεν είναι και οι δύο ίσοι με το μηδέν, ανυψώνεται σε ένα σημείο $P(x^1, x^2, x^3, -1)$ στο S^- το οποίο δίνεται από τις (1.7.14). Ευρισκόμενο μέσα στο S^- (και επομένως και στον $\mathcal{C}_N^-(0)$) αυτό το σημείο καθορίζει μια παρελθοντική μηδενική κατεύθυνση R_P^- , την οποία για λόγους έμφασης προτιμάμε να συμβολίζουμε με $R_{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}^-$. Πολλαπλασιάζοντας το P με τον θετικό πραγματικό αριθμό $\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}$ προκύπτει ένα άλλο σημείο X στον $\mathcal{C}_N^-(0)$: $X = X^a e_a$, όπου

$$X^1 = \xi\bar{\eta} + \bar{\xi}\eta, \quad X^2 = \frac{\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta}{i}, \quad X^3 = \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}, \quad X^4 = -(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}) \quad (1.7.15)$$

Το X ορίζει προφανώς και αυτό μια παρελθοντική μηδενική κατεύθυνση R_X^- και μάλιστα

$$R_X^- = R_{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}^- \quad (1.7.16)$$

Τελικά είμαστε σε θέση να ενώσουμε όλα αυτά τα νήματα. Ξεκινάμε με ένα στοιχείο $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ στην $SL(2, \mathbb{C})$. Τότε ο A ορίζει μια απεικόνιση που μεταφέρει κάθε ζεύγος $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$, που δεν είναι και οι δύο ίσοι με 0, σε ένα άλλο τέτοιο ζεύγος, το οποίο συμβολίζουμε με

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\xi + \beta\eta \\ \gamma\xi + \delta\eta \end{bmatrix} \quad (1.7.17)$$

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε την (1.7.17) ως μια απεικόνιση στο S^- (ή στο $\bar{\mathbb{C}}$), αυτή ορίζει έναν κλασματικό γραμμικό μετασχηματισμό. Πράγματι, με όρους των εκτεταμένων μιγαδικών αριθμών $\zeta = \xi/\eta$, η (1.7.17) είναι ισοδύναμη με την

$$\hat{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

Τώρα, το $\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$ ορίζει ένα \hat{X} στον $\mathcal{C}_N^-(0)$ από την (1.7.15) (με καπέλα) και αυτό με τη σειρά του ορίζει μια παρελθοντική μηδενική κατεύθυνση $R_{\hat{X}}^- = R_{\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}}^-$. Από την άλλη μεριά, ο A αναδεικνύει επίσης, μέσω της spinor απεικόνιση, έναν κανονικό, ορθόχρονο μετασχηματισμό Lorentz Λ_A , ο οποίος λαμβανόμενος ως ένας ενεργός μετασχηματισμός, μεταφέρει το X σε ένα σημείο $\Lambda_A X$ στον $\mathcal{C}_N^-(0)$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι ο \hat{X} και ο $\Lambda_A X$ είναι, στην πραγματικότητα, το ίδιο σημείο και έτσι, η επίδραση του κλασματικού γραμμικού μετασχηματισμού (1.7.17), που ορίζεται από τον A , πάνω στον παρελθοντικό μηδενικό κώνο είναι η ίδια όπως η επίδραση του μετασχηματισμού Lorentz Λ_A , που ορίζεται από τον A , δηλαδή ότι

$$R_{\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}}^- = R_{\Lambda_A X}^- \quad (1.7.18)$$

Για να το αποδείξουμε αυτό συνεχίζουμε ως εξής: Αρχικά λύνουμε τις (1.7.15) με αγνώστους τα τέσσερα γινόμενα $\xi\bar{\eta}$, $\bar{\xi}\eta$, $\xi\xi$ και $\eta\bar{\eta}$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \xi\bar{\xi} &= \frac{1}{2}(X^3 + X^4) & \xi\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(X^1 + iX^2) \\ \bar{\xi}\eta &= \frac{1}{2}(X^1 - iX^2) & \eta\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(-X^3 + X^4) \end{aligned}$$

και έτσι

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \bar{\xi}\eta & \eta\bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix} \quad (1.7.19)$$

Τώρα κάνουμε τον μονοδιάστατο μετασχηματισμό (1.7.17) για να πάρουμε το $\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$. Το αντίστοιχο σημείο $\hat{X} = \hat{X}^\alpha e_\alpha$ που δίνεται από την (1.7.15) με καπέλα, πρέπει να ικανοποιεί την (1.7.19) με καπέλα, δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{X}^3 + \hat{X}^4 & \hat{X}^1 + i\hat{X}^2 \\ \hat{X}^1 - i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3 + \hat{X}^4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{X}^3 + \hat{X}^4 & \hat{X}^1 + i\hat{X}^2 \\ \hat{X}^1 - i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3 + \hat{X}^4 \end{bmatrix}^* = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix} \right)^* = \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \left(A \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right)^* = \\ &= A \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}^* A^* = A \cdot \left(\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix} \right) A^* = \\ &= \frac{1}{2} A \begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} A^* \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{bmatrix} \hat{X}^3 + \hat{X}^4 & \hat{X}^1 + i\hat{X}^2 \\ \hat{X}^1 - i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3 + \hat{X}^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} A^* \quad (1.7.20)$$

Συγκρίνοντας την (1.7.20) με την (1.7.5) και τον ορισμό της Λ_A βρίσκουμε ότι πράγματι

$$\hat{X} = \Lambda_A X$$

και άρα η (1.7.18) αποδείχτηκε.

Εφόσον η απεικόνιση *spinor* είναι μονοσήμαντη, κάθε στοιχείο του \mathcal{L} είναι Λ_A για κάποιο A στο $SL(2, \mathbb{C})$ και έτσι κάθε στοιχείο του \mathcal{L} καθορίζει έναν γραμμικό κλασματικό μετασχηματισμό του S^- που έχει την ίδια επίδραση στις παρελθοντικές μηδενικές κατευθύνσεις (οι $\pm A$ δημιουργούν τον ίδιο γραμμικό κλασματικό μετασχηματισμό). Αντίστροφα, αφού τα παρελθοντικά φωτοειδή διανύσματα παράγουν τον \mathcal{M} , ένας μετασχηματισμός Lorentz προσδιορίζεται πλήρως από την επίδρασή του στις παρελθοντικές μηδενικές κατευθύνσεις. Μερικές συνέπειες αυτής της αντιστοιχίας μεταξύ των στοιχείων του \mathcal{L} και των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών του S^- είναι άμεσες.

Θεώρημα 26: Ένας κανονικός, ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz, αν δεν είναι ο ταυτοτικός, αφήνει αναλλοίωτες τουλάχιστον μία και το πολύ δυο παρελθοντικές μηδενικές κατευθύνσεις.

Αυτό προκύπτει άμεσα από το γνωστό γεγονός ότι οποιοσδήποτε γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός της σφαίρας Riemann, αν δεν είναι ταυτοτικός, έχει δυο (πιθανώς τυχαία) σταθερά σημεία. Μια άλλη γνωστή ιδιότητα του γραμμικού κλασματικού μετασχηματισμού είναι ότι προσδιορίζονται πλήρως από τις τιμές τους σε οποιαδήποτε 3 διακεκριμένα σημεία στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Ως εκ τούτου:

Θεώρημα 27: Ένας κανονικός, ορθόχρονος μετασχηματισμός Lorentz προσδιορίζεται πλήρως από τις επιδράσεις του σε οποιοσδήποτε τρεις διακεκριμένες παρελθοντικές μηδενικές κατευθύνσεις. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντων δύο συνόλων με στοιχεία τρεις διακεκριμένες παρελθοντικές φωτοειδείς κατευθύνσεις, υπάρχει ένα και μόνον ένα στοιχείο του \mathcal{L} που απεικονίζει το πρώτο σύνολο (με ένα προς ένα αντιστοιχίση) στο δεύτερο.

Σαν τελευταία εφαρμογή θα αναπτύξουμε ένα αξιοθαύμαστο αποτέλεσμα του Penrose που σχετίζεται με αυτό που ονομάζουμε «αφάνεια της συστολής του Lorentz». Ένας αδρανειακός παρατηρητής \mathcal{O} «παρατηρεί» με έναν αρκετά ακριβή και

καλά προσδιορισμένο τρόπο. Κάποιος σχεδιάζει το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή σαν ένα πλέγμα χωρικών συντεταγμένων με ρολόγια τοποθετημένα στα σημεία του δικτυωτού πλέγματος και είτε συσκευές εγγραφής είτε βοηθούς μαζί με τα ρολόγια για να κάνουν τις απαραίτητες τοπικές μετρήσεις. Ύστερα ο \mathcal{O} παρατηρεί, ας πούμε, μια κινούμενη σφαίρα είτε βάζοντας σε λειτουργία τις συσκευές είτε ειδοποιώντας τους βοηθούς να καταγράφουν τους χρόνους άφιξης στη θέση τους των διάφορων σημείων της σφαίρας. Όταν τα πράγματα ηρεμήσουν ο \mathcal{O} θα μαζέψει όλα τα δεδομένα για ανάλυση. Τότε θα μπορεί, για παράδειγμα, να κατασκευάσει μια «εικόνα» της σφαίρας διαλέγοντας (αυθαίρετα) κάποια στιγμή του χρόνου, συλλέγοντας όλες τις τοποθεσίες στο πλέγμα του που κατέγραψε το πέρασμα ενός σημείου στα όρια της σφαίρας αυτήν την δεδομένη στιγμή και να «πλέξει» αυτά τα σημεία στο πλέγμα του. Κατά αυτόν τον τρόπο θα βρει τον εαυτό του να κατασκευάζει, όχι μια σφαίρα, αλλά μια έλλειψη εξαιτίας της συστολής του μήκους κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Αυτό που ο παρατηρητής μας «βλέπει» στην πραγματικότητα (με τα μάτια του ή μέσα απ' τον φακό μιας κάμερας), παρόλα αυτά, δεν είναι τόσο ξεκάθαρο. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια (παραδεκτά ιδανική) γεωμετρική αναπαράσταση στο \mathcal{M} αυτού του «πεδίου ορατότητας».

Είναι ένα καθαρό απόγευμα και, όπως τριγυρνάς έξω, κοιτάζεις ψηλά και βλέπεις την Μεγάλη Άρκτο. Πιο συγκεκριμένα, εστιάζεις την ματιά σου σε ένα πλήθος εισερχόμενων φωτονίων (απομόνωσε και θεώρησε ένα από κάθε άστρο του αστερισμού). Άσχετα από το πότε έφυγαν από την πηγή τους αυτά τα φωτόνια φτάνουν στην επιφάνεια ταυτόχρονα (στο δικό σου σύστημα αναφοράς) και συνεπώς δημιουργείς ένα μοτίβο (εικόνα) που καταγράφεται στον δικό σου εγκέφαλο. Αυτό το σχέδιο είναι αυτό που «βλέπεις». Πού μπορούμε να το βρούμε στο \mathcal{M} ; Κάθε φωτόνιο που βλέπεις έχει μια κοσμική γραμμή στο \mathcal{M} , που απλώνεται κατά μήκος του παρελθοντικού φωτοειδούς κώνου $\mathcal{C}_N^-(0)$ (βρίσκεστε στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων σας και η εικόνα καταγράφεται στον εγκέφαλό σας όταν $x^4 = 0$). Λίγο πριν τη στιγμή $x^4 = 0$ τα φωτόνια επέδρασαν στην επιφάνεια των ματιών σας και δημιούργησαν την εικόνα. Όταν $x^4 = -1$ τα φωτόνια βρίσκονταν όλα σε μια σφαίρα ακτίνας 1 πάνω στο σύστημα συντεταγμένων σου και δημιούργησαν το ίδιο σχέδιο που κατέγραψε το μάτι σου λίγο αργότερα. Προβάλλοντας την εικόνα στο επίπεδο $x^4 = -1$ στο \mathcal{M} βρίσκουμε την κοσμική γραμμή αυτών των φωτονίων να τέμνει το S^- στη συγκεκριμένη εικόνα που «βλέπεις». Ως γεωμετρική αναπαράσταση

του τι βλέπεις (για το γεγονός $x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0$) παίρνουμε την τομή με το S^- των κοσμικών γραμμών όλων των φωτονίων που προκαλούν τον εγκέφαλό σου να καταγράψει την εικόνα όταν $x^4 = 0$.

Τώρα θέτουμε το εξής ερώτημα. Ας υποθέσουμε ότι αυτό που βλέπεις δεν είναι η Μεγάλη Άρκτος, αλλά κάτι με κυκλικό περίγραμμα, π.χ. μια σφαίρα σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς σου. Τι βλέπει ένας άλλος αδρανειακός παρατηρητής, ο οποίος κινείται σε σχέση με το δικό σου σύστημα αναφοράς, αλλά συναντάται τυχαία με σένα στιγμιαία στην αρχή των αξόνων; Σύμφωνα με το νέο παρατηρητή, η σφαίρα κινείται και με βεβαιότητα πρέπει να εμφανίζεται ότι συστέλλεται κατά την κατεύθυνση της κίνησης. Σίγουρα, πρέπει να «βλέπει» μια ελλειπτική και όχι σφαιρική εικόνα.

Κι όμως όχι! Παρόλο την συστολή του Lorentz στην κατεύθυνση της κίνησης, η σφαίρα θα συνεχίσει να έχει ένα σφαιρικό περίβλημα για τον \hat{O} (αν και σε εκφυλισμένες περιπτώσεις, μπορεί να «φαίνεται» ο κύκλος σαν ευθεία). Πράγματι, αυτό είναι αντανάκλαση ενός άλλου γνωστού χαρακτηριστικού των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών των σφαιρών Riemann: απεικονίζουν σφαίρες σε σφαίρες. Έτσι, αν Λ είναι ο μετασχηματισμός Lorentz που σχετίζει το S με το \hat{S} , τότε, θεωρούμενος ως ενεργός μετασχηματισμός σε παρελθοντικές φωτοειδής κατευθύνσεις, απεικονίζει οποιαδήποτε οικογένεια παρελθοντικών φωτοειδών κατευθύνσεων που τέμνουν το S^- , σε ένα κύκλο σε μια άλλη τέτοια οικογένεια. Με περισσότερες λεπτομέρειες θυμόμαστε ότι, για κάθε x στο \mathcal{M} , το $\Lambda(x)$ ($= L^{-1}(x)$) έχει την ίδια θέση και τον ίδιο χρόνο στο S που έχει το x στο \hat{S} . Συγκεκριμένα, $\Lambda(x) \in S^-$ αν και μόνον εάν $x \in \hat{S}^-$. Έτσι, το $\Lambda(R_x^-) = R_{\Lambda x}^-$ «μοιάζει το ίδιο» στον \mathcal{O} στο $x^4 = 0$ όπως το R_x^- «μοιάζει» στον $\hat{\mathcal{O}}$ στο $\hat{x}^4 = 0$ (ίδια σχετική θέση στον ουρανό). Τώρα, αν έχουμε μια οικογένεια \mathcal{N} από παρελθοντικές φωτοειδής κατευθύνσεις τότε η εμφάνιση της εικόνας στον $\hat{\mathcal{O}}$ στο $\hat{x}^4 = 0$ θα είναι η ίδια όπως η εικόνα του $\Lambda(\mathcal{N})$ στον \mathcal{O} στο $x^4 = 0$. Αν οι ακτίνες στο \mathcal{N} αναπαριστούν ένα σφαιρικό περίβλημα στον \mathcal{O} όταν $x^4 = 0$, το ίδιο θα κάνει και το $\Lambda(\mathcal{N})$ και έτσι ο $\hat{\mathcal{O}}$ θα δει επίσης σφαιρικό περίβλημα όταν $\hat{x}^4 = 0$. Τόσο ο \mathcal{O} όσο και ο $\hat{\mathcal{O}}$ θα «δουν» ένα σφαιρικό σχήμα.

2. ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

2.1. Παρουσίαση και Τεκμηρίωση

Όπως αναφέρθηκε και στον Πρόλογο, στο δεύτερο μέρος της διπλωματικής εργασίας θα παρουσιαστεί μια διδακτική πρόταση, η οποία, ανάλογα με το μαθηματικό υπόβαθρο που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε, μπορεί να προσαρμοστεί από τις γυμνασιακές τάξεις έως και το πρώτο έτος κάποιας σχολής τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Προτείνεται να ακολουθηθεί μια προσέγγιση κατευθυνόμενης ανακάλυψης όπου οι μαθητές μέσα από μια σειρά διαδοχικών ερωτημάτων οδηγούνται βήμα – βήμα από ήδη γνωστές του έννοιες στην καινούρια γνώση. Η σειρά των ερωτήσεων όπως παρουσιάζονται δεν διεκδικούν την αυθεντία, ούτε είναι ο μόνος τρόπος προσέγγισης. Ο κάθε συντονιστής – εκπαιδευτικός μπορεί και πρέπει να διαμορφώνει τις ερωτήσεις που θέτει ανάλογα με το ακροατήριο στο οποίο απευθύνεται, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιαιτερότητές του, όπως το μαθηματικό υπόβαθρο, τις γνώσεις των μαθητών, τον τρόπο με τον οποίο αυτοί οι μαθητές προσεγγίζουν τη νέα γνώση (μαθαίνουν). Θα ήταν επίσης πραγματικά καλό, αν κάθε εκπαιδευτικός, μαθηματικός ή φυσικός, είχε στο μυαλό του ως δυνατότητα επέκτασης της διδακτέας ύλης, προς την κατεύθυνση της τετραδιάστατης γεωμετρίας του χώρου Minkowski, όπου θα ταίριαζε κάθε κομμάτι έτσι ώστε να δίνονται στους μαθητές περισσότερα ερεθίσματα προς την κατεύθυνση αυτή και να αποτελέσει συνηθισμένο μοντέλο αναφοράς.

Η πρότασή μας απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου, Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης και μπορεί να αποτελέσει τη βάση για μια τετραμηνιαία συνθετική εργασία των μαθητών πάνω στη γεωμετρία του χώρου Minkowski, στα πλαίσια του νέου προγράμματος σπουδών που ανακοινώθηκε από το υπουργείο παιδείας. Σύμφωνα με αυτές τις ανακοινώσεις, σε κάθε ένα από τα δύο διδακτικά τετράμηνα, οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες των 2 – 4 ατόμων, θα πρέπει να παρουσιάζουν μια συνθετική, διαθεματική εργασία για την οποία θα αξιολογούνται.

Για τα σημεία που απαιτείται αναφορά νέων γνώσεων θα αποφύγουμε συνειδητά την απομάκρυνση από τον καθιερωμένο τρόπο διδασκαλίας στην ελληνική μέση και ανώτερη εκπαίδευση γιατί θέλουμε οι δραστηριότητές μας να φανούν ως μια φυσική συνέχεια του εκπαιδευτικού συστήματος και να αποκτήσουν έτσι την

απαραίτητη νομιμοποίηση στα μάτια των μαθητών. Αποτελούν ήδη σοβαρό εμπόδιο οι ίδιες οι ιδέες που θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε και θέλουμε να ελέγξουμε όσο το δυνατόν περισσότερες από τις άλλες παραμέτρους μάθησης.

Θα ξεκινήσουμε με μια εισαγωγή στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Οι μαθητές θα συνδυάσουν έννοιες και μεθόδους γραφικής αναπαράστασης που ήδη γνωρίζουν από προηγούμενες τάξεις, από τα μαθήματα των Μαθηματικών και της Φυσικής και θα γίνει μια αναγωγή στις τρεις διαστάσεις του χώρου (οι μαθητές διδάσκονται συνήθως διαδικασίες αναπαράστασης στο επίπεδο). Στη συνέχεια θα θυμηθούν τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου για τη μετάβαση από ένα ΑΣΑ σε ένα άλλο σύμφωνα με την Κλασική Φυσική. Τοποθετώντας τους μαθητές μπροστά σε γνωστές σε αυτούς μαθηματικές και φυσικές έννοιες θα γίνει δυνατή αρχικά η αποδοχή από μέρος τους των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου ενώ στη συνέχεια θα βρεθούν μπροστά στην αντίφαση, αν και γνωρίζουν ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι σταθερή ανεξάρτητα από την κίνηση ή όχι της πηγής του, το φως να κινείται με διαφορετική ταχύτητα σε δύο διαφορετικά ΑΣΑ. Έτσι θα τους δημιουργηθεί φυσιολογικά η ανάγκη εξήγησης αυτού του «παραδόξου», θα γίνει πιο ομαλά η μετάβαση από τον απόλυτο χώρο και χρόνο στον τετραδιάστατο χωρόχρονο και θα τονιστεί η αναγκαιότητα για την εισαγωγή του.

Στη συνέχεια θα παραχθούν οι μετασχηματισμοί Lorentz μεταξύ δύο τυποποιημένης διαμόρφωσης συστημάτων αναφοράς και θα εισάγουμε την έννοια των διαγραμμάτων Minkowski και της βαθμολόγησης των αξόνων τους. Μέσω των μετασχηματισμών αυτών θα διαπιστωθούν ιδιαιτερότητες του χώρου αυτού όπως είναι η συστολή του μήκους, η διαστολή του χρόνου, το σχετικό του ταυτόχρονου κλπ.

Επόμενο στάδιο αποτελεί η εισαγωγή της έννοιας της χωροχρονικής απόστασης, η οποία είναι αναλλοίωτο μέγεθος του χώρου Minkowski. Θα βρούμε τρόπους μέτρησης και θα διαπιστώσουμε τη σημασία της απόστασης δύο γεγονότων, τόσο της χωρικής απόστασης όσο και της χρονικής.

Τέλος, αξιοποιώντας το μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών από τους γραμμικούς μετασχηματισμούς και την γραμμική άλγεβρα θα επεξεργαστούμε τα θέματά μας με όρους μετασχηματισμών στο \mathcal{M} .

Τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες ακολούθησαν για αιώνες μια πορεία αλληλένδετη και αλληλοσυμπληρούμενη. Τα μαθηματικά ήταν το πνευματικό εργαλείο κατανόησης της αλήθειας. Της αλήθειας του φυσικού κόσμου. Κι από την

άλλη μεριά οι φυσικές επιστήμες ήταν το σημείο επαλήθευσης των μαθηματικών αλλά και η πηγή έμπνευσης για την ανάπτυξή τους. Και ενώ αυτή η σχέση είναι γνωστή στην επιστημονική κοινότητα, στο σχολικό επίπεδο του Γυμνασίου και του Λυκείου δεν γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές αφού είτε δεν υπάρχει καθόλου είτε, όπου εμφανίζεται, είναι επιφανειακή και δεν επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν την έντονη συσχέτιση των δύο αντικειμένων. Επιπλέον, σε διάφορες έρευνες που έχουν γίνει (Forster 2002, [], σελ.) επισημαίνεται ότι θέματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν σημεία συνάντησης μαθηματικών και φυσικής γίνονται σημεία διαχωρισμού των δύο μαθημάτων λόγω των διαφορών στη διδασκαλία των αντίστοιχων κοινοτήτων. Η παρουσίαση του χώρου Minkowski δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν την μαθηματικοποίηση της φυσικής αλλά και τη χρήση των μαθηματικών στην κατανόηση του κόσμου.

«Η επιστημονική γνώση είναι το σύνολο των κοινωνικά διαθέσιμων γνώσεων, που έχουν γίνει αντικείμενο των επιστημονικών εκδόσεων ή επικοινωνίας, αναγνωρισμένες ως έγκυρες από την επιστημονική κοινότητα...Από την επιλογή της γνώσης που θα διδαχθεί έως την προσαρμογή της στο εκπαιδευτικό σύστημα, υπάρχει μια γενικευμένη διαδικασία μετατροπών, ώστε αυτή η γνώση να γίνει συνεκτική, καθώς επίσης και να δημιουργήσουμε γνώσεις, που στοχεύουν σε αυτό που ονομάζουμε σχολική γνώση... Το σύνολο αυτών των προσαρμογών το ονομάζουμε διδακτική μεταφορά ή διδακτικό μετασχηματισμό». (Henry M. [] , σελ.12).

Ακολουθώντας αυτή τη λογική, παρουσιάσαμε στο πρώτο μέρος την επιστημονική γνώση αλλά οι δραστηριότητές μας περιορίζονται στην τυποποιημένη διαμόρφωση ενώ ταυτόχρονα προσπαθούμε να κρατήσουμε τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται στα σχολικά βιβλία.

Σύμφωνα με τον Piaget, οι γνώσεις περνούν από ένα στάδιο ισορροπίας σε ένα άλλο μέσα από μεταβατικές φάσεις, στη διάρκεια των οποίων οι προηγούμενες γνώσεις αμφισβητούνται. Εάν αυτή η στιγμή της ανισορροπίας ξεπεραστεί, προκύπτει μια αναδιοργάνωση στις γνώσεις κατά τη διάρκεια της οποίας οι νέες γνώσεις ενσωματώνονται μέσα στις παλιές. Έτσι είναι χρήσιμο οι μαθητές να οδηγηθούν στην αμφισβήτηση του καθιερωμένου Νευτώνειου κόσμου μέσα από πραγματικές αντιφάσεις που θα ανοίξουν το δρόμο για την αλλαγή του παραδείγματος που χρησιμοποιούν για την κατανόηση του κόσμου.

Όπως αναφέρει και ο Bachelard «μαθαίνουμε ενάντια στις παλιές γνώσεις ξεπερνώντας τα εμπόδια που αυτές συγκροτούν».

«Τα επιστημολογικά εμπόδια ... είναι έμφυτα στην ίδια τη γνώση. Το πολυσύνθετο των εννοιών και των σχέσεών τους μέσα σε ένα εννοιολογικό πεδίο που οι μαθητές κατέχουν ελάχιστα, συγκρούεται με τις αυθόρμητες αντιλήψεις που τείνουν να αντιπαραθέσουν τη γνωστική εμπειρία με την επιστημονική γνώση».
(Henry M., [], σελ. 82).

Είναι επομένως κρίσιμο να ακολουθήσουμε στην αρχή μικρά και σταθερά βήματα, ώστε να μην επιτρέψουμε στην εμπειρία των μαθητών από το περιβάλλον να σταθεί μεγάλο εμπόδιο στην αποδοχή των νέων εννοιών. Άλλωστε οι μαθητές στην ζωή τους δεν αντιλαμβάνονται σχετικιστικά αντικείμενα.

Τέλος, προσπαθώντας να δώσουμε στους μαθητές τη δυνατότητα να θέσουν τα πλαίσια μέσα στα οποία θα μάθουν για τη γεωμετρία του χώρου Minkowski χρησιμοποιούμε τη νοητική αναπαράσταση του τρένου και του επιβάτη. Επίσης χρησιμοποιούμε την εικόνα του κινούμενου παρατηρητή για να δώσουμε νόημα στην απόσταση δύο γεγονότων. Έτσι βοηθάμε στον ενσαρκωμένο τρόπο προσέγγισης των Μαθηματικών (Tall , 2004) όπου ο μαθητής παίρνει τη θέση του επιβάτη ή του σταθμάρχη καθώς μελετά τα διάφορα ερωτήματα. Ταυτόχρονα συνδυάζει αυτόν τον τρόπο με τον διαδικασιοεννοιολογικό ώστε να βοηθηθεί η κατανόησή του και να αναπτυχθεί ουσιαστικά η μαθηματική του σκέψη.

2.2. Ανάλυση φύλλων εργασίας

Φύλλο Εργασίας (Ανάλυση)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ανακοινώνουμε στους μαθητές μας το θέμα και τους στόχους του μαθήματος (όχι όμως και την αντίφαση στην οποία θα τους οδηγήσουμε).

E1: Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο χώρο;

Αναμένουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές θα συμφωνήσουν ότι για τον προσδιορισμό της θέσης του σημείου χρειάζεται ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Οι μαθητές γνωρίζουν τον τρόπο αναπαράστασης για το επίπεδο από τα Μαθηματικά (Βιβλίο Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου, σελ. 88. Βιβλίο Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου, σελ. 58. Βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου, σελ. 30) και από τη Φυσική (Βιβλίο Φυσικής Α΄ Λυκείου, σελ.30).

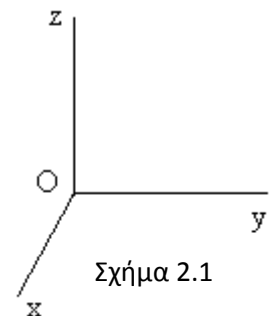
E2: Το σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο αποτελείται από δύο άξονες, κάθετους μεταξύ τους. Πως θα είναι το αντίστοιχο σύστημα στο χώρο;

Σχεδιάζουμε τρεις άξονες κάθετους ανά δύο με κοινή αρχή O που να μην βρίσκονται και οι τρεις στο ίδιο επίπεδο. Αν υπάρχουν αντιρρήσεις για την κατασκευή αυτή, θυμίζουμε στους μαθητές το θεώρημα των τριών καθέτων που έχουν διδαχθεί στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου (Σχολικό βιβλίο, σελ. 272).

Το σημείο O λέγεται αρχή του συστήματος συντεταγμένων και κάθε σημείο του χώρου ορίζεται από τρεις αριθμούς (x , y , z) που λέγονται συντεταγμένες του. Εδώ πρέπει να τονιστεί το ισότροπο του χώρου, δηλαδή ότι οι τρεις συντεταγμένες δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους.

E3: Σχεδιάστε ένα σύστημα αξόνων στο χαρτί σας.

Οι μαθητές θα δυσκολευτούν λίγο αλλά έχοντας δει εικόνες τρισδιάστατων σχημάτων που σχεδιάζονται στο επίπεδο (Βιβλίο Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου, σελ.201, Ευθείες και επίπεδα στο χώρο. Βιβλίο Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Λυκείου, κεφάλαια 12 και 13) είναι σε θέση να σχεδιάσουν κάτι σαν το διπλανό σχήμα. Το



συγκεκριμένο ερώτημα θα συμπληρωθεί και με επιμέρους ερωτήματα, όπως:

- Γιατί βάλατε με αυτή τη σειρά τα γράμματα στους άξονες;
- Τι διαφορά θα είχε αν οι άξονες ήταν στραμμένοι κατά 45° γύρω από το Ο;
- Τι θα γινόταν αν βάζατε την αρχή Ο δύο εκατοστά δεξιότερα στο χαρτί σας;

Με τον τρόπο αυτό θα διευκρινιστούν σημεία όπως ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ο προσανατολισμός των αξόνων μπορεί να γίνει αυθαίρετα. Επίσης, χρησιμοποιώντας τον γνωστό στους μαθητές κανόνα του δεξιού χεριού θα διαπιστώνουν αν το σύστημα που ζωγράρισαν είναι δεξιόστροφο.

E4: Διαφέρουν οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο;

- Σχεδιάστε πάνω στο σύστημα των αξόνων του προηγούμενου ερωτήματος ένα τετράγωνο.
- Σχεδιάστε ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων.
- Το τετράγωνο που σχεδιάσατε πριν έπαιξε να είναι τετράγωνο; Έχασε κάποια από τις ιδιότητες ή τα χαρακτηριστικά του;

Γίνεται φανερό στους μαθητές πως τα σχήματα και οι ιδιότητές τους δεν εξαρτώνται από την εκλογή του συστήματος συντεταγμένων (όπως τα αντικείμενα και οι ιδιότητές τους δεν εξαρτώνται από τη γλώσσα στην οποία μιλάμε γι αυτά). Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιούμε κάθε φορά ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων που να απλουστεύει τα προβλήματα που εξετάζουμε.

Ρωτάμε τους μαθητές που έχουν συναντήσει στο μάθημα μια τέτοια «απλούστευση». Είναι αναμενόμενο αρκετοί να θυμηθούν ότι στο μάθημα των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, η μελέτη των κωνικών τομών γίνεται με την επιλογή «κατάλληλων» συστημάτων ώστε να απλουστευθούν οι εξισώσεις των κωνικών και να γίνει ευκολότερη η διαπραγμάτευσή τους. Επίσης μπορεί να θυμηθούν ότι στο μάθημα της Φυσικής συχνά επιλέγουμε τους άξονες κατά μήκος της κίνησης ενός σώματος. Για παράδειγμα, στη μελέτη της κίνησης ενός σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο θεωρούμε τους δύο άξονες έναν παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και έναν κάθετο σε αυτό.

Ε5: Πώς μετράμε την απόσταση ενός σημείου πάνω στο επίπεδο από την αρχή O των αξόνων; Πώς μπορούμε να μετρήσουμε την αντίστοιχη απόσταση ενός σημείου του χώρου από την αρχή O ;

- Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $A(3,4)$ από την αρχή των αξόνων.
- Υπολογίστε την απόσταση των σημείων $A(3, 4)$ και $B(2,7)$.
- Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $\Gamma(1, -2, 2)$ από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Περιμένουμε οι μαθητές να θυμηθούν αρχικά αυτό που γνωρίζουν από τα Μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου (Σχολικό βιβλίο, σελ. 63), από τα Μαθηματικά της Α΄ Λυκείου αλλά και από τα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης (σελ. 35), δηλαδή ότι η απόσταση του σημείου $A(x, y)$ από την αρχή $O(0, 0)$ είναι

$$(OA) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

όπου, αν δεν το αναφέρουν μόνοι τους, τους θυμίζουμε ότι ουσιαστικά πρόκειται για εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος: $(OA)^2 = x^2 + y^2$.

Στη συνέχεια αναμένουμε αρκετοί από τους μαθητές να γενικεύσουν στις τρεις διαστάσεις προσθέτοντας το τετράγωνο της τρίτης συντεταγμένης:

$$(OA) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

όταν το σημείο έχει συντεταγμένες (x, y, z) .

Εδώ επιμένουμε να συνδέσουν αυτή την μάλλον αυτόματη γενίκευση με τα ήδη γνωστά τους θέματα όπως το Θεώρημα στη σελίδα 293 του βιβλίου της Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Λυκείου που αναφέρεται στο τετράγωνο της διαγωνίου ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Ε6: Τι ονομάζουμε **σύστημα αναφοράς**;

Οι μαθητές θα θυμηθούν αυτά που έχουν μάθει στο μάθημα της Φυσικής (Α΄ Λυκείου, σελ. 36 – 38) και στη συνέχεια θα τους δώσουμε τον ορισμό:

«Ονομάζουμε **σύστημα αναφοράς** κάθε σύστημα συντεταγμένων εφοδιασμένο με μια μονάδα μήκους για τη μέτρηση των αποστάσεων και ένα χρονόμετρο για τη μέτρηση του χρόνου».

Εδώ θα ανοίξει μια συζήτηση που θα επαναφέρει στη μνήμη των μαθητών τις πληροφορίες που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο της Φυσικής της Α΄ Λυκείου (σελίδες 19 – 21) σύμφωνα με τις οποίες:

«Η έννοια του χρόνου δημιουργήθηκε για να περιγράψει και να μετρήσει τους κοσμικούς ρυθμούς που συνεχώς επαναλαμβάνονται. Ο άνθρωπος συνειδητοποιεί το χρόνο παρακολουθώντας τις μεταβολές στον κόσμο που τον περιβάλλει...

...Ο φυσικός χρόνος μπορεί να μετρηθεί σε σχέση με τις περιοδικές κινήσεις της Γης.

...Στην επιστήμη συνυπάρχουν δύο αντίθετες αντιλήψεις για το χρόνο, αυτή της κλασικής Φυσικής, που δέχεται έναν παγκόσμιο ενιαίο χρόνο, ανεξάρτητο από τα πράγματα, που επιτρέπει τη μονοσήμαντη χρονομέτρηση των γεγονότων για όλα τα κινούμενα συστήματα και η άλλη της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας ... σύμφωνα με την οποία οι παρατηρητές που ανήκουν σε διαφορετικά συστήματα έχουν διαφορετικές απόψεις για τη χρονική διάρκεια των φαινομένων στα συστήματα αυτά».

Αναμένουμε να δημιουργηθεί πλούσιος διάλογος μεταξύ των μαθητών σχετικά με την έννοια του χρόνου, ο οποίος θα αφήσει παρακαταθήκες για το επόμενο στάδιο της δραστηριότητας. Εδώ μπορεί να γίνει αναφορά και σε ζητήματα μέτρησης του χρόνου και οργάνων μέτρησης ενώ θα είχε ενδιαφέρον να αναφερθεί απλώς, χωρίς ιδιαίτερη έμφαση, το γεγονός ότι το φως έχει σταθερή ταχύτητα σε όλα τα συστήματα αναφοράς συνδυάζοντάς το για παράδειγμα με το χρόνο που χρειάζεται το φως του Ήλιου για να φτάσει στη Γη. Επίσης πρέπει να διευκρινιστεί ότι στην κλασική Φυσική, για οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, αρκεί μια μονάδα μήκους και ένα ρολόι τοποθετημένο σε οποιοδήποτε σημείο του συστήματος (συνήθως στην αρχή Ο). Αυτό γίνεται διότι η κλασική Φυσική δέχεται τη δυνατότητα ακαριαίας μετάδοσης πληροφοριών και σημάτων στη φύση και επομένως κάθε παρατηρητής, όπου κι αν βρίσκεται, θα μετράει τον ίδιο χρόνο και το ίδιο μήκος.

***E8:** Για να παραστήσουμε τη ζέση μιας μύγας μέσα σε ένα δωμάτιο αρκεί ένα σύστημα συντεταγμένων όπως αυτό που φτιάξαμε πριν. Πώς θα παριστάνετε την κίνηση της μύγας στο δωμάτιο;*

Μπορεί ο εκπαιδευτικός να χρησιμοποιήσει κάποιο σχεδιαστικό πρόγραμμα για την κατασκευή ενός τρισδιάστατου συστήματος συντεταγμένων δείχνοντας στους μαθητές πως προκύπτουν οι συντεταγμένες ενός σημείου. Θα ήταν βολικό επίσης να δημιουργηθεί ένα animation με μια μικρή σφαίρα που να κινείται μέσα σε ένα κυβικό δωμάτιο. Παρόλα αυτά δεν είναι απαραίτητο αφού οι μαθητές μπορούν να «δουν» τόσο το σύστημα συντεταγμένων όσο και το κινούμενο αντικείμενο μέσα στην σχολική αίθουσα ενσωματώνοντας (embodied) τις έννοιες του χώρου.

Όταν μιλάμε για Γεωμετρία και μάλιστα για Γεωμετρία του χώρου, ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τρεις άξονες είναι αρκετό για τη μελέτη όλων των ιδιοτήτων των σχημάτων. Τα φυσικά φαινόμενα συμβαίνουν στο χώρο, γι αυτό η Φυσική συνδέεται στενά με τη Γεωμετρία. Η μελέτη όμως των φυσικών φαινομένων αφορά κάποιες φορές την κίνηση ή τη μεταβολή γι αυτό έχει ανάγκη μιας ακόμη μεταβλητής, του χρόνου t .

Όπως μετράμε την απόσταση δύο σημείων στο χώρο έτσι μετράμε και το χρόνο που πέρασε μεταξύ δύο γεγονότων.

Θέτουμε ερωτήσεις όπως

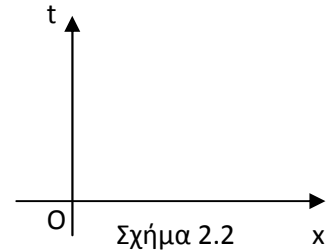
- προς τα πού πρέπει να είναι αυτός ο άξονας;
- πώς θα τον σχεδιάσουμε στο χαρτί;
- μήπως μπορούμε να απλοποιήσουμε την κατασκευή του συστήματος συντεταγμένων ώστε να σχεδιάσουμε και τον άξονα του χρόνου;
- έχετε δει κάπου αλλού διαγράμματα μήκους – χρόνου;

Θα φτάσουμε έτσι στα διαγράμματα μετατόπισης – χρόνου και ειδικά στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, αξιοποιώντας και τις απαντήσεις από την E4 σχετικά με την απλούστευση των αναπαραστάσεων των συντεταγμένων. Ταυτόχρονα αναφέρουμε (ή ζητάμε από τους μαθητές να αναφέρουν, αν θυμούνται) τον ορισμό του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (ΑΣΑ) και των δύο χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του.

- **Αδρανειακό** είναι ένα **σύστημα αναφοράς** στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton (νόμος της αδράνειας) δηλαδή, όταν σε ένα σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι ίση με μηδέν, δεν μεταβάλλεται η κινητική του κατάσταση.

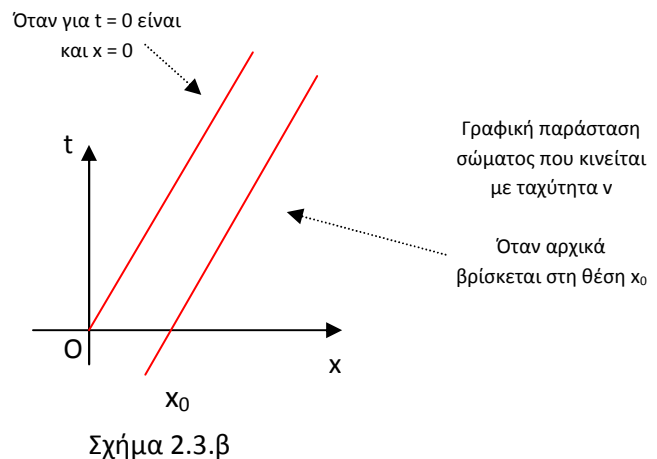
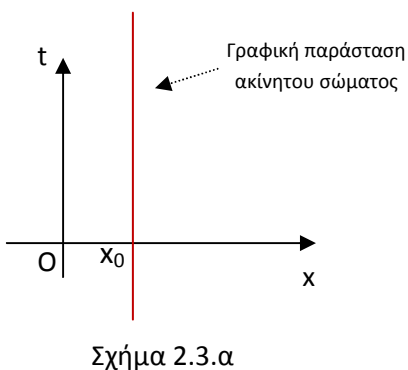
- Τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς έχουν δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:
 - 1) Όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι αδρανειακά.
 - 2) Οι νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι, όλες τις χρονικές στιγμές, σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Από την εμπειρία τους στο μάθημα της Φυσικής γίνεται κατανοητό από τους μαθητές ότι για να απλουστεύσουμε την αναπαράσταση θεωρούμε τον άξονα Ox κατά μήκος της κίνησης του σώματος και τους άλλους δύο χωρικούς άξονες κάθετους σε αυτόν και επομένως μπορούν να παραλειφθούν αφού οι αντίστοιχες συντεταγμένες δεν μεταβάλλονται – συνήθως τις θεωρούμε ίσες με 0. Ο τέταρτος άξονας, του χρόνου t , θα πρέπει και αυτός να είναι κάθετος στους άλλους τρεις, άρα και στον Ox . Έτσι προκύπτει φυσιολογικά το απλοποιημένο σύστημα αξόνων.



Eg: Πώς θα είναι η γραφική παράσταση ενός ακίνητου σώματος και πώς ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα v ;

Οι μαθητές θυμούνται από τη Φυσική τη σχέση $x = v \cdot t$, η οποία για v σταθερό συνδέει δύο ανάλογα ποσά και επομένως οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι οι παρακάτω



Η κόκκινη γραμμή, όταν τη θεωρούμε στον τετραδιάστατο χώρο, ονομάζεται **κοσμική γραμμή** του σώματος.

Εδώ πρέπει να θυμηθούν ότι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η κοσμική γραμμή με τον άξονα Ot δίνει την ταχύτητα με την οποία κινείται το σώμα, όπως γνωρίζουν από διάφορες σχολικές πηγές.

Παρατήρηση: Μέχρι την ερώτηση αυτή μπορούν όλες οι πληροφορίες να δοθούν με τη μορφή ερωτηματολογίου για το σπίτι ή να γίνει η επεξεργασία του με τη μορφή ομαδικής εργασίας, δηλαδή κάθε ομάδα να εργαστεί ανεξάρτητα σε διάφορους χώρους του σχολείου (βιβλιοθήκη, εργαστήριο υπολογιστών, αναγνωστήριο) για τη συλλογή των απαιτούμενων πληροφοριών.

ΕΙΟ: Ας θεωρήσουμε ένα τρένο που κινείται πάνω σε μια ευθύγραμμη ράγα με σταθερή ταχύτητα v . Ένας επιβάτης βρίσκεται καθισμένος στο μέσον του τρένου. Ποια είναι η κοσμική γραμμή του επιβάτη;

α) ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O που βρίσκεται πάνω στις ράγες;

β) ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O' που βρίσκεται πάνω στο τρένο;

Πώς συνδέονται οι συντεταγμένες του επιβάτη στα δύο ΑΣΑ;

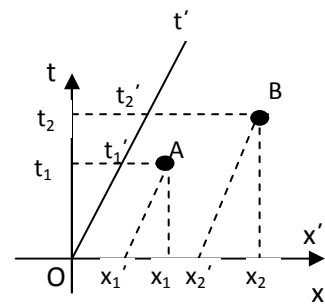
Οι μαθητές εύκολα θα απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα ότι είναι αυτή που σχεδιάσαμε πριν (σχήμα 2.3.β). Ειδικά, αν θεωρήσουμε ότι ο επιβάτης βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του ΑΣΑ O , όταν αρχίζει να μετρά ο χρόνος, η κοσμική γραμμή του στο σύστημα των ραγών είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Για το ερώτημα (β) πρέπει να δώσουμε στους μαθητές την εικόνα ενός τρένου που δεν «βλέπει» έξω, άρα ο επιβάτης στο συγκεκριμένο ΑΣΑ (O') παραμένει ακίνητος. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραλληλισμό με τον κάθε μαθητή ο οποίος, αν και η Γη προφανώς κινείται, εκείνος είναι ακίνητος «ως προς τη Γη». Με τον τρόπο αυτό, η ζητούμενη κοσμική γραμμή είναι αυτή που φτιάξαμε στο σχήμα 2.3.α, όπου η θέση του επιβάτη είναι στο σημείο $x = x_0$.

Αφού το ΑΣΑ του τρένου (O') κινείται ως προς το ΑΣΑ των ραγών (O) με ταχύτητα v , κατά μήκος του άξονα Ox (που ταυτίζεται με τον άξονα Ox'), η αρχή O' θα έχει κάθε χρονική στιγμή t συντεταγμένη, ως προς το ΑΣΑ O , $x = v \cdot t$. Επομένως, κάθε σώμα, που βρίσκεται στη θέση x_0 , στο ΑΣΑ O , στο ΑΣΑ O' θα βρίσκεται στη θέση $x_0 - vt$. Δηλαδή, οι συντεταγμένες (x, y, z) και (x', y', z') του σώματος στα δύο ΑΣΑ, O και O' αντίστοιχα, συνδέονται με τις σχέσεις

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Αν θεωρήσουμε δύο γεγονότα που συμβαίνουν μέσα στο τρένο σε δύο διαφορετικά σημεία, δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, η κλασική Φυσική ισχυρίζεται ότι τόσο ο επιβάτης πάνω στο τρένο (που μετράει με το ΑΣΑ O') όσο και ένας παρατηρητής που στέκεται ακίνητος στο έδαφος (που μετράει με το ΑΣΑ O) πρέπει να μετράνε την ίδια απόσταση μεταξύ των δύο σημείων και να υπολογίζουν την ίδια χρονική διαφορά. Δηλαδή πρέπει



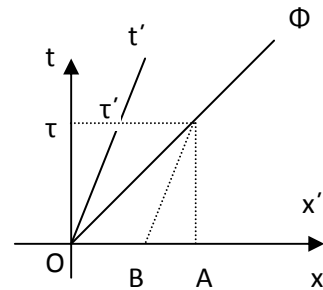
Σχήμα 2.4

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad t_2' - t_1' = t_2 - t_1$$

Αυτό, πάνω στο σύστημα αξόνων, φαίνεται στο σχήμα 2.4, όπου πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η μονάδα μέτρησης των αξόνων Ox και Ox' είναι η ίδια, ενώ οι μονάδες μέτρησης πάνω στους δύο άξονες του χρόνου είναι διαφορετικές.

Επι: Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο επιβάτης του τρένου (το οποίο κινείται με ταχύτητα v) εκπέμπει μια δέσμη φωτός (laser) προς το εμπρός μέρος. Ποια είναι η κοσμική ακτίνα του φωτονίου της δέσμης ως προς το ΑΣΑ O ; Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται το φως;

Η κοσμική γραμμή του επιβάτη είναι η Ot' και του φωτονίου η $O\Phi$ (σχήμα 2.5). Για ευκολία στους υπολογισμούς ορίζουμε τις τιμές πάνω στους άξονες Ox και Ot έτσι ώστε η κοσμική γραμμή του φωτονίου στο ΑΣΑ O να σχηματίζει γωνία 45° με τους άξονες. Σύμφωνα με το σχήμα 2.5, σε χρόνο τ , το φωτόνιο απέχει από την αρχή απόσταση OA (στο ΑΣΑ O) ενώ για τον επιβάτη (ΑΣΑ O') απόσταση $OB < OA$. Δηλαδή η ταχύτητα του φωτονίου στα δύο ΑΣΑ είναι διαφορετική!

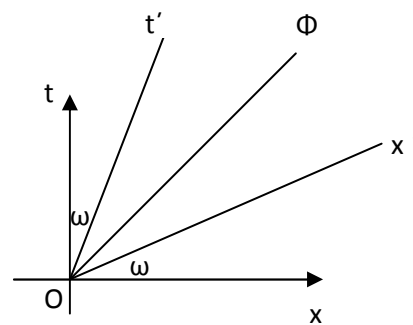


Σχήμα 2.5

Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα ΑΣΑ (στο κενό είναι $c = 300\,000 \text{ Km / s}$).

Πρέπει επομένως, σε ίσους χρόνους να διανύει ίσες αποστάσεις. Δηλαδή δεν αρκεί να σχηματίζει γωνία $o Ot'$ με τον Ot . Πρέπει και ο Ox' να σχηματίζει ίση γωνία με τον Ox , ώστε η κοσμική γραμμή του φωτονίου να εξακολουθεί να είναι διχοτόμος της γωνίας των αξόνων σε κάθε ΑΣΑ. Τότε βέβαια πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα και η βαθμολόγηση των αξόνων Ox' και Ot' .

Για να σχηματίζει γωνία 45° η κοσμική γραμμή του φωτονίου πρέπει η ταχύτητά του να είναι ίση με 1, γιατί τότε $x = t$ και επομένως η $O\Phi$ είναι πράγματι η διχοτόμος της γωνίας των αξόνων. Η ισότητα αυτή ισχύει αριθμητικά και όχι ως μονάδες, δηλαδή 2 μέτρα δεν είναι ίσα με 2 sec. Για να μπορούμε να γράφουμε τέτοιες ισότητες χωρίς να υπάρχει ανάγκη εξήγησης τέτοιων



Σχήμα 2.6

θεμάτων, αντικαθιστούμε το χρόνο t με το γινόμενο $u = ct$, το οποίο έχει μονάδες μήκους αλλά αριθμητικά έχει τις ίδιες τιμές με το t , αφού $c = 1$. Τότε όμως, η γωνία

ω που σχηματίζουν οι άξονες του ΑΣΑ Ο' με τους αντίστοιχους άξονες του ΑΣΑ Ο είναι τέτοια ώστε

$$\epsilon\phi\omega = \frac{v}{c}$$

όπου v είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται το ΑΣΑ Ο' ως προς το ΑΣΑ Ο.

Ε12: Πότε η γωνία του άξονα Ot' θα σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα Ot; Μπορεί η γωνία αυτή να γίνει μεγαλύτερη από 45°; Τι θα σήμαινε αυτό;

Επειδή $\epsilon\phi 45^\circ = 1$, θα ήταν $v = c$, δηλαδή το ΑΣΑ Ο' θα κινούνταν ως προς το ΑΣΑ Ο με ταχύτητα c, δηλαδή στο παράδειγμά μας το τρένο θα κινούνταν με την ταχύτητα του φωτός. Προφανώς η γωνία αυτή δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από 45° γιατί τότε το τρένο (ή οποιοδήποτε υλικό αντικείμενο) θα έτρεχε με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, πράγμα που είναι αδύνατο.

Ε13: Ας θεωρήσουμε το γνωστό τρένο με τον γνωστό επιβάτη που κινούνται πάνω στις ράγες με ταχύτητα v. Το τρένο έχει μήκος 2a και ο επιβάτης κάθεται ακριβώς στο μέσον του τρένου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο επιβάτης (από το σημείο M) στέλνει δύο φωτεινές ακτίνες (laser) μία προς το πίσω μέρος του τρένου (σημείο A) και μία προς το εμπρός μέρος του τρένου (σημείο B).

- Ποια είναι η κοσμική γραμμή κάθε φωτονίου;
- Αν αντί για φωτεινή ακτίνα, ο επιβάτης ρίξει ένα βλήμα πυροβόλου όπλου, ποια θα είναι η κοσμική γραμμή του βλήματος;

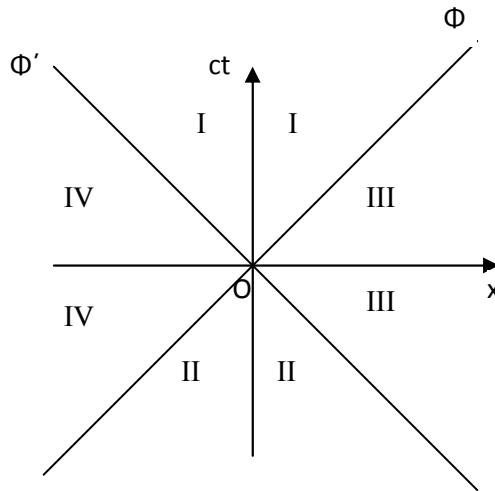
Θα ξεκινήσουμε προσπαθώντας να σχεδιάσουμε την κοσμική γραμμή κάθε φωτεινής ακτίνας.

- Η φωτεινή ακτίνα MB κινείται με ταχύτητα c. Με τι ταχύτητα κινείται η φωτεινή ακτίνα MA;

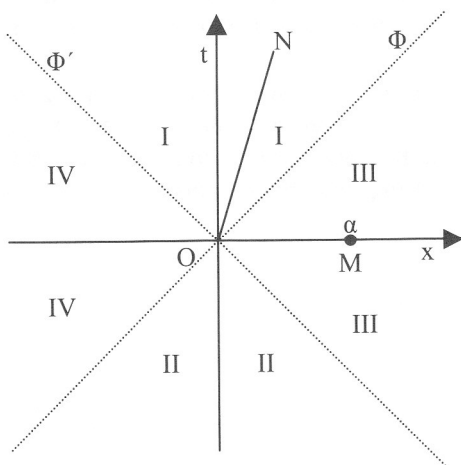
Προφανώς, επειδή η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος, η ακτίνα MA κινείται με ταχύτητα -c. Άρα η κοσμική γραμμή της θα είναι η διχοτόμος της γωνίας του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, έστω ΟΦ'.

Αφού οι ταχύτητες των υλικών σωμάτων είναι μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, κάθε κίνηση με σταθερή ταχύτητα παριστάνεται με μια ευθεία γραμμή ON, η οποία σχηματίζει με τον άξονα Oot γωνία από -45° έως +45°, δηλαδή

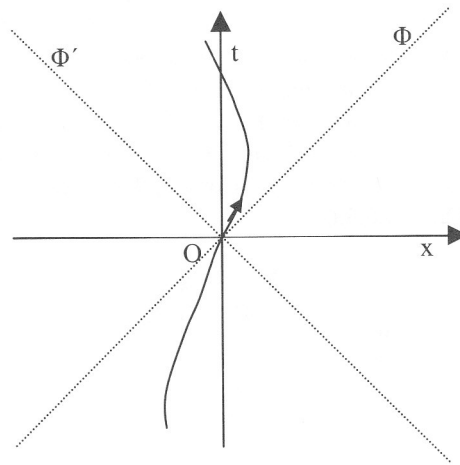
βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Phi O \Phi'$ (περιοχές I και II σχήμα 2.7) και η κλίση της εξαρτάται από την ταχύτητα με την οποία κινείται, όπως είδαμε πριν.



Σχήμα 2.7



Σχήμα 2.8.α



Σχήμα 2.8.β

Στο σχήμα 2.8.α η ON παριστάνει την κοσμική γραμμή ενός βλήματος, που εκτοξεύεται με σταθερή ταχύτητα προς το εμπρός μέρος του τρένου. Αν εκτοξευόταν προς το πίσω μέρος θα έπρεπε να βρίσκεται στην αριστερή περιοχή I. Γενικά (σχήμα 2.8.β) η κοσμογραμμή ενός κινούμενου υλικού σώματος είναι μια καμπύλη, που σε κάθε σημείο της η κλίση της εφαπτομένης της ως προς τον άξονα Ot εκφράζει τη στιγμιαία ταχύτητά του. Επειδή η κλίση αυτή πρέπει να είναι από -1 έως +1, η καμπύλη βρίσκεται όλη μέσα στις δύο κατακορυφών γωνίες που ορίζουν τις περιοχές I και II. Μάλιστα, αν γενικεύσουμε στις τέσσερις διαστάσεις, τότε ο επιτρεπτός χώρος γίνεται ένας κώνος με γενέτειρες τις κοσμογραμμές του φωτός προς κάθε κατεύθυνση, γι αυτό και λέγεται **κώνος φωτός**.

Για $t = 0$, $x = 0$, η κορυφή του κώνου είναι το O ενώ για $t = 0$, $x = a$, η κορυφή του κώνου είναι το σημείο M (σχήμα 2.8.α).

Για έναν παρατηρητή στην αρχή των αξόνων O , ο κώνος φωτός χωρίζει τον τετραδιάστατο χώρο (χωρόχρονο) σε διάφορες περιοχές. Το σημείο O παριστάνει το παρόν ($t = 0$). Στο σχήμα 2.8.α η περιοχή I βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός και αφορά το μέλλον ($t > 0$) και η περιοχή II το παρελθόν ($t < 0$). Οι περιοχές III και IV αφορούν ταχύτητες μεγαλύτερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό και φυσικά είναι απρόσιτες για τον παρατηρητή O . (Ακόμα και αν συμβεί κάποιο γεγονός σε ένα σημείο αυτών των περιοχών, αυτό «απομακρύνεται» με τόσο μεγάλες ταχύτητες που κανένα «σήμα» δεν μπορεί να φτάσει στον παρατηρητή στο O).

Ας θεωρήσουμε ότι ένα υλικό σώμα κινείται στο χώρο με ταχύτητα \vec{v} . Αναλύουμε την ταχύτητα αυτή σε συνιστώσες v_x , v_y , v_z κατά μήκος των τριών χωρικών αξόνων Ox , Oy , Oz του τετραδιάστατου συστήματος συντεταγμένων. Τότε, γνωρίζουμε ότι:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Όμως, $x = v_x \cdot t$, $y = v_y \cdot t$ και $z = v_z \cdot t$, άρα

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + v_z^2 t^2 \\ &= (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cdot t^2 \\ &= (vt)^2 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = (vt)^2}$$

Αν αντί για υλικό σώμα, πρόκειται για φωτόνιο, τότε είναι

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2} \quad (*)$$

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση του κώνου στον Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο είναι της μορφής $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2$, όπου η κορυφή του κώνου βρίσκεται στο σημείο (x_0, y_0, z_0) . Γενικεύοντας στις τέσσερις διαστάσεις μπορούμε να πούμε ότι η (*) παριστάνει έναν κώνο στις τέσσερις διαστάσεις, τον κώνο φωτός. Μάλιστα, αν το γεγονός δεν συμβαίνει στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων O , αλλά σε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) τη χρονική στιγμή t_0 , τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = v^2 (t - t_0)^2} \quad (**)$$

Επειδή $v < c$, σε κάθε περίπτωση η κοσμική γραμμή ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα v βρίσκεται πράγματι εντός του κώνου φωτός. Αν θεωρήσουμε

$$\beta = \frac{v}{c} < 1$$

τότε

$$x^2 + y^2 + z^2 = (vt)^2 < (ct)^2$$

δηλαδή το σημείο (x, y, z) απέχει από την αρχή O απόσταση μικρότερη από αυτή που απέχει ένα φωτόνιο.

Ε14: Στην κλασική Φυσική, είδαμε ότι οι συντεταγμένες (x, y, z) και (x', y', z') του επιβάτη στα δύο ΑΣΑ (των ραγών O και του τρένου O' αντίστοιχα) συνδέονται με τις σχέσεις: $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$. Όμως διαπιστώσαμε (Ε11) ότι για το φως αυτές δεν δίνουν σωστά αποτελέσματα. Ποιες σχέσεις τελικά είναι αυτές που συνδέουν τις συντεταγμένες στα δύο αυτά ΑΣΑ;

Θα ξεκινήσουμε θέτοντας κάποιες παραδοχές που θα κάνουν τον προσδιορισμό των ζητούμενων σχέσεων πιο απλό και πιο σαφή.

Μπορούμε να επιλέξουμε έτσι τις συντεταγμένες στα δύο συστήματα, ώστε οι αρχές τους να συμπίπτουν όταν τα ρολόγια τους δείχνουν μηδέν. Δηλαδή, να υποθέσουμε ότι όταν $t = 0$ τότε και $t' = 0$ και μάλιστα ότι το σημείο O ταυτίζεται με το O' (αμέσως μετά το O' – τρένο – αρχίζει να κινείται και επομένως τα δύο σημεία δεν ταυτίζονται πλέον).

Για τους χωρικούς άξονες θεωρούμε, όπως έχουμε ήδη κάνει, ότι το O' κινείται πάνω στον άξονα Ox και ότι τα επίπεδα συντεταγμένων $y = 0$ και $z = 0$ του O μπορούν να θεωρηθούν ως τα αντίστοιχα επίπεδα συντεταγμένων $y' = 0$ και $z' = 0$ του O' , με αντίστοιχες τις θετικές πλευρές. Επίσης υποθέτουμε ότι το επίπεδο $x' = 0$ του O' αντιστοιχεί στη σχέση $x = vt$ του O .

Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις που ψάχνουμε είναι αναλλοίωτες (δεν μεταβάλλονται) σε μια ταυτόχρονη αντιστροφή των αξόνων x και z σε αμφότερα τα συστήματα, ακολουθούμενη από μια εναλλαγή τονούμενων και άτονων συντεταγμένων.

$$x, y, z, t; x', y', z', t' \rightarrow -x', y', -z', t'; -x, y, -z, t$$

Δηλαδή θα πρέπει οι σχέσεις να ισχύουν και στην περίπτωση που θεωρήσουμε ως κινούμενο το ΑΣΑ O με ταχύτητα $-v$ ως προς το O' . (Η ταυτόχρονη αλλαγή προσήμου και στην συντεταγμένη z ή y γίνεται ώστε το σύστημα συντεταγμένων να παραμένει δεξιόστροφο).

Ας υποθέσουμε ότι ένα γεγονός έχει συντεταγμένες (x, y, z, t) στο ΑΣΑ O και (x', y', z', t') στο ΑΣΑ O' . Θεωρούμε αρχικά ότι κάθε συντεταγμένη στο O' εξαρτάται (γραμμικά) από όλες τις συντεταγμένες του γεγονότος στο O . Δηλαδή

$$y' = ax + \beta y + \gamma z + \delta t + \epsilon$$

Όμως, από την υπόθεσή μας η $y = 0$ πρέπει να συνεπάγεται την $y' = 0$. Άρα $\alpha x + \gamma z + \delta t + \varepsilon = 0$ και επομένως $y' = \beta y$. Αν εφαρμόσουμε μια αντιστροφή xz παίρνουμε $y = \beta y'$. Άρα $\beta = \pm 1$ και επειδή πρέπει, όταν η ταχύτητα $v = 0$ να προκύπτει ταυτότητα συντεταγμένων, βρίσκουμε ότι $\beta = 1$. Ακολουθώντας την ίδια λογική και για το z' , καταλήγουμε στο ότι οι δύο σχέσεις είναι οι ίδιες όπως και στην κλασική Φυσική, δηλαδή

$$y' = y, z' = z$$

Στη συνέχεια, έστω ότι $x' = Ax + By + \Gamma z + \Delta t + E$. Από τις υποθέσεις μας, η $x = vt$ πρέπει να συνεπάγεται την $x' = 0$. Άρα $Avt + By + \Gamma z + \Delta t + E = 0$, δηλαδή $B=\Gamma=E=0$ και $Av + \Delta = 0$. Για λόγους παράδοσης συμβολίζουμε τον συντελεστή του x με το γράμμα γ , δηλαδή $A = \gamma$. Έχουμε $x' = \gamma x - \gamma vt$ δηλαδή

$$x' = \gamma (x - vt)$$

Μια αντιστροφή xy δίνει $-x = \gamma (-x' - vt')$ = $-\gamma (x' + vt')$, δηλαδή

$$x = \gamma (x' + vt')$$

Ακολουθώντας την κλασική Φυσική, όπου $t = t'$, παίρνουμε ότι $\gamma = 1$ και επομένως

$$x' = x - vt$$

όπως είχαμε βρει. Τώρα (και όχι νωρίτερα) εφαρμόζουμε τον νόμο του Einstein, σύμφωνα με τον οποίο οι $x = ct$ και $x' = ct'$ ισχύουν ταυτόχρονα (αυτό σημαίνει ότι το φως κινείται με την ίδια ταχύτητα σε κάθε ΑΣΑ). Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε τις εξισώσεις

$$ct' = \gamma t (c - v) \quad \text{και} \quad ct = \gamma t' (c + v)$$

τις οποίες πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και διαιρούμε με το tt' , οπότε παίρνουμε

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

ή

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Αντικαθιστώντας το v/c με β βρίσκουμε τελικά ότι

$$\gamma = \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(επιλέγουμε τη θετική ρίζα ώστε για $v = 0$ να προκύπτει $x' = x$). Αυτή η τελευταία σχέση ονομάζεται **παράγοντας Lorentz** και παίζει καθοριστικό ρόλο στη θεωρία της ειδικής σχετικότητας.

Αντικαθιστώντας το x' από την πρώτη σχέση στη δεύτερη βρίσκουμε επίσης ότι $x' = \gamma [\gamma (x - vt) + vt'] = \gamma^2 x - \gamma vt + vt'$ και λύνοντας ως προς t' βρίσκουμε τελικά

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Επομένως συνοψίζοντας, οι εξισώσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες στα δύο ΑΣΑ είναι οι

$x' = \gamma (x - vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$ <p>όπου το $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.</p>

<p>Ε15: Είδαμε ότι για ένα φωτόνιο ισχύει $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ ή για $u = ct$, $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$. Δείξτε ότι η ποσότητα $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ παραμένει σταθερή σε κάθε ΑΣΑ, δηλαδή αν $S'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$ η αντίστοιχη ποσότητα στο ΑΣΑ O', τότε ισχύει $S^2 = S'^2$. Η ποσότητα S^2 ορίζει την χωροχρονική απόσταση στον τετραδιάστατο χώρο.</p>

Αντικαθιστώντας τους τύπους του Lorentz για τη μετάβαση από το ένα ΑΣΑ στο άλλο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2 = \gamma^2 (x - \beta u)^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (u - \beta x)^2 \\ &= \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 x\beta u + \gamma^2 \beta^2 u^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 u^2 + 2\gamma^2 x\beta u - \gamma^2 \beta^2 x^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) u^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - u^2 \\ &= S^2. \end{aligned}$$

<p>Ε16: Να ορίσετε τις μονάδες μέτρησης πάνω στους άξονες των δύο συστημάτων συντεταγμένων.</p>
--

Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους x και $u = ct$, για να εκφράζονται όλες οι διαστάσεις σε μονάδες μήκους. Για ευκολία ακολουθούμε τη σύμβαση που θεωρήσαμε στην Ε11, δηλαδή οι μονάδες επιλέγονται κατάλληλα ώστε οι κοσμικές γραμμές ενός φωτονίου να είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του συστήματος συντεταγμένων.

Η ΟΦ αντιστοιχεί στην ευθεία $x - u = 0$.

Η ΟΦ' αντιστοιχεί στην ευθεία $x + u = 0$.

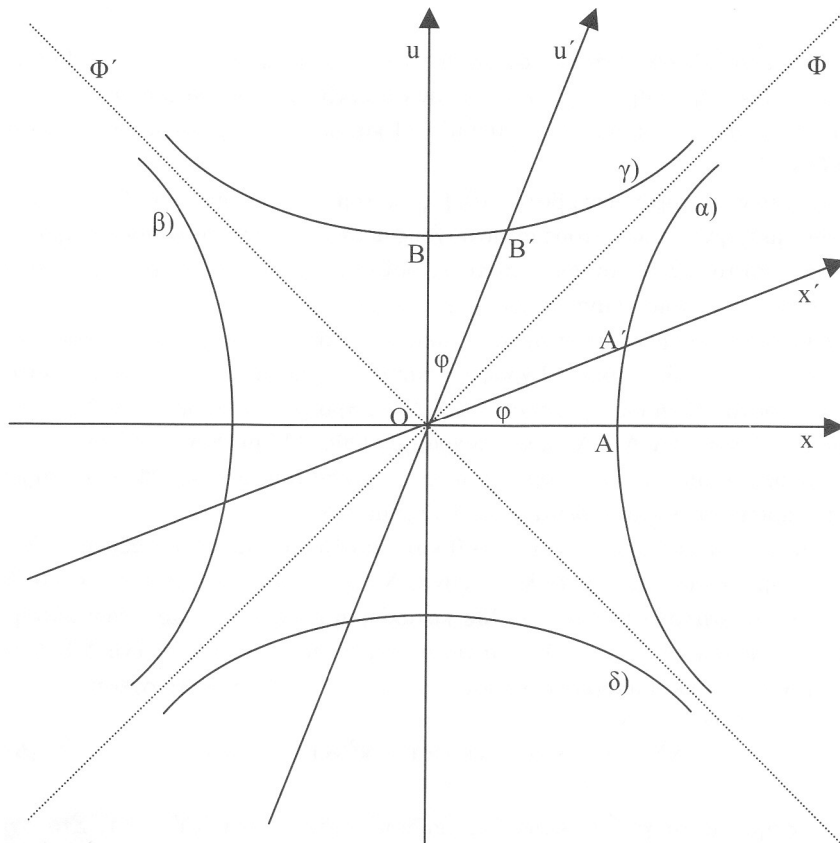
Οι άξονες x' , u' του ΑΣΑ O' σχηματίζουν την ίδια γωνία φ ($\epsilon\varphi\varphi = v/c = \beta$) με τους άξονες x , u , ώστε οι $O\Phi$, $O\Phi'$ να παραμένουν αμετάβλητες και να διχοτομούν αντίστοιχα τις γωνίες των αξόνων x' , u' .

Οι τύποι του Lorentz γίνονται για $u = ct$, $u' = ct'$:

$$x' = \gamma(x - \beta u) \quad , \quad u' = \gamma(u - \beta x)$$

Ο άξονας x' θα είναι η ευθεία πάνω στην οποία είναι $u' = 0$, δηλαδή $u = \beta x$.

Ο άξονας u' θα είναι η ευθεία πάνω στην οποία $x' = 0$, δηλαδή $x = \beta u$.



Σχήμα 2.9

Σχεδιάσαμε αυτούς τους άξονες μαζί με τις υπερβολές $x^2 - u^2 = 1$ (κλάδοι α και β) και $x'^2 - u'^2 = -1$ (κλάδοι γ και δ). Από την E15, αφού η χωροχρονική απόσταση είναι σταθερή σε κάθε ΑΣΑ, πρέπει οι υπερβολές αυτές να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τονούμενες, δηλαδή με τις $x'^2 - u'^2 = 1$ και $x'^2 - u'^2 = -1$ αντίστοιχα.

Το σημείο A, στο οποίο τέμνει η υπερβολή $x^2 - u^2 = 1$, τον άξονα x αντιστοιχεί προφανώς στο σημείο (1, 0) για το ΑΣΑ O. Αντίστοιχα το A' είναι το σημείο (1, 0) πάνω στον άξονα x' για το ΑΣΑ O'. Παρόμοια, το σημείο B πάνω στον άξονα u είναι το (0,1) για το ΑΣΑ O και το B' είναι το (0, 1) για το ΑΣΑ O'.

Επομένως, σχεδιάζοντας τις δύο υπερβολές πάνω στο σύστημα Oxy και φέρνοντας τους άξονες x' και u' , αυτομάτως ορίζονται οι κατάλληλες μονάδες

μέτρησης στο ΑΣΑ Ο'. Γι αυτό οι δύο υπερβολές ονομάζονται **καμπύλες βαθμονόμησης**.

Χωροχρονικά διαγράμματα όπως αυτό στο σχήμα 2.9 ονομάζονται **διαγράμματα Minkowski**.

Ε17: Ας θεωρήσουμε ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα v , πάνω σε ευθύγραμμες ράγες. Οι συντεταγμένες (x, y, z, t) του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (ΑΣΑ) του οποίου ο άξονας Ox είναι η ευθεία των ραγών με θετική κατεύθυνση τη φορά κίνησης του τρένου και οι συντεταγμένες (x', y', z', t') του αδρανειακού συστήματος αναφοράς του οποίου ο άξονας $O'x'$ είναι κατά μήκος του τρένου με θετική φορά ίδια με το ΑΣΑ O , συνδέονται με τις σχέσεις

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma(t - \beta x/c)$$

όπου το $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = v/c$.

Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ως συνάρτηση των (x', y', z', t') .

Προφανώς εδώ οι μαθητές πρέπει να επιλύσουν τις εξισώσεις

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad \text{και} \quad t' = \gamma(t - \beta x/c)$$

ως προς x και t , αφού οι άλλες δύο εξισώσεις παραμένουν ως έχουν. Είναι

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma \beta ct \\ t' = \gamma t - \gamma \beta x/c \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} \gamma x - \gamma \beta ct = x' \\ -\gamma \beta x + \gamma ct = ct' \end{cases}$$

και λύνοντας με τη μέθοδο των οριζουσών βρίσκουμε ότι

$$D = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$$

ενώ

$$D_x = \begin{vmatrix} x' & -\gamma\beta \\ ct' & \gamma \end{vmatrix} = \gamma(x' + \beta ct') \quad \text{και} \quad D_{ct} = \begin{vmatrix} \gamma & x' \\ -\gamma\beta & ct' \end{vmatrix} = \gamma(ct' + \beta x')$$

άρα

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad \text{και} \quad t = \gamma(t' + \beta x'/c)$$

Οι τύποι αυτοί δίνουν ακριβώς το αναμενόμενο αποτέλεσμα, αφού είναι σαν να κινούνται οι ράγες ως προς το τρένο με ταχύτητα $-v$.

Ε18: Γνωρίζουμε ότι για ένα φωτόνιο ισχύει $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ ή για $u = ct$, $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$. Δείξτε ότι η ποσότητα $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ παραμένει σταθερή σε κάθε ΑΣΑ, δηλαδή αν $S'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$ η αντίστοιχη ποσότητα στο ΑΣΑ O' , τότε ισχύει $S^2 = S'^2$. Η ποσότητα S^2 ορίζει την **χωροχρονική απόσταση** στον τετραδιάστατο χώρο.

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η απόσταση δύο σημείων στο χώρο είναι ποσότητα αναλλοίωτη, ανεξάρτητη από το σύστημα των συντεταγμένων στο οποίο γίνεται η μέτρηση. Στη θεωρία της σχετικότητας, στα συστήματα αναφοράς στα οποία γίνεται η γεωμετρική απεικόνιση της κίνησης, ποσότητα αναλλοίωτη είναι η χωροχρονική απόσταση S^2 . Η προσθήκη στις τρεις μεταβλητές του χώρου x, y, z μιας ακόμη μεταβλητής t ή ct του χρόνου οδηγεί στον χώρο Minkowski (\mathcal{M}). Σε κάθε κίνηση, οι τέσσερις μεταβλητές x, y, z, t αποτελούν ένα σύνολο μεταβλητών οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω του S^2 , το οποίο είναι το ίδιο σε κάθε ΑΣΑ. Πράγματι, αντικαθιστώντας τους τύπους του Lorentz για τη μετάβαση από το ένα ΑΣΑ στο άλλο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2 = \gamma^2 (x - \beta u)^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (u - \beta x)^2 \\ &= \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 x\beta u + \gamma^2 \beta^2 u^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 u^2 + 2\gamma^2 x\beta u - \gamma^2 \beta^2 x^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) u^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - u^2 \\ &= S^2. \end{aligned}$$

Επομένως διαπιστώνουμε ότι η ποσότητα αυτή παραμένει σταθερή σε κάθε ΑΣΑ. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο της «απόστασης» δύο γεγονότων στον τετραδιάστατο χώρο.

Το πέρασμα από την τρισδιάστατη γεωμετρία στη γεωμετρία του χώρου Minkowski, δεν γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γίνεται η επέκταση της γεωμετρίας δύο διαστάσεων του επιπέδου σε γεωμετρία τριών διαστάσεων του χώρου. Στη θεωρία της σχετικότητας η τέταρτη μεταβλητή σχετίζεται με το χρόνο και για την ομοιομορφία των διαστάσεων δίνεται συνήθως σε μήκος φωτός ct .

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου από την αρχή των αξόνων είναι $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Τα πρόσημα όλων των όρων είναι θετικά. Στον χώρο Minkowski αντίστοιχα $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - u^2$. Τα τρία πρόσημα είναι θετικά αλλά το τέταρτο είναι αρνητικό. Φαίνεται καθαρά ότι δεν είναι όπως στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Εκεί όλες οι διευθύνσεις είναι ισοδύναμες και για όλες η

μονάδα μήκους είναι η ίδια. Η μονάδα μήκους ορίζεται από τη σχέση $x^2 + y^2 = 1$ για το επίπεδο και από τη σχέση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ στο χώρο. Στο χώρο Minkowski όμως οι άξονες x , y , z (χωροειδείς) και ο ct (χρονοειδής) δεν είναι ισοδύναμοι. Για κάθε διεύθυνση η μονάδα μήκους είναι διαφορετική και ορίζεται από τη σχέση

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = \pm 1$$

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορούμε να ορίσουμε για παράδειγμα στοι επίπεδο, άπειρο αριθμό ορθογωνίων συστημάτων συντεταγμένων, που έχουν κοινή αρχή και το ένα προκύπτει από το άλλο με στροφή των αξόνων κατά την ίδια φορά και κατά την ίδια γωνία. Στον τετραδιάστατο χώρο όμως στο επίπεδο x , ct , πάλι μπορούμε να ορίσουμε άπειρο αριθμό ισοδύναμων συστημάτων, στα οποία όμως η στροφή των αξόνων γίνεται κατά την ίδια γωνία αλλά κατά αντίθετη φορά και μόνο μέσα σε ορισμένη περιοχή για κάθε άξονα, λόγω του ορίου της ταχύτητας του φωτός.

Για τους παραπάνω λόγους, η γεωμετρία του χώρου Minkowski, μπορεί να χαρακτηριστεί ως **ψευδοευκλείδεια**, ο χώρος **ψευδοευκλείδειος** και το αντίστοιχο Πυθαγόρειο θεώρημα ως **ψευδοπυθαγόρειο** θεώρημα. Παρόλο το χαρακτηρισμό αυτό όμως, ο χώρος αυτός είναι πραγματικός, στον οποίο συμβαίνουν τα φυσικά φαινόμενα. Ο χώρος αυτός των τεσσάρων μεταβλητών δεν είναι απλά ένας χώρος τριών διαστάσεων στον οποίο προσθέτουμε ακόμα μία, αλλά δίνει μια γεωμετρική απεικόνιση και ερμηνεία των φυσικών φαινομένων που συμβαίνουν στο χωρόχρονο σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας. Η σχέση του S^2 υποδεικνύει ότι μπορούμε να κάνουμε πιο βολική αυτή τη γεωμετρική ερμηνεία και την ψευδοευκλείδεια να τη δούμε τυπικά ως Ευκλείδεια αν θέσουμε $u = ict$, όπου i η φανταστική μονάδα των μιγαδικών αριθμών. Θα έχουμε τότε $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$. Η εισαγωγή της φανταστικής μονάδας δεν σημαίνει ότι εισάγεται κάτι το εξωπραγματικό, αλλά απλοποιεί τα πράγματα και βοηθά στους αλγεβρικούς υπολογισμούς με βάση την Ευκλείδεια Γεωμετρία, στην οποία και οι τέσσερις συντεταγμένες είναι ισοδύναμες.

Ε19: *Ας θεωρήσουμε το γνωστό τρένο, που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 0,6 c$ ως προς το ΑΣΑ O . Ο επιβάτης του τρένου τεντώνει το χέρι του και χρησιμοποιώντας μια μετροταινία που βρίσκεται στο χαρτοφύλακά του βρίσκει ότι το χέρι του έχει μήκος 70 cm. Πόσο είναι το μήκος του χεριού του επιβάτη όπως το μετράει ο παρατηρητής O (που βρίσκεται στο έδαφος και βλέπει το χέρι να περνάει από μπροστά του);*

Οι συντεταγμένες των άκρων του χεριού του επιβάτη στο O' (ΑΣΑ του τρένου) είναι $x_1' = 0$ και $x_2' = 0,7$ m. Για να βρει ο O το μήκος του χεριού του

επιβάτη πρέπει να μετρήσει ταυτόχρονα (στο σύστημά του) τις συντεταγμένες του χεριού του επιβάτη. Πρέπει επομένως να είναι $t_1 = t_2$ δηλαδή $\Delta t = 0$. Είναι (E1)

$$x_1' = \gamma (x_1 - vt_1) \quad \text{και} \quad x_2' = \gamma (x_2 - vt_2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t)$ και επειδή $\Delta t = 0$, είναι $\Delta x' = \gamma \Delta x$ άρα

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το μήκος του χεριού του επιβάτη φαίνεται να είναι μικρότερο για τον παρατηρητή Ο από ότι για τον παρατηρητή Ο', κατά συντελεστή γ . Στην προκειμένη περίπτωση, το γ είναι ίσο με

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,64}} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

άρα το μήκος του χεριού του επιβάτη, όπως το μετράει ο παρατηρητής Ο είναι

$$\Delta x = 0,56 \text{ m}$$

E20: Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι το μήκος του χεριού του επιβάτη είναι διαφορετικό για κάθε έναν από τους δύο παρατηρητές. Ποιο όμως είναι το πραγματικό του μήκος;

Η ερώτηση είναι παγίδα. Δεν υπάρχει η έννοια του «πραγματικού» μήκους. Άλλωστε δεν υπάρχει απόλυτος χώρος και επομένως δεν έχει νόημα να μιλάμε για αληθινό ή πραγματικό και για ψεύτικο ή πλασματικό μήκος. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ως κάτι ιδιαίτερο, το μήκος που μετράμε σε εκείνο το ΑΣΑ που το χέρι είναι ακίνητο (προφανώς ο επιβάτης ξέρει κάτι παραπάνω από τους υπόλοιπους για το χέρι του – ξέρει;) και αυτό είναι στην περίπτωσή μας το ΑΣΑ Ο'. Πράγματι, το χέρι δεν κινείται ως προς το τρένο. Τότε το μήκος του (που είναι 0,70 m) παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του, την οποία ονομάζουμε **μήκος ηρεμίας** ή **ιδιομήκος**.

Ορίζουμε λοιπόν ως **ιδιομήκος** το μήκος που μετρά ένας παρατηρητής ως προς ένα ΑΣΑ στο οποίο το αντικείμενο είναι ακίνητο.

Άξιο αναφοράς είναι επίσης το γεγονός που προκύπτει ότι αν ένα σώμα κινείται με ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό, τότε το μήκος του τείνει στο μηδέν. Παρατηρείται δηλαδή μια **συστολή του μήκους**.

E21: Θεωρείστε μία ράβδο μήκους 5 m και μια κλειστή αίθουσα με διαστάσεις 4 m μήκος, 0,60 m πλάτος και 3 m ύψος. Χωράει η ράβδος στην αίθουσα; Πώς θα μπορούσαμε να βάλουμε στην ίδια αίθουσα μια ράβδο μήκους 8 μέτρων;

Προφανώς πρόκειται για απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Η ράβδος χωράει στην αίθουσα αν την τοποθετήσουμε ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές το μήκος και το ύψος. ($5^2 = 4^2 + 3^2$)

Στην περίπτωση της ράβδου των 8 μέτρων, τα πράγματα γίνονται μάλλον δύσκολα. Η λογική λέει ότι δεν χωράει η ράβδος. Παρόλα αυτά θα δείξουμε ότι όχι μόνο χωράει αλλά χωράει και οριζόντια! Πράγματι, σύμφωνα με αυτά που λέγαμε προηγουμένως, αν τρέξουμε κρατώντας τη ράβδο οριζόντια με ταχύτητα τέτοια ώστε $\gamma = 2$, δηλαδή $v = 0,866 c$, τότε το μήκος της ράβδου για το ΑΣΑ της αίθουσας είναι μόλις 4 m και επομένως χωράει! Ένας άνθρωπος, λοιπόν, εισέρχεται στην αίθουσα με την παραπάνω ταχύτητα, οπότε το κοντάρι έχει συσταλεί, και κάποιος φίλος του κλείνει πίσω του την πόρτα της αίθουσας.

E22: Ας λύσουμε μια ακόμη απορία. Το κοντάρι που «τρέχει» μικραίνει και γίνεται το μισό. Όμως τότε δεν θα γίνει μισό και το μήκος της αίθουσας; Πώς χωράει η ράβδος των 8 μέτρων στην αίθουσα των 2 μέτρων;

Ας δούμε τι γίνεται στο ΑΣΑ της ράβδου (εκεί που η ράβδος είναι ακίνητη). Η ανοιχτή αίθουσα των 2 μέτρων κινείται προς την ακίνητη ράβδο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επενδύσει την αίθουσα με πολύ γερό σκυρόδεμα και επομένως η ράβδος δεν μπορεί να διαπεράσει το τοίχωμα. Επομένως η αποθήκη εξακολουθεί να κινείται προς το πίσω άκρο της ράβδου συμπαρασύροντας και το εμπρός άκρο. Όμως, το πίσω άκρο παραμένει ακίνητο, αφού δεν ξέρει ακόμα ότι το μπροστά άκρο συγκρούστηκε, λόγω της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης όλων των σημάτων. Ακόμη κι αν το «σήμα» (στην περίπτωση αυτή το ελαστικό ωστικό κύμα) διαδοθεί με την ταχύτητα του φωτός, θα πρέπει να διανύσει απόσταση 8 m, έναντι των 6 m που έχει να διανύσει η μπροστινή όψη της αίθουσας, μέχρι να μπει όλη η ράβδος μέσα. Επομένως η ράβδος θα μπει μέσα στην αίθουσα και μάλιστα άνετα αφού μέχρι να φτάσει το σήμα στο πίσω μέρος της αυτή θα έχει μπει ολόκληρη. (Αν η ταχύτητα ήταν 0,75 c τότε το σήμα θα έφτανε ακριβώς τη στιγμή που η ράβδος έμπαινε όλη στην αίθουσα).

E23: Ο γνωστός επιβάτης του γνωστού τρένου κοιτάζει το ρολόι του – κλείνει τα μάτια του και τα ανοίγει πάλι. Διαπιστώνει πως ο χρόνος που πέρασε είναι 2sec. Να βρεθεί η χρονική διάρκεια κατά την οποία είχε τα μάτια του κλειστά όπως την μετρά ο παρατηρητής O.

Θεωρούμε ότι η αρχή των αξόνων του ΑΣΑ O' είναι πάνω στον επιβάτη. Θεωρούμε επίσης δύο γεγονότα. Πρώτα το γεγονός ο επιβάτης να κλείνει τα μάτια του. Οι συντεταγμένες του γεγονότος ως προς το O' είναι $t_1', x_1' = 0$ ενώ ως προς το O είναι t_1, x_1 .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $t_1 = \gamma(t_1' + \beta x_1'/c)$ βρίσκουμε ότι $t_1 = \gamma t_1'$.

Δεύτερο γεγονός, ο επιβάτης ανοίγει τα μάτια του. Οι συντεταγμένες του γεγονότος ως προς το O' είναι $t_2', x_2' = 0$ ενώ ως προς το O είναι t_2, x_2 .

Επομένως, από τη σχέση $t_2 = \gamma(t_2' + \beta x_2'/c)$ βρίσκουμε ότι $t_2 = \gamma t_2'$.

Δηλαδή

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το χρονικό διάστημα, όπως το μετράει ο O έχει μεγαλώσει κατά τον συντελεστή γ . Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε **διαστολή του χρόνου**.

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $\Delta t' = 2\text{sec}$, άρα $\Delta t = 2,5 \text{ sec}$.

Όπως και πριν για το μήκος, έτσι και τώρα δεν υπάρχει κάποιο χρονικό διάστημα «σωστό». Μπορούμε όμως να ξεχωρίσουμε το χρονικό διάστημα που μετρά ο παρατηρητής στο ΑΣΑ ηρεμίας του ρολογιού, όπου βρίσκουμε και την μικρότερη τιμή. Η τιμή αυτή λέγεται και **ιδιόχρονος**.

Η διαστολή του χρόνου, όπως η συστολή του μήκους, είναι πραγματική και αυτό έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Για παράδειγμα, τα μόνια που παράγονται στην κορυφή της ατμόσφαιρας από την εισερχόμενη κοσμική ακτινοβολία είναι τόσο βραχύβια, ώστε, χωρίς την διαστολή του χρόνου, ακόμη κι αν κινούνταν με την ταχύτητα του φωτός, ο χρόνος της κίνησής τους μέχρι την επιφάνεια της Γης όπου φτάνουν, θα ήταν μεγαλύτερος της διάρκειας ζωής τους κατά έναν παράγοντα της τάξης του 10.

E24: Υποθέτουμε ότι ο γνωστός επιβάτης μετρά με τη μετροταινία του το μήκος του γνωστού τρένου και το βρίσκει $L=50\text{ m}$. Τη στιγμή $t' = 0$, ευρισκόμενος στο πίσω μέρος του τρένου με έναν δείκτη Laser εκτοξεύει ένα φωτεινό σήμα προς τα εμπρός. Να βρείτε στο ΑΣΑ Ο και Ο' τη χρονική στιγμή που η ακτίνα φτάνει στο μπροστινό μέρος του τρένου καθώς και το μήκος του τρένου όπως το μετρά ο παρατηρητής Ο.

Επειδή στο ΑΣΑ Ο' το μήκος του τρένου είναι L , θα ισχύει $L = ct'$, άρα

$$t' = \frac{L}{c}$$

(θεωρώντας ότι $c = 300\,000\text{ Km/sec}$, βρίσκουμε ότι χρειάζονται περίπου $16,67\text{ }\mu\text{sec}$).

Στο σύστημα Ο είναι

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right) = \gamma \left(\frac{L}{c} + \frac{\beta L}{c} \right) = \frac{\gamma L(1 + \beta)}{c} = 0,622\mu\text{sec}$$

Το μήκος του τρένου στο ΑΣΑ Ο είναι προφανώς $L/2 = 25\text{ m}$.

E25: Θεωρούμε για μια ακόμη φορά το γνωστό τρένο που κινείται με ταχύτητα v ως προς το έδαφος. Ο επιβάτης βρίσκεται στο μέσον του τρένου όπου και είναι η αρχή Ο' του ΑΣΑ ηρεμίας του τρένου (εκεί που το τρένο θεωρείται ακίνητο). Έξω από το τρένο, ακριβώς δίπλα στον επιβάτη, στέκεται ο σταθμάρχης τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, στη θέση Ο (η οποία ταυτίζεται τώρα με την Ο'). Εκείνη ακριβώς τη στιγμή ο επιβάτης στέλνει δύο ακτίνες laser, μία προς το πίσω μέρος του τρένου και μία προς το εμπρός μέρος. Μόλις η ακτίνα φτάσει στο άκρο του τρένου συναντά ένα φωτοκύτταρο το οποίο ανάβει ένα φως. Ποιο από τα δύο φώτα θα ανάψει πρώτο; Το εμπρός ή το πίσω;

Επειδή το φως κινείται με την ίδια ταχύτητα και έχει να διανύσει ίσες αποστάσεις, πρέπει τα δύο φώτα να ανάψουν ταυτόχρονα. Αυτό όμως ισχύει μόνο για τον επιβάτη, στο ΑΣΑ Ο'. Για τον σταθμάρχη, το τρένο κινείται και επομένως η ακτίνα προς το πίσω μέρος του τρένου θα διανύσει μικρότερη απόσταση από ότι η ακτίνα προς το εμπρός μέρος. Σύμφωνα με την προηγούμενη ερώτηση ο απαιτούμενος χρόνος, όπως τον μετρά ο σταθμάρχης είναι

$$t_{\text{εμπρός}} = \frac{\gamma L(1 + \beta)}{c} \quad \text{και} \quad t_{\text{πίσω}} = \frac{\gamma L(1 - \beta)}{c}$$

αφού για την προς τα πίσω ακτίνα το τρένο κινείται με ταχύτητα $-v$.

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι δύο γεγονότα που για τον επιβάτη είναι ταυτόχρονα για κάποιον άλλο παρατηρητή (σταθμάρχη) σε ένα άλλο ΑΣΑ δεν θα

είναι ταυτόχρονα αλλά η χρονική τους απόσταση θα εξαρτάται από την σχετική κίνηση των δύο συστημάτων.

E26: Να προσδιορίσετε την χωροχρονική απόσταση δύο γεγονότων. Μπορεί η απόσταση αυτή να είναι αρνητική;

Ας θεωρήσουμε δύο χωροχρονικά σημεία A και B. Έχουμε ορίσει την ποσότητα $\Delta S^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$ ως τη χωροχρονική απόσταση των δύο γεγονότων. Η ποσότητα αυτή μπορεί να πάρει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα γεγονότα A(0, 0, 0, 0) και B(0, 0, 0, κ), τότε προφανώς $\Delta S^2 = -\kappa^2 < 0$, ενώ αν B(κ, 0, 0, 0), τότε $\Delta S^2 = \kappa^2 > 0$. Τέλος, αν θεωρήσουμε τα γεγονότα A(κ, 0, 0, 0) και B(0, 0, 0, κ) τότε προφανώς $\Delta S^2 = 0$ (ενώ η χωρική απόσταση των σημείων στα οποία συμβαίνουν τα δύο γεγονότα είναι $\kappa \neq 0$).

Χαρακτηρίζουμε το διάνυσμα της χωροχρονικής μετατόπισης AB, ανάλογα με το πρόσημο της παράστασης ΔS^2 για τα σημεία αυτά ως εξής:

Χωροειδές	αν	$\Delta S^2 > 0$
Χρονοειδές	αν	$\Delta S^2 < 0$
Φωτοειδές	αν	$\Delta S^2 = 0$

Οι χαρακτηρισμοί αυτοί είναι δικαιολογημένοι. Αν σκεφτούμε ένα χωροχρονικό διάνυσμα παράλληλο στον άξονα των χρόνων (δηλαδή το διάνυσμα που ενώνει δύο γεγονότα που συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο αλλά σε διαφορετική χρονική στιγμή) τότε προφανώς είναι $\Delta S^2 < 0$. Κάθε άλλο διάνυσμα που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται χρονοειδές, δηλαδή σαν διάνυσμα χρόνου. Παρόμοια, αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα παράλληλο σε κάποιον από τους τρεις χωρικούς άξονες (δηλαδή ένα διάνυσμα που ενώνει δύο γεγονότα που συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή αλλά σε διαφορετική θέση) τότε προφανώς $\Delta S^2 > 0$ και τα διανύσματα με αυτή την ιδιότητα λέγονται χωροειδή (σαν χωρικά).

E27: Πώς μπορούμε να μετράμε την απόσταση δύο σημείων στον τετραδιάστατο χώρο \mathcal{M} (χώρος Minkowski) όταν το διάνυσμα μετατόπισης μεταξύ τους είναι χρονοειδές, χωροειδές ή φωτοειδές; Πώς συνδέεται αυτό με τους τύπους του Lorentz;

Από εδώ και κάτω γίνεται παρουσίαση ειδικών θεμάτων σχετικά με τα διανύσματα μετατόπισης που συνδέουν δύο γεγονότα στον \mathcal{M} .

Για να διευκολυνθούμε με τους συμβολισμούς μας, θα γράφουμε την ποσότητα ΔS^2 ως Q . Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τα χωροχρονικά σημεία $A(x, y, z, t)$ και $B(x_0, y_0, z_0, t_0)$, τότε ορίζουμε

$$Q(AB) = Q(A - B) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - (ct - ct_0)^2.$$

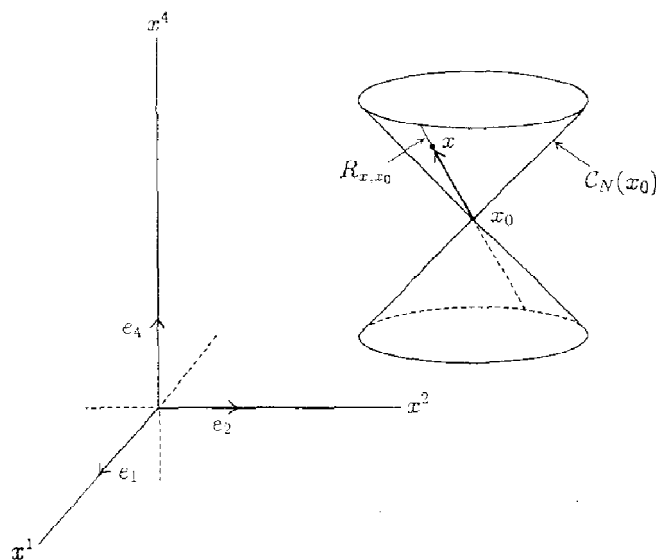
Ας θεωρήσουμε δύο διακριτά γεγονότα A και B για τα οποία το διάνυσμα μετατόπισης $v = A - B$, από το B στο A είναι ένα φωτοειδές, δηλαδή

$$Q(v) = Q(A - B) = 0$$

Τότε $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - (ct - ct_0)^2 = 0$. Αυτή όμως είναι ακριβώς η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται μεταξύ δύο γεγονότων που βρίσκονται πάνω στην κοσμική γραμμή ενός φωτονίου (E13). Γι αυτό και το διάνυσμα v λέγεται φωτοειδές. Από την ομοιότητα της σχέσης αυτής με την εξίσωση ενός ορθού κυκλικού κώνου στον \mathbb{R}^3 , ορίζουμε τον **κώνο φωτός** $C_N(x_0)$ στο $x_0 \in \mathcal{M}$, ως εξής:

$$C_N(x_0) = \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\}$$

και τον απεικονίζουμε, συμπιέζοντας την τρίτη χωρική συντεταγμένη του z όπως φαίνεται στο Σχήμα.



Ο $C_N(x_0)$ αποτελείται επομένως από όλα εκείνα τα γεγονότα στον \mathcal{M} που «μπορούν να συνδεθούν με το x_0 με μια ακτίνα φωτός». Δηλαδή είτε γίνονται

ταυτόχρονα στο ίδιο χωρικό σημείο με το x_0 , είτε σε σημείο που απέχει χωρικά και χρονικά από το x_0 , όσο χρειάζεται το φως για να φτάσει από το x_0 στο σημείο x .

Για κάθε τέτοιο γεγονός x ($x \neq x_0$) ορίζουμε την **φωτοειδή κοσμική γραμμή** (ή **ακτίνα φωτός**)

$$R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathfrak{R}\}$$

Ας θεωρήσουμε την κίνηση ενός υλικού σώματος που κινείται με ταχύτητα v ως προς ένα ΑΣΑ O . Τότε, όπως είδαμε το σημείο αυτό διαγράφει μια γραμμή στο χωροχρόνο (Σχήμα 2.8α και β). Για δύο γειτονικά σημεία στη γραμμή αυτή ισχύει $\Delta S^2 < 0$ (E13) και επομένως το διάνυσμα μετατόπισης είναι χρονοειδές (βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου φωτός).

Χρονοειδή διανύσματα

Ας θεωρήσουμε δύο γεγονότα για τα οποία το διάνυσμα μετατόπισης είναι χρονοειδές, δηλαδή $Q(AB) < 0$. Τότε αφού $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < (c\Delta t)^2$, προφανώς $\Delta t \neq 0$ (δηλαδή τα δύο γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα σε κανένα ΑΣΑ).

Θεωρούμε ότι το $\Delta t > 0$, δηλαδή ότι το γεγονός B λαμβάνει χώρα μεταγενέστερα του γεγονότος A , δηλαδή το διάνυσμα AB «κοιτά» προς το μέλλον. Έτσι παίρνουμε το πηλίκο

$$\frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}}{(c\Delta t)^2} < 1$$

Από φυσικής άποψης, εκείνο που λέμε είναι ότι αν κάποιος επρόκειτο να ταξιδέψει με ταχύτητα $v = \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}}{\Delta t}$ ως προς ένα ΑΣΑ O κατά μήκος μιας γραμμής Σ που συνδέει τα σημεία (x_0, y_0, z_0) και (x, y, z) και αυτός ο κάποιος ήταν παρών στο πρώτο γεγονός θα ήταν παρόντας και στο δεύτερο γεγονός. Υπάρχει δηλαδή ένα ΑΣΑ (το ΑΣΑ του «κάποιου», έστω O') στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο, δηλαδή $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι $\Delta x \neq 0$ (με τον τυποποιημένο σχηματισμό είναι προφανώς $\Delta y = \Delta z = 0$), αλλιώς δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε. Είναι

$$\beta = \frac{\Delta x}{c\Delta t}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{c\Delta t}{\sqrt{-(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2}}$$

Όμως $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c)$

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = \frac{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}{\sqrt{-Q(AB)}} = \sqrt{-Q(AB)}$$

Όμως $Q(AB) = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$, άρα $\Delta x = 0$.

Για κάθε χρονοειδές διάνυσμα v στο \mathcal{M} ορίζουμε την **διάρκεια** $\tau(v)$ του v ως $\tau(v) = \sqrt{-Q(v)}$. Αν το v είναι το διάνυσμα μετατόπισης AB , τότε η $\tau(AB)$ ερμηνεύεται φυσικά ως η χρονική διαφορά των γεγονότων A και B σε κάθε ΑΣΑ, στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο.

Ένα υποσύνολο του \mathcal{M} της μορφής $T = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathfrak{R}\}$, όπου $x - x_0$ είναι ένα χρονοειδές, λέγεται **χρονοειδής ευθεία** στο \mathcal{M} . Μια χρονοειδής ευθεία που διέρχεται από την αρχή ονομάζεται **άξονας χρόνου** (time axis).

Κάθε άξονας χρόνου είναι ο ct' - άξονας κάποιου αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων του \mathcal{M} και έτσι πρέπει να ταυτίζεται με την κοσμική γραμμή κάποιου αδρανειακού παρατηρητή. Αφού κάθε χρονοειδής ευθεία είναι παράλληλη με κάποιον άξονα χρόνου, θα θεωρούμε κάθε τέτοια ευθεία ως την κοσμική γραμμή ενός σημείου σε ηρεμία στο αντίστοιχο σύστημα αναφοράς (ας πούμε η κοσμική γραμμή κάποιου «βοηθού» του παρατηρητή μας).

Παρατηρήσεις

1) Αν T είναι ένας άξονας χρόνου και x, x_0 είναι δυο γεγονότα, τότε το $x - x_0$ είναι ορθογώνιο στο T αν και μόνο αν τα x και x_0 είναι διαδοχικά σε κάθε σύστημα αναφοράς που έχει ως ct' - άξονα τον T .

2) Αν $x - x_0$ είναι ένα χρονοειδές και s είναι ένας τυχαίος, μη αρνητικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο, η χωρική απόσταση των x και x_0 είναι s . Επίσης η χρονική διαφορά των x και x_0 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος στην $\tau(x - x_0)$.

Η διάρκεια $\tau(x - x_0)$ είναι επομένως η μικρότερη χρονική διαφορά που μπορεί να έχουν δύο γεγονότα και γι αυτό συνήθως ονομάζεται και **κανονική** (proper) **χρονική διαφορά** (ή **ιδιόχρονος**) των x_0 και x . Όταν δεν υπάρχει περίπτωση παρανόησης θα τη συμβολίζουμε με Δt .

Κάθε χρονοειδές διάνυσμα v βρίσκεται μεταξύ κάποιων αξόνων χρόνου, έτσι η $\tau(v)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα «χρονικό μήκος» του v (η χρονική διαφορά της ουράς και της κορυφής του όπως καταγράφεται από έναν παρατηρητή που τα βιώνει και τα δύο). Είναι μια μάλλον ασυνήθιστη έννοια μήκους, όμως, αφού οι ανάλογες βασικές ανισότητες που κάποιος έχει συνηθίσει να χρησιμοποιεί στο Ευκλείδειο μήκος είναι γενικά αντεστραμμένες.

Αντίστροφη Τριγωνική Ανισότητα

Αν v και w είναι δύο χρονοειδή διανύσματα που «κοιτούν» προς το μέλλον, τότε

$$\tau(v + w) \geq \tau(v) + \tau(w)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα v και w είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Η αιτία για την οποία η τριγωνική ανισότητα είναι «αντεστραμμένη» γίνεται απόλυτα κατανοητή, αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων σε σχέση με το οποίο $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$, $w = (w^1, w^2, w^3, w^4)$ και $v + w = (0, 0, 0, v^4 + w^4)$ (αυτό απλά σημαίνει να θεωρήσουμε τον άξονα χρόνου που διέρχεται από το $v^4 + w^4$ ως τον ct' - άξονα). Τότε όμως $\tau(v) = [(v^4)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2]^{1/2} < v^4$ και όμοια $\tau(w) < w^4$. Όμως $\tau(v + w) = v^4 + w^4$.

Χωροειδή διανύσματα

Ας θεωρήσουμε δύο γεγονότα για τα οποία το διάνυσμα μετατόπισης είναι χωροειδές, δηλαδή $Q(AB) > 0$. Τότε είναι $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 > (c\Delta t)^2$ σε κάθε ΑΣΑ και επομένως το ΑΒ βρίσκεται στο εξωτερικό του φωτοειδούς κώνου στο Α και προφανώς δεν υπάρχει ΑΣΑ στο οποίο τα δύο γεγονότα να μπορούσαν να γίνουν στο ίδιο σημείο ή δεν υπάρχει αδρανειακός παρατηρητής που θα μπορούσε να βιώσει ταυτόχρονα τα δύο γεγονότα. Παρόλα αυτά, χρησιμοποιώντας ένα ανάλογο επιχείρημα όπως και για τα χρονοειδή διανύσματα, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα πλαίσιο αναφοράς ως προς το οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Έστω x, x_0 δύο γεγονότα του \mathcal{M} με το $x - x_0$ να είναι χωροειδές, δηλαδή

$$\frac{\Delta \vec{x}}{c\Delta t} > 1$$

όπου $\Delta \vec{x} = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$. Θεωρούμε $\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$ και επομένως

$\gamma = \frac{\Delta x}{\sqrt{Q(x-x_0)}}$ και $\beta\gamma = \frac{c\Delta t}{\sqrt{Q(x-x_0)}}$. Τότε, $c\Delta t' = 0$. Επομένως υπάρχει αδρανειακό

σύστημα σε σχέση με το οποίο τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα.

Μπορούμε ακόμα να δείξουμε (επιλέγοντας κατάλληλα το β) ότι αν s είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα ΑΣΑ σε σχέση με το οποίο η χρονική διαφορά των x και x_0 είναι s (άρα γενικά οι αδρανειακοί παρατηρητές δεν συμφωνούν μεταξύ τους ούτε καν στη σειρά με την οποία τα δύο γεγονότα συνέβησαν).

Αφού $[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2} = \sqrt{(c\Delta t)^2 + Q(x-x_0)}$ σε κάθε αδρανειακό πλαίσιο και αφού η $(c\Delta t)^2$ μπορεί να πάρει οποιονδήποτε μη αρνητικό

πραγματικό αριθμό, η χωρική διαφορά των x και x_0 είναι μεγαλύτερη ή ίση με $[Q(x - x_1)]^{1/2}$. Δεν υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η χωρική τους απόσταση να γίνει μικρότερη.

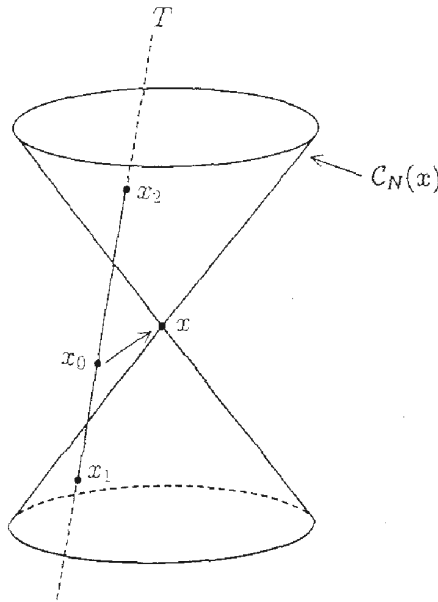
Ορίζουμε, για κάθε δύο γεγονότα x και x_0 για τα οποία $(x - x_0) > 0$, την **κανονική (proper) χωρική απόσταση** $S(x - x_0)$ του x από το x_0 με

$$S(x - x_0) = [Q(x - x_1)]^{1/2}$$

και τη θεωρούμε ως τη χωρική διαφορά τους σε κάθε σύστημα αναφοράς στο οποίο τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα (λέγεται και **ιδιομήκος** του $x - x_0$).

Έστω T μια τυχαία χρονοειδής ευθεία που περιέχει το x_0 . Είδαμε ότι η T μπορεί να θεωρηθεί ως η κοσμική γραμμή κάποιου παρατηρητή σε ηρεμία σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που όμως δεν βρίσκεται υποχρεωτικά στην αρχή των χωρικών συντεταγμένων αυτού του συστήματος.

Έστω x στο \mathcal{M} τέτοιο ώστε το $x - x_0$ να είναι χωροειδές και έστω x_1, x_2 τα δύο σημεία τομής της T με τον $C_N(x)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι

$$S^2(x - x_0) = \tau(x_0 - x_1) \tau(x_2 - x_0) \quad (1.5.1)$$

Πράγματι, αφού το $x - x_1$ είναι φωτοειδές είναι $0 = Q(x - x_1) = Q[(x_0 - x_1) + (x - x_0)]$

άρα

$$0 = -\tau^2(x_0 - x_1) + 2(x_0 - x_1)(x - x_0) + S^2(x - x_0) \quad (1.5.2)$$

Όμοια, αφού το $x_2 - x$ είναι φωτοειδές, $0 = Q(x_2 - x) = Q[(x_2 - x_0) + (x - x_0)]$ άρα

$$0 = -\tau^2(x_2 - x_0) - 2(x_2 - x_0)(x - x_0) + S^2(x - x_0) \quad (1.5.3)$$

Αφού τα $x_2 - x_0$ και $x_0 - x_1$ είναι συγγραμμικά, υπάρχει μια σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια, ώστε $x_2 - x_0 = \kappa(x_0 - x_1)$ άρα $\tau^2(x_2 - x_0) = \kappa^2 \tau^2(x_0 - x_1)$.

Πολλαπλασιάζοντας την (1.5.2) με κ και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στην (1.5.3) βρίσκουμε

$$-(\kappa + \kappa^2) \tau^2(x_0 - x_1) + (\kappa + 1) S^2(x - x_0) = 0$$

Αφού $\kappa + 1 \neq 0$ (τα x_1 και x_2 δεν ταυτίζονται) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} S^2(x - x_0) &= \kappa \tau^2(x_0 - x_1) \\ &= \tau(x_0 - x_1) [\kappa \tau(x_0 - x_1)] \\ &= \tau(x_0 - x_1) \tau(x_2 - x_0) \end{aligned}$$

Αν x , x_0 και x_1 είναι τρία γεγονότα στο \mathcal{M} για τα οποία τα διανύσματα μετατόπισης $x - x_0$ και $x_1 - x$ είναι χωροειδή και ορθογώνια, τότε

$$S^2(x_1 - x_0) = S^2(x_1 - x) + S^2(x - x_0)$$

όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τον ορισμό του S και της \mathcal{Q} και το γεγονός ότι τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια.

2.3. Φύλλο Εργασίας

Φύλλο Εργασίας

E1: Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο χώρο;

E2: Το σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο αποτελείται από δύο άξονες, κάθετους μεταξύ τους. Πώς θα είναι το αντίστοιχο σύστημα στο χώρο;

E3: Σχεδιάστε ένα σύστημα αξόνων στο χαρτί σας.

E4: Διαφέρουν οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο;

- Σχεδιάστε πάνω στο σύστημα των αξόνων του προηγούμενου ερωτήματος ένα τετράγωνο.
- Σχεδιάστε ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων.
- Το τετράγωνο που σχεδιάσατε πριν έπαιξε να είναι τετράγωνο; Έχασε κάποια από τις ιδιότητες ή τα χαρακτηριστικά του;

E5: Πώς μετράμε την απόσταση ενός σημείου πάνω στο επίπεδο από την αρχή O των αξόνων; Πώς μπορούμε να μετρήσουμε την αντίστοιχη απόσταση ενός σημείου του χώρου από την αρχή O ;

- Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $A(3,4)$ από την αρχή των αξόνων.
- Υπολογίστε την απόσταση των σημείων $A(3, 4)$ και $B(2,7)$.
- Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $\Gamma(1, -2, 2)$ από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

E6: Τι ονομάζουμε σύστημα αναφοράς;

E7: Τι είναι ο χρόνος;

E8: Για να παραστήσουμε τη θέση μιας μύγας μέσα σε ένα δωμάτιο αρκεί ένα σύστημα συντεταγμένων όπως αυτό που φτιάξαμε πριν. Πώς θα παριστάνετε την κίνηση της μύγας στο δωμάτιο;

E9: Πώς θα είναι η γραφική παράσταση ενός ακίνητου σώματος και πώς ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα v ;

ΕΙ0: Ας θεωρήσουμε ένα τρένο που κινείται πάνω σε μια ευθύγραμμη ράγα με σταθερή ταχύτητα v . Ένας επιβάτης βρίσκεται καθισμένος στο μέσον του τρένου. Ποια είναι η κοσμική γραμμή του επιβάτη;

α) ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O που βρίσκεται πάνω στις ράγες;

β) ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς O' που βρίσκεται πάνω στο τρένο;

Πώς συνδέονται οι συντεταγμένες του επιβάτη στα δύο ΑΣΑ;

ΕΙ1: Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο επιβάτης του τρένου (το οποίο κινείται με ταχύτητα v) εκπέμπει μια δέσμη φωτός (laser) προς το εμπρός μέρος. Ποια είναι η κοσμική ακτίνα του φωτονίου της δέσμης ως προς το ΑΣΑ O ; Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται το φως;

ΕΙ2: Πότε η γωνία του άξονα Ot' θα σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα Ot ; Μπορεί η γωνία αυτή να γίνει μεγαλύτερη από 45° ; Τι θα σήμαινε αυτό;

ΕΙ3: Ας θεωρήσουμε το γνωστό τρένο με τον γνωστό επιβάτη που κινούνται πάνω στις ράγες με ταχύτητα v . Το τρένο έχει μήκος $2a$ και ο επιβάτης κάθεται ακριβώς στο μέσον του τρένου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο επιβάτης (από το σημείο M) στέλνει δύο φωτεινές ακτίνες (laser) μία προς το πίσω μέρος του τρένου (σημείο A) και μία προς το εμπρός μέρος του τρένου (σημείο B).

- Ποια είναι η κοσμική γραμμή κάθε φωτονίου;

- Αν αντί για φωτεινή ακτίνα, ο επιβάτης ρίξει ένα βλήμα πυροβόλου όπλου, ποια θα είναι η κοσμική γραμμή του βλήματος;

ΕΙ4: Στην κλασική Φυσική, είδαμε ότι οι συντεταγμένες (x, y, z) και (x', y', z') του επιβάτη στα δύο ΑΣΑ (των ραγών O και του τρένου O' αντίστοιχα) συνδέονται με τις σχέσεις: $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$. Όμως διαπιστώσαμε (ΕΙ1) ότι για το φως αυτές δεν δίνουν σωστά αποτελέσματα. Ποιες σχέσεις τελικά είναι αυτές που συνδέουν τις συντεταγμένες στα δύο αυτά ΑΣΑ;

ΕΙ5: Είδαμε ότι για ένα φωτόνιο ισχύει $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ ή για $u = ct$, $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$. Δείξτε ότι η ποσότητα $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ παραμένει σταθερή σε κάθε ΑΣΑ, δηλαδή αν $S'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$ η αντίστοιχη ποσότητα στο ΑΣΑ O' , τότε ισχύει $S^2 = S'^2$. Η ποσότητα S^2 ορίζει την **χωροχρονική απόσταση** στον τετραδιάστατο χώρο.

Ε16: Να ορίσετε τις μονάδες μέτρησης πάνω στους άξονες των δύο συστημάτων συντεταγμένων.

Ε17: Ας θεωρήσουμε ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα v , πάνω σε ευθύγραμμες ράγες. Οι συντεταγμένες (x, y, z, t) του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (ΑΣΑ) του οποίου ο άξονας Ox είναι η ευθεία των ραγών με θετική κατεύθυνση τη φορά κίνησης του τρένου και οι συντεταγμένες (x', y', z', t') του αδρανειακού συστήματος αναφοράς του οποίου ο άξονας $O'x'$ είναι κατά μήκος του τρένου με θετική φορά ίδια με το ΑΣΑ O , συνδέονται με τις σχέσεις

$$x' = \gamma (x - \beta ct) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma (t - \beta x/c)$$

όπου το $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = v/c$.

Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ως συνάρτηση των (x', y', z', t') .

Ε18: Γνωρίζουμε ότι για ένα φωτόνιο ισχύει $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ ή για $u = ct$, $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$. Δείξτε ότι η ποσότητα $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ παραμένει σταθερή σε κάθε ΑΣΑ, δηλαδή αν $S'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$ η αντίστοιχη ποσότητα στο ΑΣΑ O' , τότε ισχύει $S^2 = S'^2$. Η ποσότητα S^2 ορίζει την **χωροχρονική απόσταση** στον τετραδιάστατο χώρο.

Ε19: Ας θεωρήσουμε το γνωστό τρένο, που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 0,6 c$ ως προς το ΑΣΑ O . Ο επιβάτης του τρένου τεντώνει το χέρι του και χρησιμοποιώντας μια μετροταινία που βρίσκεται στο χαρτοφύλακά του βρίσκει ότι το χέρι του έχει μήκος 70 cm. Πόσο είναι το μήκος του χεριού του επιβάτη όπως το μετράει ο παρατηρητής O (που βρίσκεται στο έδαφος και βλέπει το χέρι να περνάει από μπροστά του);

Ε20: Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι το μήκος του χεριού του επιβάτη είναι διαφορετικό για κάθε έναν από τους δύο παρατηρητές. Ποιο όμως είναι το πραγματικό του μήκος;

Ε21: Θεωρείστε μία ράβδο μήκους 5 m και μια κλειστή αίθουσα με διαστάσεις 4 m μήκος, 0,60 m πλάτος και 3 m ύψος. Χωράει η ράβδος στην αίθουσα; Πώς θα μπορούσαμε να βάλουμε στην ίδια αίθουσα μια ράβδο μήκους 8 μέτρων;

E22: Ας λύσουμε μια ακόμη απορία. Το κοντάρι που «τρέχει» μικραίνει και γίνεται το μισό. Όμως τότε δεν θα γίνει μισό και το μήκος της αίθουσας; Πώς χωράει η ράβδος των 8 μέτρων στην αίθουσα των 2 μέτρων;

E23: Ο γνωστός επιβάτης του γνωστού τρένου κοιτάζει το ρολόι του – κλείνει τα μάτια του και τα ανοίγει πάλι. Διαπιστώνει πως ο χρόνος που πέρασε είναι 2sec. Να βρεθεί η χρονική διάρκεια κατά την οποία είχε τα μάτια του κλειστά όπως την μετρά ο παρατηρητής O.

E24: Υποθέτουμε ότι ο γνωστός επιβάτης μετρά με τη μετροταινία του το μήκος του γνωστού τρένου και το βρίσκει $L=50\text{ m}$. Τη στιγμή $t' = 0$, ευρισκόμενος στο πίσω μέρος του τρένου με έναν δείκτη Laser εκτοξεύει ένα φωτεινό σήμα προς τα εμπρός. Να βρείτε στο ΑΣΑ O και O' τη χρονική στιγμή που η ακτίνα φτάνει στο μπροστινό μέρος του τρένου καθώς και το μήκος του τρένου όπως το μετρά ο παρατηρητής O.

E25: Θεωρούμε για μια ακόμη φορά το γνωστό τρένο που κινείται με ταχύτητα v ως προς το έδαφος. Ο επιβάτης βρίσκεται στο μέσον του τρένου όπου και είναι η αρχή O' του ΑΣΑ ηρεμίας του τρένου (εκεί που το τρένο θεωρείται ακίνητο). Έξω από το τρένο, ακριβώς δίπλα στον επιβάτη, στέκεται ο σταθμάρχης τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, στη θέση O (η οποία ταυτίζεται τώρα με την O'). Εκείνη ακριβώς τη στιγμή ο επιβάτης στέλνει δύο ακτίνες laser, μία προς το πίσω μέρος του τρένου και μία προς το εμπρός μέρος. Μόλις η ακτίνα φτάσει στο άκρο του τρένου συναντά ένα φωτοκύτταρο το οποίο ανάβει ένα φως. Ποιο από τα δύο φώτα θα ανάψει πρώτο; Το εμπρός ή το πίσω;

E26: Να προσδιορίσετε την χωροχρονική απόσταση δύο γεγονότων. Μπορεί η απόσταση αυτή να είναι αρνητική;

E27: Πώς μπορούμε να μετράμε την απόσταση δύο σημείων στον τετραδιάστατο χώρο M (χώρος Minkowski) όταν το διάνυσμα μετατόπισης μεταξύ τους είναι χρονοειδές, χωροειδές ή φωτοειδές; Πώς συνδέεται αυτό με τους τύπους του Lorentz;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Naber, Gregory L.(1992). The Geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity, Springer Verlag, New York
- [2] Gauthier Yvon. Hermann Minkowski: From Geometry of Numbers to Physical Geometry
- [3] Rindler, Wolfgang (2001). Εισαγωγή στην Ειδική Σχετικότητα, Leader Books
- [4] Τσαμπαρλής Μιχάλης (1995). Θεωρία της ειδικής σχετικότητας Α΄ Μέρος
- [5] Χριστοδουλάκης Θ.– Κορφιάτης Ε. (2003). Σημειώσεις ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας
- [6] Κρέτζας Δημήτριος (2003). Ειδική θεωρία της σχετικότητας, Εκδόσεις Ζήτη
- [7] Einstein, A., et al., The Principle of Relativity, Dover, New York, 1958
- [8] Zeeman, E. C, Causality implies the Lorentz group, J. Math. Phys, (1964), 490-493
- [9] Zeeman, E. C, The topology of Minkowski space, Topology, 6(1967), 161-170.
- [10] Penrose. R. and W. Rindler, Spinors and Spacetime, Vols. I-II, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984, 1986.
- [11] Gelfand, I. M., R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro, Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications, Perg-amon, New York, 1963.
- [12] Urquhart M.L. (1967). Kinematic Geometry; An axiomatic system for Minkowski space-time
- [13] Weyl, H. , Space-Time-Matter, Dover, New York, 1952
- [14] Robb, A. A., Geometry of Space and Time, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1936.
- [15] Lenard, A., "A characterization of Lorentz transformations", Amer. J. Phys, 19(1978), 157.
- [16] Penrose, R, "The apparent shape of a relativistically moving sphere", Proc. Camb. Phil. Soc, 55(1959), 137-139.
- [17] Henry Michel (1999). Διδακτική Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Μαθηματικών
- [18] Γαγάτσης Αθανάσιος (1993), Θέματα διδακτικής των μαθηματικών, Αφοί Κυριακίδη
- [19] Tall, 2004

- [20] Zachary Deborah (1989), Teaching, learning and using mathematical models in physics, Phys. Education
- [21] Norton Stephen, The use of design practice to teach mathematics and science, Int J Technol Des Educ. 18:19 – 44, Springer, 2007
- [22] Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών
- [23] ΑΠΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
- [24] Κλαουδάτος Ν., Συνοριακές πρακτικές μεταξύ σχολικών Μαθηματικών και σχολικής Φυσικής, ΕΝΕΔΙΜ, 2009
- [25] Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ 2010
- [26] Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ 2010
- [27] Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, ΟΕΔΒ 2010
- [28] Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, ΟΕΔΒ 2010
- [29] Φυσική Γενικής Παιδείας Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ 2010
- [30] Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ 2010
- [31] Φυσική Γενικής Παιδείας Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, ΟΕΔΒ 2010
- [32] Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ 2010
- [33] Βαϊνάς, Κ. (1998). Η ερώτηση ως μέσο αγωγής της σκέψης. Αθήνα: Gutenberg
- [34] Bachelard, G.(1998). Το νέο επιστημονικό πνεύμα. Γ. Φαρακλας, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- [35] Donaldson, M. (2001). Η Σκέψη των Παιδιών. μετ. Α. Καλογιαννίδου & Α. Αρχοντίδου, Αθήνα: Gutenberg
- [36] Κολέζα Ε.– Μακρής Κ.– Σούρλας Κ., Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών, Gutenberg, 1993
- [37] Eves, H. (1983). Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών. Αθήνα: Τροχαλία
- [38] Heisenberg, W. (1995). Σκέψεις για την εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική. μετ. Θ. Γραμμένος, Αθήνα: Π. Τραυλός.
- [39] Hilbert, D. (1995). Θεμέλια της Γεωμετρίας. Αθήνα: Τροχαλία.
- [40] Kunh, T. S. (1962). Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων. Γ. Γεωργακόπουλος και Β. Κάλφας, Αθήνα: Σύγχρονα Θέματα.
- [41] Piaget, J. & Inhelder, B. (1956). The child's conception of space. London: Routledge.
- [42] Ανούσης, Μ. (2008). Γραμμική Άλγεβρα, ΕΑΠ - Σημειώσεις