ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η Δυναμική Σχέση Αιτημάτων – Ορισμών στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και η Προβολή της στις Σύγχρονες Μαθηματικές Θεμελιώσεις»

ΛΥΚΕΡΙΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Α.Μ.: 47202

Επιβλέπων Καθηγητής

ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΑΘΗΝΑ 2012

στο Γιώργο και τον Χρήστο
που δίνουν νόημα
σε κάθε μου προσπάθεια
και στην Αγγελική
που ακόμα με αντέχει

«Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου
τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν».

Αριστοτέλης, Τοπικά, 158b24-25

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ...……....................……......………………………………...……..…7
1. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ 13
1.1 Αξιωματική θεμελίωση παντού (εκτός από τα μαθηματικά)................................15
1.2 Η αξιωματική θεμελίωση στην αρχαία Ελλάδα ....…………………….................17
1.3 Σύγχρονες κρίσιμες καταστάσεις και νέα αξιωματικοποίηση……........................23
1.4 Το πρότυπο της Τυπικής Αξιωματικής Μεθόδου και το Αξιωματικό Σύστημα του Hilbert 32
2. Η ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΙΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ «ΣΤΟΙΧΕΙΑ» ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ 39
2.1 Η δομή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη……...….........................………......…39
2.2 Οι ορισμοί στα «Στοιχεία»………………............…...………………….............44
2.3 Τα αιτήματα στα «Στοιχεία»…………………….......….......................................53
2.4 «...μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ...» 62
2.4.1 Το Βιβλίο VII των Στοιχείων 66
2.4.2 Το Βιβλίο V των Στοιχείων 75
2.4.3 Η παραλληλία ως ομοιότητα θέσης 86
3. ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ.......................89
3.1 Η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών...93
3.2 Θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind..................................95
3.2.1 Ας δοκιμάσουμε να ορίσουμε έναν πραγματικό αριθμό................................98
3.3 Άλλα παραδείγματα 109
4. ΕΠΙΛΟΓΟΣ 113
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…………………………………………………..…....................……115

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η απόδειξη ως μαθηματική πρακτική έχει την αρχή της στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Η αλήθεια κάθε μαθηματικής πρότασης οφείλει να προκύπτει μέσα από μια συγκεκριμένη διαδικασία και να βασίζεται σε ήδη αληθείς προτάσεις. Με βασική πηγή μας τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και τον Αριστοτέλη, διαπιστώνουμε τη δυναμική σχέση αιτημάτων και ορισμών, όπου τα αιτήματα (σημερινά αξιώματα) είναι αναπόδεικτες αλήθειες, οι οποίες με την εμφάνιση του κατάλληλου ορισμού αποδεικνύονται. Στη συνέχεια, ανακαλύπτουμε αυτή ακριβώς τη σχέση και στον ορισμό των πραγματικών αριθμών ως τομές Dedekind, όπου η χρήση του ορισμού αυτού αποδεικνύει όλα τα αξιώματα. Παράλληλα παρουσιάζονται οι δύο χρονικές περίοδοι που οδήγησαν στην ανάγκη βελτίωσης της θεμελίωσης των μαθηματικών. Η πρώτη, οδήγησε στην οργάνωση των «Στοιχείων» ενώ η δεύτερη επανέφερε το αξιωματικό σύστημα σε όλη την έκταση των μαθηματικών.

ABSTRACT

The proof in mathematical practice has its origin in ancient Greek mathematics. The truth of every mathematical subject must be derived through a specific process and based on proposals already true. Euclides and Aristotle are our main source of seeing the dynamic connection between requests and definitions, where the requests (axiomata) is unproven truths which with the advent of a appropriate definition they become demonstrable. Then we discover exactly the same relationship in the Dedekind's definition of real numbers, where the use of the definition proves all axioms. At the same time we glance the two periods which led to the need to improve the foundation of mathematics. The first, led to the organization of "Elements" while the second period put the system in the whole area of mathematics.

0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όσο θα υπάρχει ανθρώπινος πολιτισμός, η αρχαία ελληνική φιλοσοφία θα αποτελεί μόνιμο αντικείμενο ενδιαφέροντος. Κάθε νεώτερος πολιτισμός θα αισθάνεται πάντα έντονη την ανάγκη για εξοικείωση με τη μεγάλη διανοητική κληρονομιά. Η ελληνική φιλοσοφική σκέψη είναι βέβαια ένα μέρος από την αρχαία φιλοσοφική σκέψη. Όμως δύσκολα μπορεί κανείς να αμφισβητήσει το ειδικό βάρος και την ανώτερη ποιότητά της. Ναι, δεν πρόκειται για κομμάτι από το ίδιο ύφασμα.

Η ελληνική φιλοσοφία ως σύνολο, αντικειμενικά κατέχει κεντρική, θα μπορούσε να πει κανείς αξονική θέση μέσα στον ανθρώπινο πολιτισμό. Η ιστορία χάρισε στον ελληνικό λαό το προνόμιο να γενικεύσει και να αναπτύξει τη διανοητική εργασία των λαών τριών ηπείρων. Η ιστορία θέλησε το ελληνικό φιλοσοφικό οικοδόμημα να αποτελέσει το πρόπλασμα και το θεμέλιο για την ανάπτυξη της ανθρώπινης σκέψης στους επόμενους αιώνες.

Η ελληνική φιλοσοφική σκέψη χαρακτηρίζεται από την πρωτοτυπία, από την ανεξαρτησία, από την διαύγεια και την ποικιλία. Τα γνωρίσματα αυτά, μοναδικά στην ιστορία, τα οφείλει στις εξαιρετικές γεωπολιτικές και κοινωνικές συνθήκες, που αποτέλεσαν το υλικό πλαίσιο για την ανάπτυξή της. Οι ίδιες αυτές συνθήκες καθόρισαν και τα ιστορικά όρια της ελληνικής φιλοσοφίας.

Η ελληνική φιλοσοφική σκέψη, ως σύνολο, χάρισε την ελευθερία στο ανθρώπινο μυαλό, εμπέδωσε την εμπιστοσύνη στον άνθρωπο και φώτισε με το λογικό τη ζωή του. Έτσι η ελληνική φιλοσοφία θα είναι για πάντα ένα ιδεολογικό προπύργιο ελευθερίας, ένα σταθερό στήριγμα για την αδιάκοπη μάχη της αλήθειας.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες, αχώριστο κομμάτι της φιλοσοφικής σκέψης, οδηγήθηκαν σε πρωτοφανή άνθηση. Για πρώτη φορά στην ανθρώπινη ιστορία ο άνθρωπος προσπάθησε να εξηγήσει τον κόσμο όχι με τη βοήθεια υπέρτατων δυνάμεων αλλά με τη χρήση του νου και της λογικής. Στην Αρχαία Ελλάδα για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε πως πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει από αυτές τις αρχές ορισμένες αλήθειες που είναι το αναγκαίο αποτέλεσμά τους. Οι Έλληνες δημιούργησαν αυτό το ιδεώδες οδηγώντας κλάδους της επιστήμης στο βαθμό της τελειότητας.

Η **αξιωματική μέθοδος** είναι ένας τρόπος κατασκευής μιας επιστημονικής θεωρίας, κατά τον οποίο ορισμένες προτάσεις (τα λεγόμενα **αξιώματα** ή αιτήματα) λαμβάνονται ως αρχή και από αυτά συνάγονται όλα τα θεωρήματα της θεωρίας με μια ακολουθία συλλογισμών που ονομάζεται **απόδειξη**. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της απόδειξης (εκτός από ένα μικρό αριθμό αρχικών εννοιών) εισάγονται με **ορισμούς**, οι οποίοι επεξηγούν το νόημα των εννοιών αυτών με βάση γνωστές έννοιες ή άλλες έννοιες που έχουν ορισθεί προηγουμένως. Οι επιστήμες που κατασκευάζονται με αυτή τη μέθοδο λέγονται **αποδεικτικές** ή **παραγωγικές** επιστήμες.

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά είναι φαινόμενο όχι μόνο μαθηματικού χαρακτήρα. Μαθηματικές γνώσεις είχαν πολλοί λαοί και μεγάλοι πολιτισμοί. Όμως μόνο στην αρχαία Ελλάδα γεννήθηκε η ιδέα να κατασκευαστούν τα Μαθηματικά ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών προτάσεων.

Η ιδέα της ενιαίας αρχής του κόσμου εντοπίζεται ήδη στα φιλοσοφικά σχήματα των Ιώνων φιλοσόφων, με τα οποία επιχειρούσαν να ερμηνεύσουν τον κόσμο. Ο Εμπεδοκλής ανέπτυξε τη θεωρία των στοιχείων, από την αλληλεπίδραση των οποίων γεννιέται ο κόσμος. Οι αρχαίοι ατομιστές επιχείρησαν επίσης να ερμηνεύσουν τον κόσμο ξεκινώντας από κάποιες ελάχιστες αδιαίρετες οντότητες. Έτσι, η τάση να εξηγηθεί ο κόσμος ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών στοιχείων με κάποιους ορθολογικούς κανόνες δέσποζε στην πνευματική ατμόσφαιρα της αρχαίας Ελλάδας.

Τους πρώτους αιώνες της άνθησης του Ελληνικού πνεύματος αυτό το χαρακτηριστικό βρίσκεται σε εμβρυακή κατάσταση. Κυριαρχεί η προσπάθεια εξήγησης του κόσμου μέσα από την αναζήτηση λογικών αιτιών και συνδέσεων των διαφόρων φαινομένων, χωρίς τη χρήση του θεϊκού και του υπερφυσικού. Η κοσμολογία παίρνει τη θέση του μύθου.

Σύμφωνα με τον ιστορικό της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας και επιστήμης Geoffrey E.R. Lloyd υπάρχουν δύο κύρια χαρακτηριστικά που πρωτοεμφανίζονται με τους προσωκρατικούς φιλοσόφους και τους διαχωρίζουν από όλους τους προηγούμενους στοχαστές, Έλληνες και μη. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι :

- η ανακάλυψη της φύσης και η έξωση του υπερφυσικού από τις ερμηνείες των φυσικών φαινομένων
- η πρακτική της δημόσιας αντιπαράθεσης απόψεων και της ορθολογικής κριτικής.

Για πρώτη φορά στη ιστορία, κάποια φυσικά φαινόμενα δε θεωρούνται πια ως το αποτέλεσμα τυχαίων ή αυθαίρετων υπερφυσικών επιρροών αλλά ως το αποτέλεσμα κανονικών και προσδιορίσιμων ακολουθιών από φυσικές «αιτίες» και «αποτελέσματα». Ταυτόχρονα, για πρώτη φορά δημιουργείται η έννοια της κατηγορίας φαινομένων, δηλαδή φαινομένων που πρέπει να έχουν κοινά ή παρόμοια αίτια. Παρά το ότι οι περισσότερες από τις ερμηνείες τους ήταν επηρεασμένες από παλαιότερες μυθικές αντιλήψεις, διέφεραν ουσιαστικά από τις αντίστοιχες μυθικές εξιστορήσεις, γιατί απέφευγαν κάθε αναφορά σε υπερφυσικές δυνάμεις. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο B. Farrington: «οι Μιλήσιοι άφησαν τους θεούς απέξω».

Το δεύτερο ουσιαστικό χαρακτηριστικό, κοινωνικό αυτή τη φορά, φαίνεται πως υπήρξε η δημόσια κριτική συζήτηση των απόψεων στο πλαίσιο της πόλης. Οι φιλόσοφοι όχι μόνο γνώριζαν τις ιδέες και τις αντιλήψεις των σύγχρονων και των παλαιοτέρων τους αλλά και έκριναν ο ένας τις ιδέες του άλλου. Η δημόσια αποδοχή ή κριτική των ιδεών για τη φύση και τον υλικό κόσμο αποτελούσε μέρος της διαδικασίας νομιμοποίησής τους, δηλαδή συνιστούσαν απαραίτητο όρο για να γίνουν ευρύτερα αποδεκτές. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη μιας κοινά αποδεκτής βάσης συνδιαλλαγής απόψεων και κριτικής, ένα «σύστημα».

Στα έργα των αρχαίων Ελλήνων βρίσκουμε όλες σχεδόν τις μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιούνται σήμερα: τη μέθοδο της συνεπαγωγής, τη συνθετική και την αναλυτική μέθοδο, τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο καθώς και τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής. Επίσης, στοιχεία αξιωματικής θεμελίωσης βρίσκουμε σε πολλά αρχαία ελληνικά κείμενα. Οι Πυθαγόρειοι για παράδειγμα, εισήγαγαν μια μορφή απόδειξης αρκετά πιο βελτιωμένη από εκείνη του Θαλή. Γνώριζαν ότι η αποδεικτική διαδικασία δεν είναι απλώς ένας παραγωγικός συλλογισμός, αλλά πρέπει να έχει κάποια δεδομένα τα οποία ονόμαζαν υποθέσεις και κάποιους αρχικούς συλλογισμούς. Καθόρισαν έτσι ένα σύνολο αποδεικτικών κανόνων που μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην αποδεικτική διαδικασία και εισήγαγαν ορισμούς για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα. Ο Αριστοτέλης επίσης μας δίνει όλα τα στοιχεία μιας αξιωματικής θεμελίωσης. Αναφέρεται στις αρχικές έννοιες (θέσεις), στους ορισμούς, στα αξιώματα, στην αποδεικτική διαδικασία και στην απόδειξη.

Κλασικό παράδειγμα αξιωματικής θεμελίωσης είναι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Ο Ευκλείδης κατέγραψε τις αρχικές έννοιες ή αρχικούς όρους των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως είναι το σημείο, η γραμμή, κλπ., τις βασικές τους ιδιότητες και συγκέντρωσε τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες. Δημιούργησε έτσι μια μαθηματική θεωρία. μέσα στην οποία κάθε πρόταση μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων, των κοινών εννοιών και των προτάσεων που έχουν προηγουμένως αποδειχθεί. Πριν από τον Ευκλείδη υπήρξαν και άλλες προσπάθειες συγγραφής «Στοιχείων». Υπάρχουν μαρτυρίες για τρία τουλάχιστον προγενέστερα «Στοιχεία» τα οποία αποδίδονται στους μαθηματικούς Ιπποκράτη τον Χίο, Λέοντα και Θεύδιο. Η μαρτυρία αυτή οφείλεται στον Εύδημο τον Ρόδιο, μαθητή του Αριστοτέλη, ο οποίος στα τέλη του τέταρτου αιώνα π.Χ. γράφει την πρώτη Ιστορία της Γεωμετρίας. Πρόκειται επομένως για μια δημιουργική συνεχή διαδικασία με φυσιολογική κορύφωση τον Ευκλείδη. Στους αιώνες που ακολούθησαν, τα «Στοιχεία» και η διάταξή τους αποτέλεσαν κριτήριο επιστημονικότητας. Ακόμα και όταν στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και στις αρχές του 20^{ου} ο Hilbert δημοσιεύει τα «Θεμέλια της Γεωμετρίας», εισάγοντας τον αυστηρό φορμαλισμό στη Γεωμετρία, εκείνο που πιστεύει ότι κάνει είναι ότι συμπληρώνει και βελτιώνει τη δομή των «Στοιχείων» και όχι ότι την ανατρέπει. Όταν λίγο αργότερα ο Kurt Gödel δείχνει ότι «η αξιωματική μέθοδος έχει ορισμένους ενδογενείς περιορισμούς, που αποκλείουν τη δυνατότητα να αξιωματοποιηθεί πλήρως ακόμα και η συνηθισμένη Αριθμητική των ακεραίων» απλώς ανατρέπει το «Σχέδιο», αλλά επαναφέρει τη διαδικασία της γνώσης στο καθαρά φιλοσοφικό επίπεδο, που οι αρχαίοι Έλληνες το είχαν τοποθετήσει.

Το πρόβλημα δεν είναι να εντοπίσουμε πολλαπλότητες αξιωμάτων, αιτημάτων και αρχικών εννοιών ως a priori και in vacuo θεμέλια μιας θεωρίας, αλλά να μπορέσουμε, μέσω κατάλληλων, φιλοσοφικών ή άλλων, ορισμών να απαλλαγούμε από αυτή την ανάγκη. Ακόμα και στην περίπτωση όπου η επιθυμία μας είναι να κατασκευάσουμε ένα «τεχνητό» μαθηματικό αντικείμενο για το οποίο θέλουμε να ισχύουν κάποια συγκεκριμένα πράγματα, πάλι, τελικά, αυτό που κατασκευάζουμε είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο, του οποίου μπορεί να βρεθεί ο κατάλληλος ορισμός, ώστε τα όποια αιτήματα είχαμε θέσει αρχικά να εξαλειφθούν.

Το ζητούμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάδειξη της διαφορετικής προσέγγισης της αξιωματικής μεθόδου στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, μέσα από την ανακάλυψη και διατύπωση κατάλληλων ορισμών, σε αντίθεση με αυτό που συνήθως γίνεται στα σύγχρονα μαθηματικά, όπου η βάση είναι τα αξιώματα μιας θεωρίας. Επίσης, στις επιδιώξεις μας είναι να δείξουμε ότι και στα σύγχρονα μαθηματικά, όπου χρησιμοποιείται η αρχαιοελληνική προσέγγιση, τα αξιώματα γίνονται περιττά, αφού αποδεικνύονται, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, όπου ο ορισμός τους ως τομές Dedekind οδήγησε στην πλήρη απαλλαγή από τα αξιώματα.

Δεν υποστηρίζει αυτή η εργασία ότι γενικά το αξιωματικό σύστημα πρέπει να καταργηθεί, αλλά ότι σε κάθε περίπτωση τα μαθηματικά αντικείμενα που κατασκευάζει ο ανθρώπινος εγκέφαλος αντιστοιχούν σε κάποιους «κατάλληλους» ορισμούς, είτε από τα ίδια τα μαθηματικά, είτε από το εξωτερικό περιβάλλον, είτε από τη λογική (με την έννοια του ανθρώπινου Λόγου), οι οποίοι καθιστούν το μαθηματικό αυτό αντικείμενο πλήρως γνωστό και επομένως καθαρό από αναπόδεικτες ιδιότητες.

1. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και μαθηματικοί είναι εκείνοι που πρώτοι συνέλαβαν την ιδέα και διατύπωσαν την άποψη πως μια πρόταση είναι ένα πλήρες και σαφές γνωστικό απόκτημα μόνο όταν αυτή απορρέει ως συμπέρασμα μιας συγκεκριμένης λογικής διαδικασίας, η οποία θεμελιώνεται πάνω σε κάποιες γενικές και βασικές αρχές, όσο λιγότερες και απλούστερες γίνεται (οικονομία). Αυτή τη διαδικασία νομιμοποίησης την ονόμασαν απόδειξη και με αυτό τον τρόπο ανακαλύφθηκε η λεγόμενη «Αξιωματική Μέθοδος» με βάση την οποία κατασκευάστηκε η πρώτη «Επιστημονική» δημιουργία, η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Το γεγονός ότι πάνω σε ένα μικρό πλήθος θεμελιωδών προτάσεων εδράζεται ένα πολύ μεγάλο και συνεχώς εμπλουτιζόμενο πλήθος «προτάσεων – ιδιοτήτων» είχε ως συνέπεια οι στοχαστές όλων των εποχών να θεωρούν ότι η αλήθεια και η αμοιβαία αλληλουχία όλων των γεωμετρικών θεωρημάτων είναι εγγυημένη, υπό την προϋπόθεση ότι τα αξιώματα είναι αληθή κατά ένα γενικό και αναμφίβολο τρόπο. Επειδή λοιπόν η εγκυρότητα και η πληρότητα των Ευκλείδειων αξιωμάτων – αιτημάτων δεν τέθηκαν σε αμφισβήτηση για περίπου 2000 χρόνια, η αξιωματική συγκρότηση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη θεωρήθηκε ως μοναδικό και αναντικατάστατο μοντέλο επιστημονικής γνώσης. Την πεποίθηση αυτή ενίσχυε το γεγονός ότι η εξωτερική και γενικά η φυσική πραγματικότητα φαίνεται, στα ανθρώπινα μεγέθη άρα στα ανθρώπινα μάτια, να βρίσκεται σε μια ιδανική αρμονία με τα πορίσματα και τις εφαρμογές αυτής της πρώτης ανθρώπινης Επιστήμης.

Από τα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα και κατά το πρώτο μισό του $20^{ου}$ διευρύνθηκε συνεχώς η αξιοποίηση της αξιωματικής μεθόδου. Παλαιότεροι και νεότεροι κλάδοι των μαθηματικών εφοδιάστηκαν με ένα επαρκές (κατά τα φαινόμενα) σύστημα αξιωμάτων. Εδραιώθηκε έτσι η αντίληψη ότι είναι εφικτό κάθε τομέας της μαθηματικής σκέψης να εφοδιάζεται με ένα κατάλληλο σύνολο αξιωμάτων μέσω του οποίου να στηρίζεται λογικά και μεθοδικά όλο το υπόλοιπο οικοδόμημα των προτάσεων του θεωρούμενου μαθηματικού πεδίου.

Καθοριστικό ρόλο γι αυτή τη γενική επικράτηση της αξιωματικής μεθόδου έπαιξε ο David Hilbert με το βιβλίο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας», το οποίο δημοσίευσε το 1889. Σε αυτό ο Hilbert διατυπώνει την άποψη ότι, η επιλογή των αξιωμάτων (που αφορούν στην οικοδόμηση της γεωμετρίας) δεν υπόκειται σε ειδικούς περιορισμούς αλλά πρέπει να τηρούνται οι επόμενες γενικές αρχές.

1. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι απαλλαγμένο από αντιφάσεις.
2. Οι προτάσεις του συστήματος πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
3. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι πλήρες.

Η πρώτη απαίτηση σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να συνυπάρχει με μια πρόταση p και η άρνησή της «όχι p». Η δεύτερη απαίτηση σημαίνει ότι δεν πρέπει κάποιο από τα αξιώματα να μπορεί να αποδειχθεί μέσω των άλλων αξιωμάτων του συστήματος. Η τρίτη απαίτηση, αυτή της «πληρότητας», σημαίνει ότι κάθε πρόταση μιας θεωρίας (που η ίδια δεν είναι αξίωμα) είναι δυνατό να αποδειχθεί με τη χρησιμοποίηση ενός μέρους ή όλων των αξιωμάτων της θεωρίας και κάθε άλλης πρότασης που έχει ήδη αποδειχτεί με αυτή τη διαδικασία.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να δώσουμε τον ορισμό και κάποια στοιχεία αυτού που σήμερα ονομάζεται τυπική αξιωματική θεωρία.

Μια **τυπική αξιωματική θεωρία Τ** ορίζεται γενικά από τις παρακάτω συνθήκες:

α) Δίνεται ένα σύνολο συμβόλων, δίνεται δηλαδή το **αλφάβητο της γλώσσας** της θεωρίας. Μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας της θεωρίας καλείται **έκφραση της γλώσσας** της θεωρίας. Ας συμβολίσουμε με L_T τη **γλώσσα της θεωρίας**.

β) Υπάρχει ένα υποσύνολο του συνόλου των εκφράσεων που καλείται το **σύνολο τύπων** (formulae) της L_T. Συνήθως έχουμε μια αποτελεσματική διαδικασία για να καθορίζουμε αν μια έκφραση είναι ένας τύπος ή όχι.

γ) Υπάρχει ένα σύνολο τύπων που καλούνται τα **αξιώματα** (axiomata) της Τ. Συχνά υπάρχει μια αποτελεσματική διαδικασία για να καθορίζουμε αν ένας τύπος είναι ένα αξίωμα ή όχι.

δ) Υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $K_1, K_2, ..., K_\nu$ σχέσεων μεταξύ των τύπων της L_T, οι οποίες καλούνται **αποδεικτικοί κανόνες**. Για κάθε K_i υπάρχει ένας και μόνο ένας φυσικός αριθμός $j > 0$, τέτοιος, ώστε για κάθε σύνολο από j τύπους και κάθε τύπο Α, να μπορούμε να αποφασίζουμε αποτελεσματικά αν οι δοθέντες j τύποι βρίσκονται σε σχέση

K_i με τον τύπο Α. Σε μια τέτοια περίπτωση ο τύπος Α καλείται **μια άμεση συνέπεια** των δοθέντων j τύπων, μέσω του κανόνα K_i.

Μια **απόδειξη στην T** είναι μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων A_1, A_2, ..., A_n τέτοια ώστε για κάθε i,

ή A_i είναι μια άμεση συνέπεια ορισμένων από τους προηγούμενους τύπους, μέσω ενός από τους αποδεικτικούς κανόνες

ή A_i είναι αξίωμα.

Ένα **θεώρημα στην T** (ή της T) είναι ένας τύπος Α, που είναι ο τελευταίος σε μια απόδειξη.

1.1.Αξιωματική θεμελίωση παντού (εκτός από τα μαθηματικά)

Αν και τα «Στοιχεία» περιέχουν εκτός από Γεωμετρία και Αριθμητική, οι μαθηματικοί, σχεδόν μέχρι τον 20^{ο} αιώνα, δεν χρησιμοποιούσαν την αξιωματική μέθοδο ως γενική τεχνική θεμελίωσης μη γεωμετρικών συστημάτων. Σε αντίθεση με αυτό, στη διάρκεια του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα, υπήρξε πραγματικός κατακλυσμός προσπαθειών για την ανάπτυξη κοινωνικών και φιλοσοφικών θεωριών πάνω σε αξιωματικές βάσεις. Κλασικό παράδειγμα αυτής της προσπάθειας αποτελεί η Ηθική του Spinoza, η οποία, όπως σημειώνεται ήδη στον υπότιτλο του έργου, είναι «αποδεδειγμένη με γεωμετρική τάξη» (ordine geometric demonstrate). Πράγματι, στις τρεις πρώτες σελίδες της Ηθικής, ο αναγνώστης έρχεται αντιμέτωπος με ένα σύνολο «ορισμών» (definitiones) και αξιωμάτων (axiomata), με τη βοήθεια των οποίων θα αποδειχθούν στη συνέχεια τα τριάντα έξι θεωρήματα του Πρώτου μέρους του έργου. Αυτοί οι ορισμοί και τα αξιώματα δεν αποτελούν δευτερεύουσας σημασίας προεισαγωγικές προτάσεις, τις οποίες ο αναγνώστης θα μπορούσε με ευκολία να αντιπαρέλθει. Αντίθετα συνιστούν τα ίδια τα θεμέλια του συστήματος, χωρίς τα οποία αυτό θα ήταν αδύνατο να αναπτυχθεί. Αδιάψευστο τεκμήριο της σημασίας των εναρκτήριων ορισμών και αξιωμάτων της Ηθικής αποτελεί το γεγονός ότι ο Spinoza πραγματεύεται εκεί θεμελιώδεις έννοιες της φιλοσοφικής σκέψης, όπως την έννοια του Θεού, την έννοια της ελευθερίας, την έννοια της αιτιότητας και την έννοια της αλήθειας[1].

[1] Σπινόζα, 1913, *Ηθική* (μτφρ. Ν. Κουντουριώτου), εκδ. Φέξη, Αθήνα. (Πλήρες κείμενο On line στην ψηφιακή βιβλιοθήκη Ανέμη).

Την ίδια γεωμετρική αποδεικτική τάξη ακολουθεί ο Newton στα Principia. Το πρώτο βιβλίο του έργου, αφιερωμένο στην κίνηση των σωμάτων (De motu corporum), αρχίζει με μια σειρά ορισμών, στους οποίους επεξηγούνται διαδοχικά οι θεμελιώδεις όροι της κλασικής φυσικής: ποσό ύλης (quantitas materiae), ποσό κίνησης (quantitas motus), ενδιάθετη δύναμη (via insita), μεταδιδόμενη δύναμη (vis impressa) κλπ. Ακολουθούν τα «αξιώματα ή νόμοι της κίνησης» (axiomata, sive leges motus): νόμος ή αρχή της αδράνειας, αναλογία μεταξύ της ασκούμενης δύναμης και της μεταβολής της κινητικής κατάστασης του σώματος, ιδιότητα δράσης – αντίδρασης.

Ανάλογες προσπάθειες έγιναν κι από ανθρώπους στενά συνδεδεμένους με τα μαθηματικά, όπως οι Descartes και Leibnitz (ο τελευταίος σε νεαρή ηλικία χρησιμοποίησε τη «γεωμετρική μέθοδο» – όπως αποκαλούσαν τότε την αξιωματική μέθοδο – για να παρουσιάσει λύσεις σε πολιτικά προβλήματα).

Από τον $19^{ο}$ αιώνα και μετά, άρχισε η αξιωματική μέθοδος να γίνεται ευρύτερα αποδεκτή στα μαθηματικά. Τότε αποκαλύφθηκαν οι δυνατότητες που ανοίγονταν με τη χρήση αξιωμάτων, όχι μόνο ως μέσο για τη θεμελίωση και γενίκευση μαθηματικών και φυσικών εννοιών, αλλά και ως ερευνητικού εργαλείου. Το 1882 ο Pasch επιχειρεί να αξιωματικοποιήσει τη γεωμετρία. Στο αξιωματικό σύστημα του Pasch εμφανίζονται για πρώτη φορά αξιώματα που χαρακτηρίζουν την έννοια του «μεταξύ» και εισάγεται η αρχή με τη βοήθεια της οποίας μπορεί ένα επίπεδο να διαιρεθεί από μια ευθεία και ο χώρος από ένα επίπεδο. Το 1889 ο Peano αξιωματικοποιεί την αριθμητική μέσω των φυσικών αριθμών, το 1899 όπως είδαμε ο Hilbert αξιωματικοποιεί (συντάσσοντας ένα πλήρες σύστημα αξιωμάτων) την Ευκλείδεια Γεωμετρία και το 1908 ο Zermelo διατυπώνει τα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Το γεγονός ότι χρειάστηκε τόσος χρόνος για να μεταδοθεί ένα τόσο σημαντικό θεωρητικό εργαλείο, από τη γεωμετρία στα υπόλοιπα μαθηματικά, οφείλεται αναμφισβήτητα σε πολιτιστική υστέρηση και πολιτιστική αντίσταση.

Η λογική, ως αναπόσπαστο μέρος της αξιωματικής μεθόδου, απέκτησε κι αυτή πρωτεύοντα ρόλο στα μαθηματικά. Ως ιδιαίτερα ελληνικός τρόπος σκέψης, η λογική βρίσκεται στην καρδιά της αξιωματικής μεθόδου. Επιπλέον, η σημασία που είχε για τις μεθόδους αποδείξεων είναι τόσο μεγάλη, ώστε μερικοί έφτασαν να υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά είναι στην πραγματικότητα επέκταση της λογικής και ότι η ουσία των μαθηματικών είναι η λογική παραγωγή. Οι «ορισμοί» των μαθηματικών που οφείλονται στον Benjamin Peirce (1881) «Μαθηματικά είναι η επιστήμη συναγωγής αναγκαίων συμπερασμάτων», στον A.N.Whitehead (1898) «Τα μαθηματικά στην ευρύτερη έννοιά τους είναι η ανάπτυξη όλων των μορφών τυπικού, αναγκαίου και παραγωγικού συλλογισμού» και στον Bertrund Russell (1903) «Καθαρά μαθηματικά είναι η κλάση όλων των προτάσεων της μορφής ‘p συνεπάγεται q’ όπου p και q είναι προτάσεις...», είναι ενδεικτικοί των συμπερασμάτων, στα οποία είχε φτάσει η μεγάλη πλειοψηφία της μαθηματικής κοινότητας στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα. Είναι μάλλον σίγουρο ότι αυτή η άποψη δεν έχει στις μέρες μας πάρα πολλούς υποστηρικτές. Στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε, διάφορες εφαρμογές της αξιωματικής μεθόδου, στην ίδια τη λογική, είχαν ως αποτέλεσμα τη μαθηματική λογική καθώς και τη διαπίστωση ότι η «λογική», όταν αναλυθεί με αξιωματικό τρόπο δεν είναι πραγματικά μια μοναδική θεωρία, με τον ίδιο τρόπο που εγκαταλείφθηκε η μοναδικότητα της Ευκλείδειας γεωμετρίας με την επινόηση των μη Ευκλείδειων γεωμετριών.

1.2.Η αξιωματική θεμελίωση στην αρχαία Ελλάδα

Με τα στοιχεία που παίρνουμε από την Ευδήμια Σύνοψη, η αξιωματική μέθοδος φαίνεται να έχει εξελιχθεί με τους Πυθαγόρειους, ως φυσική συνέπεια της εφαρμογής της παραγωγικής διαδικασίας στα μαθηματικά. Αν αυτό είναι αληθινό, τότε πρέπει να παραχωρήσουμε στους Πυθαγόρειους μια πολύ υψηλή θέση στην ιστορία της ανάπτυξης των μαθηματικών. Παρόλα αυτά, δεν μπορούμε να είμαστε καθόλου βέβαιοι για το ρόλο που έπαιξαν στην εξέλιξη αυτή ο Θαλής και ο Πυθαγόρας και ίσως να είναι πιο κοντά στην αλήθεια το ότι τα πρώτα ελληνικά μαθηματικά δεν διέφεραν από αυτά των άλλων ανατολικών λαών. Μια ουσιαστική στροφή στην ανάπτυξη ενός θέματος συμβαίνει συνήθως κάτω από κρίσιμες καταστάσεις και στα μαθηματικά τέτοιες συνθήκες ανατροπής εμφανίστηκαν κάποια στιγμή τον πέμπτο αιώνα π.Χ. με την ανακάλυψη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα μεγέθη είναι σύμμετρα, δηλαδή το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός ευθύγραμμου τμήματος ως προς οποιαδήποτε μονάδα πρέπει να είναι ρητός αριθμός. Αποδεικνύοντας ότι όταν μετρηθεί το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με μονάδα μια κάθετη πλευρά του, το αποτέλεσμα δεν είναι ρητός, κατέρριψαν τη δοξασία τους αυτή. Η συνειδητοποίηση αυτού του λάθος όμως δεν προκάλεσε τη διάλυση των πυθαγορείων αλλά αντίθετα τους κινητοποίησε στην εύρεση της αλήθειας. Μετά την ανακάλυψη ότι υπάρχουν ασύμμετρα γεωμετρικά μεγέθη οι πυθαγόρειοι κατανόησαν ότι δεν είναι δυνατόν να προχωρήσουν σε γεωμετρικές έρευνες χρησιμοποιώντας μόνο ακέραιους θετικούς αριθμούς. Θεμελίωσαν από την αρχή τη θεωρία τους και προχώρησαν τη μαθηματική επιστήμη, όπως άλλωστε φαίνεται από την πρόταση των Στοιχείων του Ευκλείδη Χ2, που αποτελεί σταθμό στα μαθηματικά.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου
ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον
μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Σε αυτή την αναζήτηση, μεγάλη ήταν η συμβολή του Ευδόξου από την Κνίδο, ο οποίος δημιούργησε μια νέα θεωρία αναλογιών για την οποία θα μιλήσουμε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο.

Ο Αριστοτέλης όμως είναι αυτός, που έθεσε τους κανόνες της λογικής, ακολουθώντας τους συλλογισμούς των προκατόχων του τόσο στην Ακαδημία του Πλάτωνος όσο και προγενέστερα. Στο βιβλίο του Αναλυτικά Ύστερα, στο χωρίο 72a14 – 24 εισάγει ή επεξηγεί τις έννοιες: θέσις, αξίωμα, ορισμός, υπόθεσις.

Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς **θέσιν** μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι· ἣν δ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, **ἀξίωμα**· ἔστι γὰρ ἔνια τοιαῦτα· τοῦτο γὰρ μάλιστ' ἐπὶ τοῖς τοιούτοις εἰώθαμεν ὄνομα λέγειν. θέσεως δ' ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀντιφάσεως λαμβάνουσα οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, **ὑπόθεσις**, ἡ δ' ἄνευ τούτου **ὁρισμός**. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις	*Ονομάζω **θέση** την άμεση εκείνη αρχή συλλογισμού που δεν μπορεί να αποδειχτεί ούτε είναι ανάγκη να την κατέχει κάποιος προκειμένου να μάθει κάτι.* ***Αξίωμα** [ονομάζω] εκείνη, αντιθέτως που είναι ανάγκη να την κατέχει κάποιος προκειμένου να μάθει οτιδήποτε. Υπάρχουν πράγματι ορισμένες αλήθειες αυτού του είδους και είναι σε αυτές κυρίως που συνηθίζουμε να αποδίδουμε την ονομασία αυτή.* *Αν τώρα μια θέση σύγκειται αδιακρίτως από ένα από τα μέρη της εξαγγελίας, όπως για παράδειγμα όταν λέω ότι ένα πράγμα είναι ή ότι δεν είναι τότε πρόκειται για **υπόθεση**, αν όχι πρόκειται για **ορισμό**. Ο ορισμός είναι πράγματι ένα είδος θέσεως.* *Διότι ο αριθμητικός θεωρεί ως αδιαίρετη τη μονάδα κατά την ποσότητα. Αυτό δεν είναι υπόθεση γιατί το τι είναι μονάδα και το να είναι κάτι ίσο με τη μονάδα δεν*

μέν ἐστι· τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ ποσόν· ὑπόθεσις δ' οὐκ ἔστι· τὸ γὰρ τί ἐστι μονὰς καὶ τὸ εἶναι μονάδα οὐ ταὐτόν.	*είναι το ίδιο.*

και λίγο πιο κάτω ...

Αριστοτέλη «Αναλυτικά Ύστερα» 76a31 – 77a4	
Λέγω δ' **ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι**. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι· οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι. Ἔστι δ' ὧν χρῶνται ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς ἐπιστήμαις τὰ μὲν ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, κοινὰ δὲ κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ χρήσιμόν γε ὅσον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ἐπιστήμην γένει· ἴδια μὲν οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐθύ, κοινὰ δὲ οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά.	*«Ονομάζω **αρχές** σε κάθε γένος εκείνες για τις οποίες το ότι υπάρχουν δεν μπορεί να αποδειχθεί. Το τι λοιπόν σημαίνουν οι όροι «πρώτες αρχές» καθώς και «οι ιδιότητες που απορρέουν από αυτές» θεωρείται ως δεδομένο. Ως προς το ότι όμως υπάρχουν, για μεν τις αρχές θεωρείται κατ' ανάγκην δεδομένο, ενώ για τα άλλα θα πρέπει να αποδεικνύεται. Για παράδειγμα το τι είναι η μονάδα ή τι είναι ευθύ ή τρίγωνο, αυτά είναι δεδομένα. Και ενώ είναι δεδομένη η ύπαρξη της μονάδος και του μεγέθους, η ύπαρξη των υπολοίπων πρέπει να αποδεικνύεται.* *Από τις αρχές που χρησιμοποιούμε στις αποδεικτικές επιστήμες, άλλες ανήκουν αποκλειστικά σε κάθε επιστήμη και άλλες είναι κοινές. Και βέβαια πρέπει να χρησιμοποιούνται από κοινού, κατ' αναλογία, επειδή χρησιμοποιούνται στο μέτρο που εμπίπτουν στο γένος που ανήκει η κάθε επιστήμη. Παράδειγμα αποκλειστικής αρχής είναι το τι η «γραμμή» και το «ευθύ» είναι και κοινή αρχή είναι ότι αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπολειπόμενα θα είναι ίσα.* *Από αυτές τις αρχές όμως ισχύει μόνο ένα μέρος κάθε φορά, όσο αρμόζει στο δεδομένο γένος. Ο γεωμέτρης την εφαρμόζει για τα μεγέθη, ο περί την αριθμητική*

ἱκανὸν δ' ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν. Ἔστι δ' ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὑτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς. ταῦτα γὰρ λαμβάνουσι τὸ εἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά, τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητικὴ τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος, ἡ δὲ γεωμετρία τί τὸ ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, ὅτι δ' ἔστι, δεικνύουσι διά τε τῶν κοινῶν καὶ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων. καὶ ἡ ἀστρολογία ὡσαύτως. πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, ὅσα τε εἶναι τίθεται (ταῦτα δ' ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει	*στους αριθμούς.* *Επίσης είναι αποκλειστικά για κάθε επιστήμη και τα αντικείμενα που εκλαμβάνει ως υπαρκτά και αυτά τα οποία μελετά ως προς τις ιδιότητές τους, όπως για παράδειγμα οι μονάδες για την αριθμητική και οι γραμμές ή τα σημεία για τη γεωμετρία.* *Πράγματι, για τα αντικείμενα αυτά είναι δεδομένο το ότι υπάρχουν καθώς και το ότι είναι συγκεκριμένα. Σε σχέση όμως με τις ιδιότητές τους μόνο το τι σημαίνει η καθεμιά ιδιότητα θεωρείται ως δεδομένο. Για παράδειγμα, θεωρείται ως δεδομένο από την αριθμητική το τι σημαίνει περιττός ή άρτιος ή τετράγωνο ή κύβος. Και για τη γεωμετρία το τι είναι χωρίς λόγο ή τεθλασμένη ή η νεύσις. Το ότι αυτά υπάρχουν αποδεικνύεται μόνο μέσα από τις κοινές τους αρχές αλλά και από τα συμπεράσματά τους που έχουν ήδη αποδειχθεί. Το ίδιο ισχύει και για την αστρολογία.* *Κάθε λοιπόν αποδεικτική επιστήμη στρέφεται κυρίως γύρω από τρία πράγματα. Εκείνα που θεωρεί ότι υπάρχουν (αυτά είναι το γένος του οποίου εξετάζει τις καθ' αυτές ιδιότητες), τα λεγόμενα κοινά αξιώματα με βάση τα οποία πραγματοποιείται η απόδειξη (ως πρώτα προκείμενα) και τρίτον τις ιδιότητες, για τις οποίες η επιστήμη θεωρεί ως δεδομένο το τι σημαίνουν.* *Τίποτα ωστόσο δεν εμποδίζει τις επιστήμες να παραβλέπουν, ορισμένες από αυτές, τα τρία αυτά πράγματα. Για παράδειγμα, μπορεί να υποτεθεί ότι υπάρχει το γένος, αν είναι πρόδηλο και προφανές ότι υπάρχει (και δεν είναι το ίδιο προφανές ότι υπάρχει αριθμός με το ότι υπάρχει ψυχρό ή θερμό). Επίσης η επιστήμη μπορεί να μην αναφέρει ρητά για το τι σημαίνουν οι ιδιότητες, αν συμβαίνει να είναι προφανείς. Αυτό γίνεται στις κοινές αρχές, όπου γίνεται*

ἕκαστον λαμβάνει. ἐνίας μέντοι ἐπιστήμας οὐδὲν κωλύει ἔνια τούτων παρορᾶν, οἷον τὸ γένος μὴ ὑποτίθεσθαι εἶναι, ἂν ᾖ φανερὸν ὅτι ἔστιν (οὐ γὰρ ὁμοίως δῆλον ὅτι ἀριθμὸς ἔστι καὶ ὅτι ψυχρὸν καὶ θερμόν), καὶ τὰ πάθη μὴ λαμβάνειν τί σημαίνει, ἂν ᾖ δῆλα· ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον. ἀλλ' οὐδὲν ἧττον τῇ γε φύσει τρία ταῦτά ἐστι, περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν. Οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις οὐδ' αἴτημα, ὃ ἀνάγκη εἶναι δι' αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη. οὐ γὰρ πρὸς τὸν ἔξω λόγον ἡ ἀπόδειξις, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ, ἐπεὶ οὐδὲ συλλογισμός. ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί. ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτ', ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν	*ρητή μνεία του τι σημαίνει να αφαιρεθούν από ίσα, επειδή αυτό είναι γνωστό.* *Σε κάθε περίπτωση αυτές οι εξαιρέσεις δεν εμποδίζουν σε τίποτα να είναι τρία τα εκ φύσεως συστατικά μέρη της απόδειξης, δηλαδή* *το αντικείμενο της απόδειξης* *οι προς απόδειξη ιδιότητες* *οι αποδεικτικές αρχές* *Δεν είναι εξάλλου ούτε υπόθεση, ούτε αίτημα αυτό που υπάρχει από μόνο του και αυτό που θεωρούμε ότι υπάρχει, επειδή η απόδειξη από μόνη της δεν απευθύνεται στον έξω λόγο, αλλά στο λόγο της ψυχής. Και είναι αληθές ότι μπορεί πάντα κάποιος να προβάλλει ενστάσεις στον εξωτερικό λόγο. Όχι όμως πάντα και στον εσωτερικό. Όσα λοιπόν είναι αποδείξιμα, τα θεωρεί ο δάσκαλος ως δεδομένα, χωρίς να τα αποδείξει, αν συμβεί να τα θεωρεί ως δεδομένα με τη συναίνεση του μαθητή. Αποτελούν δε αντικείμενο υποθέσεως και είναι υπόθεση, όχι με την απόλυτη έννοια, αλλά αναφορικά μόνο με τον μαθητή. Αν πάλι συμβαίνει να θεωρεί το ίδιο πράγμα ως δεδομένο ή ο μαθητής δεν έχει καμία γνώμη ή έχει αντίθετη γνώμη σε αυτό, τότε πρόκειται για αίτημα. Και σε αυτό ακριβώς διαφέρουν η υπόθεση από το αίτημα. Δηλαδή το αίτημα είναι αντίθετο με τη γνώμη του μαθητή, ή κάθε πρόταση αποδείξιμη, την οποία κάποιος τη θεωρεί ως δεδομένη και τη χρησιμοποιεί χωρίς απόδειξη.* *Οι όροι λοιπόν δεν είναι υποθέσεις, διότι δεν λένε τίποτα για το αν κάτι είναι ή δεν είναι, αλλά οι υποθέσεις είναι στις προτάσεις της κάθε επιστήμης που ανήκουν. Οι όροι πρέπει απλώς να γίνονται κατανοητοί. Αυτό όμως δεν συνιστά υπόθεση (εκτός αν κάποιος έλεγε ότι με το να ακούει κάτι, αυτό είναι*

οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, ἂν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτό, αἰτεῖται. καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας. Οἱ μὲν οὖν ὅροι οὐκ εἰσὶν ὑποθέσεις (οὐδὲν γὰρ εἶναι ἢ μὴ λέγεται), ἀλλ' ἐν ταῖς προτάσεσιν αἱ ὑποθέσεις, τοὺς δ' ὅρους μόνον ξυνίεσθαι δεῖ· τοῦτο δ' οὐχ ὑπόθεσις (εἰ μὴ καὶ τὸ ἀκούειν ὑπόθεσίν τις εἶναι φήσει), ἀλλ' ὅσων ὄντων τῷ ἐκεῖνα εἶναι γίνεται τὸ συμπέρασμα. (οὐδ' ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.) ἔτι τὸ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις πᾶσα ἢ ὡς ὅλον ἢ ὡς ἐν μέρει, οἱ δ' ὅροι οὐδέτερον τούτων.	*υπόθεση). Αντίθετα, υποθέσεις είναι όλα εκείνα τα οποία με το να είναι όπως είναι, μπορεί να παράγεται το συμπέρασμα. Ούτε πρέπει να λέμε ότι κάνει ψευδείς δηλώσεις ο γεωμέτρης που υποστηρίζει ότι μια γραμμή έχει μήκος ένα πόδι, ενώ δεν έχει, ή ότι είναι ευθεία κάτι, ενώ δεν είναι. Ο γεωμέτρης δεν συμπεραίνει το παραμικρό από τη συγκεκριμένη γραμμή που μνημονεύει, αλλά συμπεραίνει αποκλειστικά από όσα φανερώνουν τα σχήματά του. Εξάλλου, κάθε αίτημα και κάθε υπόθεση, νοούνται είτε ως όλον είτε ως μέρος. Ενώ οι ορισμοί δεν είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο».*

Μπορούμε να πούμε, συνοψίζοντας από το παραπάνω κείμενο, ότι για τον Αριστοτέλη οι ορισμοί και οι υποθέσεις είναι εσωτερικές αρχές κάθε κλάδου ή επιστήμης ενώ τα αξιώματα είναι κοινά. Με αυτή τη διάκριση εννοεί ότι το αξίωμα χρησιμοποιείται σε περισσότερες από μία επιστήμες, ενώ ορισμοί και υποθέσεις χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στη συγκεκριμένη επιστήμη. Πιο συγκεκριμένα, για τους ορισμούς χρησιμοποιεί παρεμφερείς όρους, όπως όροι, ορισμοί, τι είναι, τι σημαίνει. Έτσι, ο ορισμός κάποιου πράγματος θέτει την ουσία του, δηλαδή το τι είναι και επιπλέον δέχεται ότι οι ορισμοί δεν μπορούν να αποδειχθούν και ότι την αλήθεια τους τη θεωρούμε αναγκαία. Για τις υποθέσεις αναφέρει ότι περιγράφουν προϋποθέσεις ύπαρξης. Για παράδειγμα το τι είναι μονάδα αποτελεί ορισμό, αλλά η ύπαρξη της μονάδας είναι μια υπόθεση. Διευκρινίζει όμως ότι η ύπαρξη των παραγόμενων ακολουθεί την ύπαρξη των πρωταρχικών. Τέλος για τα αξιώματα (ή κοινές αρχές) αναφέρει ότι μόνο αυτές εφαρμόζονται σε κάθε επιστήμη και καθιστά σαφές ότι αν και οι αρχές αυτές χρησιμοποιούνται ευρέως στις αποδεικτικές επιστήμες, είναι ουσιαστικά αναπόδεικτες.

Αυτά τα θεμέλια που έθεσε ο Αριστοτέλης ακολουθούν τη λογική μέχρι τις μέρες μας. Ο Αριστοτέλης απέσπασε τη λογική από τη μεταφυσική, τη διαχώρισε από την ψυχολογία, για να τη θέσει στην υπηρεσία της συνολικής γνωστικής λειτουργίας και της επιστημονικής έρευνας ειδικότερα. Η Αριστοτελική λογική διέκρινε τελικά το είναι από το ειδέναι. Ως είναι η ίδια, διενεργείται, συντελείται μέσα στο ανθρώπινο ειδέναι. Το έδαφος στο οποίο ασκείται και λειτουργεί είναι η ανθρώπινη γνώση.

Προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης και μετεξέλιξης της Αριστοτελικής λογικής θα στραφεί πρώτος ο Leibnitz. Αντιμετωπίζοντας με κριτικό πνεύμα τη συλλογιστική του Αριστοτέλη, επιχείρησε, βλέποντας τις κάποιες ομοιότητες της λογικής με την άλγεβρα, να παρουσιάσει τη λογική υπό αλγεβρική μορφή. Η πρώτη αυτή έξοδος των μαθηματικών από το έδαφός τους αποτελεί και την πρώτη επέκταση της Αριστοτελικής λογικής, με την εγκαινίαση της συμβολικής λογικής.

1.3.Σύγχρονες κρίσιμες καταστάσεις και νέα αξιωματικοποίηση

Σε ένα παρόμοιο κλίμα αμφισβήτησης των θεμελίων των μαθηματικών βρέθηκε η μαθηματική κοινότητα και στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, όταν και εμφανίστηκαν τα συνολοθεωρητικά παράδοξα.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών εξελίξεων από το 1850 και μετά είναι οι ερευνητικές προσπάθειες που αφορούν τη **θεμελίωση** των μαθηματικών. Μια σειρά εξελίξεων, στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες γενικότερα, του $19^{ου}$ αιώνα έπαιξαν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη ενός νέου, ξεχωριστού κλάδου – των **θεμελίων των μαθηματικών** (Foundation of Mathematics). Η θεωρία των συνόλων και των υπερπεπερασμένων μεγεθών του Cantor, οι προσπάθειες θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών των Cantor, Dedekind και Weierstrass καθώς και η νέα μορφή της λογικής ως μαθηματικής ή συμβολικής λογικής ασφαλώς συνέτειναν στη διαμόρφωση του κλάδου των θεμελίων των μαθηματικών.

Προς τα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα συναντώνται δύο ιστορικά ξεχωριστές ερευνητικές κατευθύνσεις: η **λογική**, που μας φέρνει στον Αριστοτέλη, στον Ευκλείδη και τις μελέτες τους για το *τυπικώς συλλογίζεσθαι* και η **μαθηματική ανάλυση** που μας πάει πίσω στον Αρχιμήδη, μέσω των νεότερων εξελίξεων κατά τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα. Η ανάγκη **συνένωσης** των δύο αυτών κατευθύνσεων γίνεται εμφανής ειδικότερα μετά την ανακάλυψη του **απειροστικού λογισμού** από τους Newton και Leibnitz στα τέλη του $17^{ου}$ αιώνα. Είναι κοινή διαπίστωση των ερευνητών, κατά τον $19^{ο}$ αιώνα κυρίως, ότι η αποσαφήνιση ζητημάτων που αφορούν στο λογισμό και τη μαθηματική ανάλυση στηρίζεται τελικά στη μελέτη άπειρων συνόλων και γι αυτό απαιτείται να καταφύγουμε στην «*καθαρότητα*» των λογικών μεθόδων που είχαν εντωμεταξύ προκύψει. Είναι επίσης γνωστό ότι ο Cantor οδηγήθηκε στη συνολοθεωρία μελετώντας προβλήματα στη μαθηματική ανάλυση, συγκεκριμένα μελετώντας προβλήματα που αφορούσαν άπειρα σύνολα πραγματικών αριθμών.

Όμως η θεωρία των συνόλων εμφανίστηκε στα μαθηματικά με τον ίδιο τρόπο όπως και η λογική. Προέκυπτε από την εμπειρία των επιστημόνων με πεπερασμένα μεγέθη. Το γεγονός ότι η επέκταση της κλασικής λογικής και της θεωρίας συνόλων σε άπειρα πεδία θα οδηγούσε σε δυσκολίες δεν είχε γίνει αντιληπτό μέχρι περίπου το 1900, οπότε εμφανίστηκαν οι πρώτες αντιφάσεις.

Με δεδομένο ότι τα παράδοξα είναι συνδεδεμένα με τη λογική, καλό θα ήταν να δίναμε έναν όχι ιδιαίτερα αυστηρό, διαισθητικό ορισμό της. Η **λογική**, λοιπόν είναι κατά βάση

«..η επιστήμη της ανάλυσης των συμπερασματικών μεθόδων που το ανθρώπινο μυαλό χρησιμοποιεί».[2]

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι η λογική δεν ενδιαφέρεται για το περιεχόμενο της οποιασδήποτε συμπερασματικής διαδικασίας αλλά ενδιαφέρεται μόνο για το αν η αλήθεια των υποθέσεων συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Τα παράδοξα λοιπόν δεν είναι τίποτε άλλο παρά το αποτέλεσμα θεμιτών συμπερασματικών διαδικασιών που οδηγούν σε αντιφάσεις, δηλαδή σε συμπεράσματα της μορφής «και το Α και η άρνηση του Α ισχύουν».

Τα παράδοξα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες: τα *λογικά ή συνολοθεωρητικά και τα ερμηνευτικά*. Από τα λογικά παράδοξα τα πιο γνωστά ήταν του **Russell**. Το 1902, όταν και ο Russell ανακοίνωσε το παράδοξο αυτό στον Frege, καταστρέφοντάς του προσπάθειες χρόνων για τη θεμελίωση των μαθηματικών, κυριαρχούσε η εντύπωση ότι αρκούσε μια ιδιότητα για την περιγραφή ενός συνόλου. Το παράδοξο του Russell είναι το εξής:

Ας θεωρήσουμε το σύνολο Ω όλων των συνόλων Α που έχουν την ιδιότητα να μην ανήκουν στον εαυτό τους. Για παράδειγμα το σύνολο *όλων των αφηρημένων ιδεών* είναι μια *αφηρημένη ιδέα* και επομένως ανήκει στο σύνολο, ή το σύνολο *όλων των φράσεων με λιγότερες από 100 λέξεις*. Η φράση αποτελείται από λιγότερες από 100 λέξεις και άρα ανήκει στο σύνολο. Τότε, αν το σύνολο Ω ανήκει στο Ω συμπεραίνουμε ότι το Ω δεν ανήκει στον εαυτό του άρα το Ω δεν ανήκει στο Ω. Αν πάλι το Ω δεν ανήκει στον εαυτό του τότε το Ω ανήκει στο Ω. Με λίγα λόγια το Ω ανήκει και δεν ανήκει στο Ω ταυτόχρονα!

Η εμφάνιση των παραδόξων δημιούργησε μια εξαιρετικά δυσάρεστη και ταυτόχρονα εξαιρετικά γόνιμη ατμόσφαιρα για την ανάπτυξη της λογικής, της θεωρίας των συνόλων, της φιλοσοφίας των μαθηματικών και γενικά της μελέτης θεμελιακών προβλημάτων, που είχαν σχέση με τη γενικότερη μαθηματική πρακτική.

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε για την εξοστράκιση των παραδόξων δεν ήταν ενιαία. Για τον εξοστρακισμό των λογικών παραδόξων απαιτήθηκαν, από την μια μεριά, σοβαρές περικοπές στην ελευθερία της μαθηματικής πρακτικής και από την άλλη μεριά αυστηροί περιορισμοί στη χρήση εννοιών, που διαισθητικά έδειχναν ότι δεν θα

[2] Αναπολιτάνος Δ., Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Νεφέλη

δημιουργούσαν προβλήματα. Στα μάτια ορισμένων μαθηματικών της εποχής φαινόταν ως προαπαιτούμενο η δημιουργία μιας **καθαρής γλώσσας**, στο πλαίσιο της οποίας θα μπορούσαν να διατυπωθούν όλα τα υπάρχοντα μαθηματικά. Στα μάτια άλλων εκείνο που χρειαζόταν ήταν μια ριζική **αναθεώρηση της μαθηματικής πρακτικής** στο σύνολό της.

Το κλίμα της κρίσης ήταν ιδιαίτερα δυσάρεστο αλλά και γόνιμο στον υπέρτατο βαθμό. Δεν είναι λοιπόν καθόλου παράξενο το ότι ακριβώς αυτή την εποχή έκαναν την εμφάνισή τους οι τρεις βασικές σχολές της φιλοσοφίας των μαθηματικών, που ονομάζονται *Λογικισμός, Φορμαλισμός* και *Ιντουισιονισμός*. Στόχος και των τριών αποτέλεσε η «*κάθαρση*» των θεμελίων των μαθηματικών και η παράδοσή τους στην επιστημονική κοινότητα με την «αγνότητα» που είχαν πριν την κρίση του τέλους του 19^{ου} αιώνα.

Ένας από τους βασικούς πρωταγωνιστές των προσπαθειών για την κάθαρση των θεμελίων των μαθηματικών ήταν ο **Bertrand Russell**. Ο άνθρωπος που οδήγησε, με την ανακοίνωση του παράδοξού του, τον **Frege** να παραδεχθεί ότι τα θεμέλια της θεωρίας του ήταν σαθρά, ήταν κι αυτός που, στο έργο του *Principia Mathematica*, το οποίο συνέγραψε με τον **Alfred North Whitehead,** αποτέλεσε τον επίδοξο αναγεννητή των μαθηματικών. Οι στόχοι της συγγραφής του *Principia* ήταν η **πλήρης τυποποίηση των μαθηματικών** και η προώθηση και τεχνική τεκμηρίωση της φιλοσοφικής άποψης που σήμερα είναι γνωστή με τον όρο **Λογικισμός**.

Η ιδέα είναι ότι οι έννοιες και τα αντικείμενα των μαθηματικών, όπως π.χ. «*ο αριθμός*» μπορούν να οριστούν από κάποια λογική ορολογία και με αυτούς τους ορισμούς, τα θεωρήματα των μαθηματικών μπορούν να παραχθούν από λογικές αρχές. Η θέση αυτή των λογικιστών αναδείχτηκε από την ανάγκη τους να σπρώξουν τα θεμέλια των μαθηματικών όσο πιο βαθειά μπορούσαν ώστε να αποτελέσουν σταθερότερο οικοδόμημα. Δεν ήταν η πρώτη φορά που μια τέτοια ιδέα διατυπώθηκε. Ήδη ο **Leibnitz** ήταν, όπως είδαμε, ο πρώτος που υποστήριξε με τρόπο συστηματικό τον Λογικισμό ως φιλοσοφική θέση. Το απραγματοποίητο όνειρό του για τη δημιουργία μιας τυπικής γλώσσας, ικανής να εκφράσει στο επίπεδο του σημαίνοντος οτιδήποτε υπάρχει στο επίπεδο του σημαινόμενου καθώς και όλη η θεωρία του μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της πίστης του για την πρωτοκαθεδρία της λογικής, προέκταση της οποίας θεωρούσε τα μαθηματικά. Ο Λογικισμός στην κατά Leibnitz εκδοχή του παρουσίαζε αδυναμίες διαφορετικές από αυτές που παρουσίαζε ο Λογικισμός του Russell και του Frege. Οι αδυναμίες των απόψεών τους οφείλονται κυρίως στο απραγματοποίητο της αναγωγής των μαθηματικών αντικειμένων με καθαρά λογικά μέσα σε καθαρά λογικές κατηγορίες.

Ο Frege συνέλαβε τη θεμελίωση της αριθμητικής μέσω ενός περίτεχνου λογικού συστήματος **αναγωγής** των θεμελιωδών εννοιών και οντοτήτων της αριθμητικής στη λογική και μάλιστα με ισχυρό τρόπο, αφού οι φυσικοί αριθμοί κυριολεκτικά **μετατρέπονται** σε λογικές οντότητες (και παρόμοια και οι άλλες θεμελιώδεις έννοιες της αριθμητικής). Έτσι ο Frege μιλά για **λογικά αντικείμενα** και ασφαλώς οι φυσικοί αριθμοί είναι τα παραδειγματικά λογικά αντικείμενα.

Στο φιλοσοφικό επίπεδο προτείνει τη διατύπωση ενός προγράμματος (**οντολογικού**) **ρεαλισμού** της αριθμητικής, στη βάση της διάκρισης **έννοια – (λογικό) αντικείμενο**. Η ανάλυση του Frege του επιτρέπει να καθορίσει την υπόσταση των φυσικών αριθμών ξεπερνώντας τα όρια της ανάλυσης του Kant. Ας θυμηθούμε ότι σύμφωνα με τον Kant, οι προτάσεις της αριθμητικής είναι **συνθετικές a priori**. Αντίθετα, για τον Frege, οι αριθμητικές προτάσεις είναι **αναλυτικές** αφού η ανάλυσή τους στα πλαίσια της Εννοιογραφίας του μας οδηγεί στη λογική της ταυτότητας. Για να το δείξει αυτό έπρεπε να δείξει πώς να τις παράγει από τους γενικούς λογικούς κανόνες και τους ορισμούς.

Ξεκίνησε με ένα γενικό δεδομένο για την αρίθμηση. Θεώρησε ότι δυο έννοιες είναι **ισάριθμες** εάν υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των αντικειμένων που υπάγονται στη μια και των αντικειμένων που υπάγονται στην άλλη. Παρά τον προσδιορισμό «*ισάριθμος*» έδειξε πως ορίζεται η ισαριθμησιμότητα χωρίς να προϋποθέτει τους φυσικούς αριθμούς ή την έννοια του αριθμού γενικώς. Πρότεινε την ακόλουθη θέση που τώρα είναι γνωστή ως «Αρχή του Hume»:

Για οποιεσδήποτε έννοιες F,G ο αριθμός της F ταυτίζεται με τον αριθμό της G αν και μόνο αν η F και η G είναι ισάριθμες.

Έστω ότι το Z είναι η έννοια «όχι ταυτοτικό με τον εαυτό του». Για κάθε αντικείμενο α, η Zα είναι ψευδής. Ο Frege όρισε τον αριθμό μηδέν να είναι ο αριθμός της έννοιας Z. Με παρόμοιους τρόπους όρισε τον επόμενο ενός αριθμού, το 1, το 2, κ.τ.λ. Έτσι κατάφερε να δείξει πως η αριθμητική είναι αναλυτική. Το επίτευγμά του ήταν πράγματι μεγάλο. Εντούτοις η αριθμητική είναι μόνο ένα αρχικό τμήμα των μαθηματικών. Τα σχέδιά του για την επέκταση του λογικισμού στην Πραγματική Ανάλυση δεν αναπτύχθηκαν σε ένα λεπτομερές πρόγραμμα. Ακόμα όμως και αν περιοριστούμε στην Αριθμητική είναι λυπηρό να πούμε ότι η ιστορία δεν είχε αίσιο τέλος.

Στο όψιμο έργο του, το *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903), ο Frege συμπεριλαμβάνει μια πλήρη ανάπτυξη της θεωρίας των εννοιών και των εκτάσεών τους. Μαζί διατυπώνεται και ο **βασικός νόμος V**, που μπορεί να παραφρασθεί ως εξής:

Για οποιεσδήποτε έννοιες F, G η έκταση της F είναι ταυτοτική με την έκταση της G αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο α, Fα αν και μόνο αν Gα.

Με μια επιστολή του ο Russell το 1902 αποκάλυψε ότι ο βασικός νόμος V είναι ασυνεπής διατυπώνοντας το παράδοξο που φέρει το όνομά του. Ο Frege θεώρησε το παράδοξο αυτό ως καταστρεπτικό για το λογικιστικό του πρόγραμμα και μετά από μερικές ανεπιτυχείς προσπάθειες να συνέλθει από το χτύπημα, εγκατέλειψε το πρόγραμμά του.

Τη σκυτάλη στη συνέχιση του έργου του Frege πήραν άλλοι με βασικότερο διάδοχό του τον ίδιο τον Russell.

Ο Russell υποστήριξε ότι η ανάπτυξη των φυσικών αριθμών του Frege είναι ουσιαστικά σωστή. Στην πραγματικότητα υποστήριξε ότι από τη στιγμή που ο βασικός νόμος V κατανοηθεί κατάλληλα, τότε είναι σωστός ως ένας ορισμός της έννοιας της «έκτασης» ή της «κλάσης». Η διάγνωσή του ήταν πως η παραγωγή της αντίφασης από τον νόμο V εμπεριέχει έναν εσφαλμένο συλλογισμό μη κατηγορηματικό. Η ανάπτυξη του παράδοξου του Russell έρχεται σε σύγκρουση με την «*Αρχή του Φαύλου Κύκλου*». Πρέπει κάτω από όλες τις περιπτώσεις να είναι άνευ νοήματος το να υποθέτει κανείς ότι μια κλάση είναι ή δεν είναι μέλος του εαυτού της. Κατά συνέπεια δεν μπορεί να υπάρξει μια καθολική κλάση που να περιέχει όλες τις κλάσεις του σύμπαντος.

Πρότεινε λοιπόν, μαζί με τον Whitehead, στο *Principia* μια **θεωρία τύπων** η οποία διαμέριζε το σύμπαν. Ας ορίσουμε ένα «*άτομο*» ως ένα αντικείμενο που δεν είναι κλάση. Τα άτομα είναι **τύπου 0** και οι κλάσεις των ατόμων είναι **τύπου 1**, κλάσεις κλάσεων ατόμων είναι **τύπου 2** κ.ο.κ. Η εισαγωγή των κλάσεων επέτρεψε στον Russell να απλοποιήσει τους ορισμούς του Frege για τους φυσικούς αριθμούς.

Δύο σοβαρά εμπόδια όμως παρουσιάστηκαν στην προσπάθεια των Russell και Whitehead. Σύμφωνα με τη θεωρία τύπων, η ύπαρξη ενός δεδομένου φυσικού αριθμού εξαρτάται από τον ορισμό των ατόμων στο σύμπαν. Επειδή αυτά είναι πεπερασμένα υπήρξε πρόβλημα στο να παρασταθούν οι άπειροι φυσικοί αριθμοί. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα υιοθέτησαν ένα **αξίωμα του απείρου** σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν άπειρα άτομα.

Το δεύτερο εμπόδιο είχε να κάνει με την μη-κατηγορηματικότητα της μαθηματικής επαγωγής. Πρότειναν έτσι μια νέα **αναγωγική** αρχή που δηλώνει ότι σε κάθε κλάση c, υπάρχει μια κατηγορηματική κλάση c΄ (επιπέδου 0) η οποία έχει τα ίδια στοιχεία με την c. Η αναγωγική αρχή ήταν ένα καλό τρυκ ώστε να μπορούν να προχωρούν σαν να ήταν αποδεκτοί οι μη-κατηγορηματικοί ορισμοί. Τι είναι όμως η αρχή αυτή; Αναλυτική; A priori γνώσιμη; Είναι τουλάχιστον αληθής; Τόσο γι αυτήν όσο και για το αξίωμα του απείρου ο Russell απαντώντας στις κριτικές παραδέχτηκε ότι δεν απολαμβάνουν την ίδια δικαίωση με τις αρχές της λογικής αλλά υποστήριξε ότι είναι ουσιαστικές για την ανάπτυξη των μαθηματικών και έτσι τις πρότεινε ως αιτήματα. Αναγνώρισε ότι η αναγωγική αρχή είναι ένα ψεγάδι στον λογικισμό του.

Οι διάφορες φιλοσοφίες με το όνομα «*φορμαλισμός*» προωθούν τον ισχυρισμό ότι η ουσία των μαθηματικών είναι ο **χειρισμός** των χαρακτήρων. Με μια πρόχειρη ματιά φαίνεται ότι το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής δραστηριότητας αποτελείται από έναν τέτοιο χειρισμό γλωσσικών συμβόλων σύμφωνα με κάποιους κανόνες. Μια λίστα χαρακτήρων και επιτρεπτών κανόνων σχεδόν εξαντλεί ότι μπορεί να ειπωθεί σχετικά με έναν μαθηματικό κλάδο. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι ο **Φορμαλισμός** ως φιλοσοφική άποψη είναι μια λύση ανάγκης. Απεναντίας, εμφανίζεται ως μια απόλυτα θεμιτή άποψη γι αυτούς που, από τη μια μεριά, δεν πιστεύουν σε κάποιο είδος πλατωνικής οντολογίας των μαθηματικών αντικειμένων και από την άλλη, δεν επιθυμούν δραστικές περιοριστικές επεμβάσεις στη μαθηματική πρακτική.

Ο Φορμαλισμός ως φιλοσοφική άποψη δεν είναι ενιαίος. Σύμφωνα με τον Shapiro υπάρχουν τουλάχιστον *δύο διαφορετικές γενικές θέσεις* που ιστορικά διεκδικούν τον τίτλο «φορμαλισμός» και παρά την μεταξύ τους αντίθεση σε κρίσιμα σημεία, οι πολέμιοι και οι υπερασπιστές του φορμαλισμού πολλές φορές τις συγχέουν. Αυτές είναι:

α) ο **φορμαλισμός των όρων** και

β) ο **φορμαλισμός – παιγνίδι** (game formalism)

Ο φορμαλισμός των όρων είναι η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι *χαρακτήρες* ή *σύμβολα* – τα αριθμητικά συστήματα και άλλες γλωσσικές φόρμες. Δηλαδή ο φορμαλιστής των όρων ταυτίζει τις οντότητες των μαθηματικών με τα ονόματά τους. Ένας στοιχειώδης φορμαλισμός των όρων ξεκίνησε από δύο μαθηματικούς, τον **E. Heine** και τον **Johannes Thomae**. Ο Heine (1872) έγραφε: «*Δίνω το όνομα αριθμοί σε κάποια απτά σημάδια, έτσι ώστε η ύπαρξη αυτών των αριθμών να είναι πλέον αδιαμφισβήτητη*». Ο Thomae (1898) υποστήριξε ότι «*η τυπική άποψη μας απαλλάσσει από όλες τις μεταφυσικές δυσκολίες*».

Ο Frege ξεκίνησε μια παρατεταμένη αντιπαράθεση στις απόψεις τους εξηγώντας πως για έναν φορμαλιστή των όρων, η ισότητα δύο μελών δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως ταυτότητα, αφού κάθε μέλος είναι διαφορετικός συμβολισμός. Έτσι μια ισότητα της μορφής «7 + 5 = 6 + 6» σημαίνει απλώς ότι στα μαθηματικά το σύμβολο «5 + 7» μπορεί να αντικατασταθεί από το σύμβολο «6 + 6» χωρίς αλλαγή στην τιμή αλήθειας της πρότασης. Ωστόσο, αν και ο φορμαλισμός των όρων μπορεί ίσως να επεκταθεί στους ακεραίους και τους ρητούς αριθμούς, δεν είναι δυνατόν να οριστεί στους πραγματικούς αριθμούς. Ακόμα όμως και αν ο φορμαλιστής των όρων κατάφερνε με κάποιο τέχνασμα να βρει λύση στο πρόβλημα αυτό, πως θα εξηγούσε μαθηματικές προτάσεις όπως το *Θεώρημα των πρώτων αριθμών* ή το *Θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού λογισμού*; Με ποια έννοια τα θεωρήματα αυτά λέγεται ότι ασχολούνται με σύμβολα;

Η άλλη βασική εκδοχή του φορμαλισμού παρουσιάζει τη μαθηματική πρακτική ως ένα **παιχνίδι** που παίζεται με γλωσσικούς χαρακτήρες. Η αριθμητική και γενικότερα τα μαθηματικά έχουν ως αντικείμενό τους αριθμητικά ή μαθηματικά σύμβολα, χωρίς να αποτελούν θεωρίες για τη συνδυαστική χρήση αυτών των συμβόλων. Οι κανόνες χρήσης των συμβόλων δεν είναι και ούτε μπορούν να αποτελέσουν το αντικείμενο μελέτης κάποιας μεταθεωρίας, όντας οι ίδιοι έξω από το μαθηματικό παιχνίδι. Όπως, δηλαδή, οι κανόνες του σκακιού δεν αποτελούν μέρος κάποιας συγκεκριμένης παρτίδας, έτσι και οι κανόνες χρήσης των μαθηματικών συμβόλων δεν αποτελούν μέρος της αντίστοιχης συγκεκριμένης μαθηματικής πράξης. Σύμφωνα με έναν φορμαλιστή των παιχνιδιών, η αριθμητική και τα μαθηματικά γενικότερα έχουν ως αντικείμενό τους **άδεια σύμβολα** που αποκτούν νόημα μόνο μέσα από το φορμαλιστικό παιχνίδι, με κανόνες που αποτελούν αποτέλεσμα συμφωνίας και με αυτή την έννοια θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από άλλους. Οι κανόνες για τη συνδυαστική χρήση των μαθηματικών συμβόλων αντιστοιχούν σε a priori ιδιότητες της νόησης και γι αυτό δεν είναι αντικαταστάσιμοι.

Η βασική αδυναμία του φορμαλισμού-παιχνίδι είναι ο μη ακριβής καθορισμός της φύσης των κανόνων διεξαγωγής του μαθηματικού παιχνιδιού. Επίσης αδυνατεί να απαντήσει στο ερώτημα γιατί τα μαθηματικά παιχνίδια είναι τόσο χρήσιμα στις επιστήμες. Γιατί κάποια μαθηματικά είναι χρήσιμα για άλλους τομείς μαθηματικών;

Η *εφαρμοσιμότητα* των μαθηματικών αποτελεί ερώτημα στο οποίο οφείλει να απαντήσει ένας φορμαλιστής. Για να είναι πετυχημένη μια εφαρμογή ενός κλάδου, όπως η αριθμητική, οι κανόνες του παιχνιδιού πρέπει να αποτελούν **λογικές συνέπειες**. Ανεξάρτητα από το πώς ερμηνεύεται μια γλώσσα, εάν τελικά τα αξιώματα ισχύουν, τότε τα θεωρήματα που προκύπτουν θα πρέπει να είναι αληθή σύμφωνα με την ίδια ερμηνεία. Η δημιουργία αυστηρών παραγωγικών συστημάτων υποδεικνύει μια δελεαστική φιλοσοφία, που έχει κάτι κοινό με το φορμαλισμό- παιχνίδι, αλλά αποφεύγει αυτήν ακριβώς την παγίδα. Ένας **απαγωγιστής** αποδέχεται ότι οι κανόνες συμπερασμάτων πρέπει να διατηρούν την αλήθεια αλλά επιμένει να θεωρούνται τα αξιώματα των διάφορων μαθηματικών θεωριών σαν να είναι με αυθαίρετο τρόπο συμφωνημένα. Οι βασικές θέσεις του **απαγωγισμού** είναι οι εξής:

- η λογική είναι θεματικά ουδέτερη
- αγνοούν την ερμηνεία και επικεντρώνονται στις λογικές συνέπειες
- η μαθηματική γνώση είναι η λογική γνώση

Η δουλειά του Hilbert στη γεωμετρία του 19^{ου} αιώνα εκπροσωπεί την κατάληξη τέτοιων θεμελιωτικών εξελίξεων. Το **Πρόγραμμα** εφαρμόστηκε στο έργο του «*Οι βάσεις της Γεωμετρίας*» και σήμανε το τέλος στον ουσιαστικό ρόλο της διαίσθησης στη γεωμετρία. Εφόσον τα αξιώματα έχουν διατυπωθεί, η διαίσθηση και η παρατήρηση εξαφανίζονται.

Τα βασικά αιτήματα του προγράμματος του Hilbert για την ασφαλή θεμελίωση των μαθηματικών ήταν τα εξής δύο

(1) Η μαθηματική δραστηριότητα θα πρέπει να συνεχιστεί ως έχει, χωρίς τις περικοπές που επιβάλλουν οντολογικές θεωρήσεις γύρω από τη φύση του πραγματικού απείρου. Κριτήριο για τη συνέχιση της μαθηματικής πράξης θα πρέπει να είναι μόνο η **εσωτερική συνέπεια** (μη – αντιφατικότητα) των τυπικών συστημάτων μέσα στα οποία αυτή διενεργείται.

(2) Η **ασφαλής στήριξη** της μαθηματικής δημιουργίας πρέπει να είναι το πρωταρχικό αίτημα κάθε προσπάθειας για συνολική φιλοσοφική θεώρησή της. Θεμελίωση των μαθηματικών σημαίνει **εξασφάλισή** τους όχι μόνο από την εμφάνιση ήδη γνωστών αλλά και μελλοντικών παραδόξων και αντιφάσεων.

Το δεύτερο αίτημα του Προγράμματος του Hilbert αναφέρεται στην ανάγκη **διάσωσης** και **διασφάλισης** των κλασικών μαθηματικών μέσα από διαδικασίες που θα επέτρεπαν την εύρεση αποδείξεων μη αντιφατικότητας των θεωριών στα πλαίσια των οποίων διενεργείται η μαθηματική πράξη. Οι αποδείξεις αυτές θα πρέπει να είναι **περατοκρατικές**, με την έννοια πως δεν θα πρέπει να χρησιμοποιούνται σε αυτές ιδανικά στοιχεία της θεωρίας. Το αίτημα αυτό που είναι γνωστό ως αίτημα «*καθαρότητας των μεθόδων*» σχετίζεται με τις φιλοσοφικές απόψεις του Hilbert για το πεπερασμένο και το άπειρο. Η περιοχή του πεπερασμένου είναι από μόνη της ασφαλής. Αποτελεί δηλαδή το βασίλειο της πρωτογενούς εποπτείας μας, που, από την ίδια της τη φύση, δεν μπορεί να είναι αντιφατική.

Πιο συγκεκριμένα, ο Hilbert θεώρησε πως ήταν πιθανώς δυνατό να παραχθούν αποδείξεις συνέπειας, με χρήση πολύ βασικών αληθειών που ανήκουν στην περιοχή των πεπερασμένων μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα στην περιοχή μιας πολύ φτωχής και πεπερασμένα ελέγξιμης θεωρίας, βασισμένης πάνω σε μια πέρα από κάθε αμφισβήτηση και κοινή για όλους μας αντίληψη του τι είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Στο επίπεδο της υλοποίησης το πρόγραμμα του Hilbert ήταν καταδικασμένο. Το 1931 ο K. Gödel κατορθώνει να αποδείξει την ύπαρξη μιας μη-αποκρίσιμης πρότασης της γλώσσας της κατά Peano αριθμητικής. Κατορθώνει δηλαδή να κατασκευάσει μια πρόταση που ούτε αυτή ούτε η άρνησή της είναι αποδείξιμες από τα αξιώματα του

Peano. Το θεώρημα αυτό που έγινε γνωστό ως *θεώρημα της μη-πληρότητας* είχε καταλυτικές συνέπειες για το πρόγραμμα του Hilbert. Το πρώτο θύμα των αποτελεσμάτων του Gödel ήταν η πίστη του Hilbert στην περατοκρατική θεμελίωση των μαθηματικών. Το δεύτερο θύμα ήταν η πίστη του στη δυνατότητα απαλοιφής των ιδανικών όρων στη διαδικασία της απόδειξης μιας πραγματικής πρότασης. Μια άλλη βασική θέση του Hilbert που αποδυναμώθηκε ήταν η πίστη του πως η έννοια της αποδειξιμότητας και η έννοια της αλήθειας συμπίπτουν.

1.4.Το πρότυπο της Τυπικής Αξιωματικής Μεθόδου και το Αξιωματικό Σύστημα του Hilbert

Η τυπική αξιωματική μέθοδος βασίζεται στους παρακάτω κανόνες.

1) Υπάρχει ένα σύνολο από τεχνικά ζητήματα (στοιχεία, σχέσεις μεταξύ των στοιχείων, διαδικασίες που μπορούν να εφαρμοστούν στα στοιχεία) τα οποία είναι επιλεγμένα ως απροσδιόριστα ζητήματα (χωρίς κάποιο ξεκάθαρο ορισμό). Αυτά λέγονται **πρωταρχικές έννοιες**.

2) Περιέχει ένα σύνολο από συνθήκες για τις πρωταρχικές έννοιες που δεν αποδεικνύονται (τα **αξιώματα**).

3) Όλα τα άλλα τεχνικά θέματα ορίζονται με βάση τα θέματα που έχουν εισαχθεί πριν.

4) Κάθε άλλη συνθήκη προκύπτει λογικά από προηγούμενα αποδεκτές ή αποδεδειγμένες προτάσεις. Αυτά είναι τα **θεωρήματα**.

5) Για κάθε θεώρημα υπάρχει μια αντίστοιχη πρόταση (που μπορεί να εκφράζεται ή να μην εκφράζεται τυπικά) η οποία επιβεβαιώνει ότι το θεώρημα προκύπτει λογικά από τα αξιώματα.

Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω πρότυπο οι αρχικές έννοιες μπορούν να είναι οτιδήποτε και επομένως μπορούν να αντικατασταθούν από μεταβλητές. Επίσης τα αξιώματα, αφού είναι προτάσεις σχετικά με τις πρωταρχικές έννοιες, δεν είναι τίποτε περισσότερο από προτασιακοί τύποι. Το ίδιο ισχύει και για τα θεωρήματα. Αφού τα αξιώματα και τα θεωρήματα είναι απλοί προτασιακοί τύποι, δηλαδή προτάσεις με μορφή μόνο και χωρίς περιεχόμενο, θα φαινόταν ότι η όλη διαπραγμάτευση είναι κάπως κενή και στερείται εντελώς της αλήθειας ή του ψεύδους. Αυτό όμως δεν συμβαίνει. Λόγω της (5) παίρνουμε την εξής σημαντική πρόταση: (6) Τα αξιώματα συνεπάγονται τα θεωρήματα. Η πρόταση αυτή βεβαιώνει κάτι συγκεκριμένο και επαληθεύσιμο. Είναι αληθής αν πράγματι τα θεωρήματα προκύπτουν από τα αξιώματα και ψευδής αν δεν προκύπτουν. Η πρόταση (6) είναι ακριβώς εκείνο για στο οποίο σημαδεύει εξαρχής το μοντέλο.

Κάθε αξιωματικό σύστημα οφείλει να έχει κάποιες αναγκαίες και κάποιες επιθυμητές ιδιότητες. Από αυτές οι σημαντικότερες είναι οι παρακάτω:

Ισοδυναμία: Δύο αξιωματικά συστήματα λέμε ότι είναι ισοδύναμα, αν κάθε σύστημα συνεπάγεται το άλλο, δηλαδή αν οι αρχικές έννοιες του ενός μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των αρχικών εννοιών του άλλου και αν τα αξιώματα του ενός μπορούν να προκύψουν λογικά από τα αξιώματα του άλλου. Αν δύο αξιωματικά συστήματα είναι ισοδύναμα, τότε οι θεωρίες που προκύπτουν από αυτά είναι ακριβώς ίδιες και πρόκειται για δύο διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου πράγματος. Δεν υπάρχει κάποιο ασφαλές κριτήριο που να διαχωρίζει τα δύο συστήματα, εκτός ίσως από την οικονομία.

Συνέπεια: Ένα σύνολο αξιωμάτων λέγεται συνεπές αν από αυτό δεν προκύπτουν αντιφατικά συμπεράσματα. Αυτή είναι μία πολύ σπουδαία και από τις πιο βασικές ιδιότητες ενός συνόλου αξιωμάτων. Ένα αξιωματικό σύστημα χωρίς αυτή την ιδιότητα δεν είναι αξιωματικό σύστημα. Η πιο ενδεδειγμένη μέθοδος για την εξέταση της συνέπειας μιας αξιωματικής θεμελίωσης είναι η μέθοδος των μοντέλων. Ένα μοντέλο προκύπτει αν δώσουμε κάποια ερμηνεία στις αρχικές έννοιες του συστήματος, οι οποίες μετατρέπουν τα αξιώματα σε αληθείς προτάσεις για κάποιες έννοιες.

Υπάρχουν δύο τύποι μοντέλων, τα πραγματικά και τα ιδεατά. Ένα μοντέλο λέγεται **πραγματικό** όταν οι αρχικές έννοιες εκλαμβάνονται ως αντικείμενα και σχέσεις του πραγματικού κόσμου. Ένα μοντέλο λέγεται ιδεατό, αν οι ερμηνείες που δίνουμε στις αρχικές έννοιες είναι αντικείμενα κάποιου άλλου αξιωματικού συστήματος.

Ανεξαρτησία: Ένα αξίωμα λέγεται ανεξάρτητο, αν δεν αποτελεί λογική συνέπεια των άλλων αξιωμάτων του συνόλου και ένα σύστημα αξιωμάτων λέγεται ανεξάρτητο όταν κάθε αξίωμά του είναι ανεξάρτητο.

Για να δείξουμε ότι ένα αξίωμα είναι εξαρτημένο, προσπαθούμε να το συνάγουμε χρησιμοποιώντας μόνο τα άλλα αξιώματα. Για να δείξουμε όμως την ανεξαρτησία ενός αξιώματος καταφεύγουμε στην κατασκευή μοντέλων. Αν σε κάποιο μοντέλο τα άλλα αξιώματα αληθεύουν, ενώ το υπό εξέταση αξίωμα όχι, τότε αυτό είναι ανεξάρτητο. Εφόσον όλα τα άλλα αξιώματα αληθεύουν στο συγκεκριμένο μοντέλο, οποιαδήποτε πρόταση συνάγεται από τα αξιώματα αυτά πρέπει να αληθεύει στο συγκεκριμένο μοντέλο. Αν λοιπόν το εν λόγω αξίωμα μπορούσε να συναχθεί από τα άλλα αξιώματα θα έπρεπε να αληθεύει στο συγκεκριμένο μοντέλο. Αφού δεν αληθεύει, αυτό σημαίνει ότι δεν συνάγεται από τα άλλα αξιώματα και επομένως είναι ανεξάρτητο από αυτά.

Πληρότητα: Ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται πλήρες αν κάθε πρόταση που μπορεί να διατυπωθεί στα πλαίσια της θεωρίας, μπορεί να αποδειχθεί αυτή ή η άρνησή της. Στα πλαίσια της αριθμητικής του Peano, ο Gödel έδειξε ότι το αξιωματικό της σύστημα δεν είναι πλήρες.

Κατηγορικότητα: Για να ορίσουμε την κατηγορικότητα, πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια των ισομορφικών ερμηνειών (αναπαραστάσεων) ενός αξιωματικού συστήματος. Δύο ερμηνείες Ε και Ε΄ ενός αξιωματικού συστήματος Α είναι ισόμορφες αν είναι δυνατό να ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία της Ε και της Ε΄ με τέτοιο τρόπο, ώστε η αντιστοιχία αυτή να διατηρείται από τις σχέσεις και τις πράξεις του Α. Δύο ισόμορφες ερμηνείες ενός αξιωματικού συστήματος Α είναι ταυτόσημες, εκτός από επιφανειακές διαφορές στην ορολογία και τον συμβολισμό.

Ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται κατηγορικό, αν δύο οποιεσδήποτε ερμηνείες του είναι ισόμορφες.

Ο Hilbert και οι περισσότεροι από τους σύγχρονούς του, έχοντας ως πρότυπο τον απόλυτο Καντιανό χώρο, οδηγήθηκαν, με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών (αλλά και αντίστοιχων ανακαλύψεων στον τομέα της άλγεβρας με τις μη μεταθετικές άλγεβρες του Klein) στη διαπίστωση ότι, κάθε προσπάθεια ορισμού των πρωταρχικών εννοιών της γεωμετρίας, όπως το σημείο και η ευθεία είναι άνευ νοήματος. Πριν τις ανακαλύψεις αυτές, όταν η γεωμετρία των «Στοιχείων» θεωρούνταν ως η ερμηνεία των σχέσεων του φυσικού χώρου, νομιμοποιούνταν οι μαθηματικοί να προσπαθούν να ορίσουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, ερμηνεύοντάς τες με βάση την φυσική αντίληψη του κόσμου (είτε ως Πλατωνικές Ιδέες ενός νοητού κόσμου είτε ως αφαιρέσεις της εμπειρίας). Μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, θεωρήθηκε ότι κάθε γεωμετρία έχει τις δικές της αρχικές έννοιες, οι οποίες συνδέονται με το δεδομένο γεωμετρικό σύστημα και όχι με το φυσικό χώρο. Αυτό το τελευταίο αποτέλεσε επιστημονικό εμπόδιο για την κατανόηση σε όλη της τη διάσταση της ανακάλυψης νέων γεωμετριών. Οι επιστήμονες, λειτουργώντας περισσότερο ως ανθρώπινα όντα και λιγότερο ως λογικές μονάδες, προτίμησαν να κρατήσουν σταθερές τις απόψεις τους για τον κόσμο παρά να ακολουθήσουν αυτό που η λογική τούς έσπρωχνε να αντιληφθούν. Δηλαδή το γεγονός ότι τελικά ίσως ο χώρος να μην είναι τόσο απόλυτος όσο πίστευαν μέχρι τότε και ότι πιθανά πρέπει να προσπαθήσουν να εντοπίσουν τον «κόσμο» μέσα στον οποίο όλα αυτά τα θαυμαστά νέα μαθηματικά συμβαίνουν. Λίγα χρόνια μετά τον Hilbert, η θεωρία της σχετικότητας του Einstein αλλά και η Κβαντική Μηχανική άνοιξαν δρόμους στην αντιληπτική ικανότητα των επιστημόνων. Δυστυχώς, μέχρι σήμερα, ελάχιστοι έχουν καταφέρει, με την αποξένωση και την εξειδίκευση των επιστημονικών κλάδων, να αντιληφθούν σε βάθος αυτά που πριν από 100 και πλέον χρόνια ανακαλύφθηκαν.

Αφού λοιπόν πίστεψαν ότι δεν μπορούν να δώσουν ορισμούς για τις αρχικές έννοιες κάθε διαφορετικής γεωμετρίας, αποφάσισαν να τις «ορίσουν» ως αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης, που απλώς ικανοποιούν τα αξιώματα της θεωρίας. Τα αξιώματα αυτά θα ορίζουν με έμμεσο τρόπο τις αρχικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό, τα αξιώματα δεν είναι πλέον προφανείς αλήθειες αλλά απλώς κανόνες που πρέπει να ικανοποιούνται. Η έννοια του Αριστοτελικού προφανούς αντικαθίσταται από την έννοια της απλότητας (και όλων των άλλων χαρακτηριστικών) του αξιωματικού συστήματος. Ο Hilbert λοιπόν δεν κάνει καμία προσπάθεια να ορίσει τις αρχικές έννοιες «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο». Ο φορμαλισμός του δεν προϋποθέτει την «οντολογική» ανάλυση των εννοιών αυτών και επίσης ρητά εξοβελίζει την «εποπτεία». Η μόνη κατανόηση και εξήγηση αυτών των εννοιών είναι μέσα στη λειτουργία τους, όπως αυτή καθορίζεται από τα αξιώματα. Κάθε μελετητής επομένως της θεωρίας αυτής πρέπει να αρκείται σε μια διαισθητική προσέγγιση των πρωταρχικών εννοιών.

Συγκρίνοντας την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert με εκείνη του Ευκλείδη, διαπιστώνουμε ουσιαστικές διαφορές, δευτερεύουσες βελτιώσεις και κρίσιμες προσθήκες όσον αφορά στην έννοια της «αξιωματικής θεμελίωσης» και της πρακτικής που ακολουθείται.

Κατά τη συστηματική ανάπτυξη της θεωρίας του ο Hilbert διέκρινε 5 ομάδες αξιωμάτων για την «Επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία». Οι ομάδες αυτές είναι οι εξής:

(1) Αξιώματα της σύνδεσης. Ιδρύουν μεταξύ των πρωταρχικών εννοιών μια «σύνδεση», ορίζοντας τις ιδιότητες της αμοιβαίας «θέσης» μεταξύ σημείων, ευθειών και επιπέδων. Πρόκειται για αξιώματα που, για παράδειγμα, διευκρινίζουν τι σημαίνει η φράση «ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία».

(1α) Από οποιαδήποτε δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία.

(1β) Σε κάθε ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία.

(1γ) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(2) Αξιώματα της διάταξης. Τα αξιώματα αυτής της ομάδας ορίζουν την έννοια του «μεταξύ» και κάνουν δυνατή τη διάταξη των σημείων επί μιας ευθείας.

(2α) Αν ένα σημείο Β βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Γ, τότε τα Α, Β, Γ είναι διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το Β κείται επίσης μεταξύ των Γ και Α.

(2β) Από τρία σημεία μιας ευθείας, ένα και μόνο ένα βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

(2γ) Για οποιαδήποτε δύο σημεία Α και Γ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Β στην ευθεία ΑΓ τέτοιο, ώστε το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.

(2δ) Έστω Α, Β , Γ τρία σημεία μη κείμενα σε ευθεία γραμμή και α μια ευθεία στο επίπεδο ΑΒΓ, η οποία δεν συναντά κανένα από τα σημεία Α, Β και Γ. Αν κατακολουθίαν η ευθεία α διέρχεται από ένα σημείο του τμήματος ΑΒ, τότε αυτή θα διέρχεται επίσης οπωσδήποτε από ένα σημείο του τμήματος ΑΓ ή από ένα σημείο του τμήματος ΒΓ. (Αξίωμα του Pasch)

(3) Αξιώματα της ισότητας. Τα αξιώματα αυτής της ομάδας ορίζουν την έννοια της ισότητας και κατ’ αυτό τον τρόπο την έννοια επίσης της κίνησης. Κατοχυρώνεται έτσι η μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών και η ισότητα τριγώνων.

(4) Αξίωμα της παραλληλίας.

Στο επίπεδο, που ορίζουν μια ευθεία και ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία αυτή, υπάρχει το πολύ μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο και δεν τέμνει την ευθεία.

(5) Αξιώματα της συνέχειας. Τα δύο αξιώματα της ομάδας αυτής είναι το αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη και το αξίωμα της γραμμικής πληρότητας που στοχεύει αποκλειστικά στο να αναδείξει ως κατηγορική την Ευκλείδεια Γεωμετρία του χώρου.

(5α) (Αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη): Αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν τέτοιος, ώστε να ισχύει Α – Β – $Δ_ν$, όπου $Δ_ν$ είναι το ν-πολλαπλάσιο του ΓΔ στην ημιευθεία ΑΒ.

(5β) Δεν είναι δυνατόν να επεκταθεί (με επιπλέον σημεία) μια ευθεία σε μια καινούρια ευθεία έτσι, ώστε να ισχύουν για τα σημεία της καινούριας ευθείας οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα της «σύμπτωσης», του «μεταξύ», της «συμφωνίας» και από το προηγούμενο αξίωμα.

Στις σύγχρονες παρουσιάσεις της αξιωματικής θεμελίωσης της γεωμετρίας στο πνεύμα του Hilbert αντί των δύο αξιωμάτων της συνέχειας, διατυπώνεται το «αξίωμα του Dedekind» (που προτάθηκε το 1871):

Έστω x ένα ευθύγραμμο τμήμα. Μια «τομή του Dedekind» στο σύνολο των σημείων Σ(x) του τμήματος x ορίζεται από δύο ξένα μεταξύ τους και μη κενά υποσύνολά του $Σ_1$ και $Σ_2$ έτσι, ώστε να ισχύει ότι η ένωση των δύο υποσυνόλων είναι το Σ(x) και, επιπλέον, τα εσωτερικά σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος με άκρα που ανήκουν στο $Σ_λ$ να ανήκουν επίσης στο $Σ_λ$ (λ = 1 , 2). Δεχόμαστε ότι σε κάθε «τομή του Dedekind» αντιστοιχεί ένα σημείο D του Σ(x), που είναι ακρότατο σημείο του $Σ_λ$, δηλαδή ανήκει στο $Σ_λ$ και δεν βρίσκεται «μεταξύ» δύο σημείων του.

2. *Η ΘΕΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΙΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ «ΣΤΟΙΧΕΙΑ» ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ*

Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ
μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου
τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς
ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών.
γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου·[3]

2.1. Η δομή των «Στοιχείων» Του Ευκλείδη

Τα «Στοιχεία» γράφτηκαν γύρω στο 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια και ασφαλώς δεν είναι έμπνευση κάποιας συγκεκριμένης στιγμής. Στηρίζεται στο έργο όλων των μαθηματικών και φιλοσόφων που προηγήθηκαν και είναι αποτέλεσμα των μεγάλων προσπαθειών, των επινοήσεων και του έργου που παρήχθη για τριακόσια συνεχή χρόνια από όλους τους κορυφαίους φιλοσόφους που έζησαν, εργάστηκαν και μεγαλούργησαν όλη αυτή την καταπληκτικά γόνιμη για την επιστήμη εποχή.

Εκείνο που έκανε ο Ευκλείδης ήταν να συγκεντρώσει και να ταξινομήσει τα έργα αυτά, τα οποία αναφέρονται σε θέματα Γεωμετρίας και θεωρίας αριθμών. Την ύλη τους ανέλυσε, συμπλήρωσε – όπου αυτό ήταν αναγκαίο – ιεράρχησε και τελικά την ενέταξε μέσα σε ένα νέο και καταπληκτικό μαθηματικό σύστημα που ο ίδιος δημιούργησε. Ακολουθώντας την Αριστοτέλεια κατάταξη, καθόρισε τους όρους, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες (αξιώματα) του νέου συστήματος και καθιέρωσε μια διαδικασία απόδειξης με τη βοήθεια των ορισμών, των αιτημάτων, των κοινών εννοιών και των προτάσεων που έχουν προηγουμένως αποδειχθεί.

Ο Ευκλείδης, εκτός από την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας, δημιούργησε και μια μαθηματική θεωρία με δομή που είναι και σήμερα σύγχρονη. Καθιέρωσε έναν τρόπο παρουσίασης της ύλης, με γενικές αποδείξεις άψογες, όπου κάθε πρόταση τοποθετείται στην κατάλληλη θέση και ακολουθεί η επόμενη πρόταση με μια αυστηρώς λογική τάξη, με τις λιγότερες δυνατές υποθέσεις, χωρίς να παρεμβάλλεται τίποτε το άσχετο ή το περιττό.

Πρέπει να τονιστεί ότι τα «Στοιχεία» δεν είναι ένα ανθολόγιο των προευκλείδειων

[3] Πρόκλος, Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, 68.7 – 68.11

μαθηματικών γνώσεων. Υπάρχουν αξιόλογες γεωμετρικές προτάσεις που δεν περιέχονται σε αυτά, όπως π.χ. τα τρία περίφημα προβλήματα της αρχαιότητας (ο τετραγωνισμός του κύκλου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο διπλασιασμός του κύβου), ο κύκλος του Απολλώνιου (περίφημος γεωμετρικός τόπος που υπάρχει στα «Μετεωρολογικά» του Αριστοτέλη), αρκετές μέθοδοι κατασκευής, όπως η «Νεύσις» κ.ά. Επίσης αναφέρει τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου, χωρίς να αναφέρει την αντίστοιχη μέθοδο των Πυθαγορείων με την ίση ανθυφαίρεση (την οποία διατηρεί στο αριθμητικό βιβλίο VII).

Αυτά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο Ευκλείδης ήθελε να συνθέσει ένα έργο, το οποίο να λειτουργεί με τους κανόνες και τις διαδικασίες που εκείνος ήθελε. Γι αυτό στα «Στοιχεία» δεν έχουν θέση προτάσεις που δεν μπορούν να ενταχθούν στο σύστημά του. Δεν περιορίστηκε βέβαια μόνο στην ταξινόμηση των προτάσεων αλλά αρκετές από αυτές τις συμπλήρωσε και τις τελειοποίησε και πρόσθεσε και νέες, όπου έκρινε ότι αυτό ήταν αναγκαίο. Έδωσε ακόμη αυστηρές αποδείξεις σε προτάσεις που οι προηγούμενοί του είχαν αποδείξει με όχι αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

Πριν αναφερθούμε στη δομή των «Στοιχείων» πρέπει να κάνουμε μια αναφορά στον τρόπο με τον οποίο ο Αριστοτέλης αντιλαμβανόταν την παραγωγή ορισμών από άλλους και τη διαδοχή τους.

Ο Αριστοτέλης, όπως είδαμε είναι εκείνος που έδωσε επιστημονική υφή στη Λογική και δημιούργησε ένα πλαίσιο για την ανάπτυξη μιας **παραγωγικής επιστήμης**, δηλαδή μιας επιστήμης που οικοδομείται αποδεικτικά. Κατά τον Αριστοτέλη κάθε παραγωγική επιστήμη στηρίζεται στις **αποφάνσεις**. Τις αποφάνσεις διέκρινε όπως είδαμε σε **κοινές έννοιες** (που έχουν θέση σε διάφορες παραγωγικές επιστήμες) και σε **ειδικές έννοιες**. Τα **αιτήματα** διατυπώνονται με τη βοήθεια των **θεμελιωδών εννοιών**, όπως το σημείο, η ευθεία κλπ. Δεν απαιτούσε απόλυτη ακρίβεια (με τη σημερινή σημασία του όρου) στον ορισμό των εννοιών αυτών, που μπορούσε να είναι και έμμεσος.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το πώς αντιλαμβανόταν ο Αριστοτέλης την παραγωγή ορισμών από άλλους και τη διαδοχή τους. Πίστευε ότι κάθε έννοια πρέπει να ορίζεται ως εξειδίκευση κάποιας γενικότερης έννοιας, που ονομαζόταν «**προσεχές γένος**» της πρώτης. Η εξειδίκευση γινόταν με την «**ειδοποιό διαφορά**», δηλαδή μια χαρακτηριστική ιδιότητα, που επιλεγόταν έτσι, ώστε οι **έννοιες – υποκλάσεις** να διαχωρίζονται καθαρά μεταξύ τους. Για παράδειγμα, με τη βοήθεια της θεμελιακής έννοιας «ευθεία» ορίζεται η έννοια «πλευρά» και από αυτήν η έννοια «κυρτό τετράπλευρο». Θεωρώντας την τελευταία ως «προσεχές γένος», δημιουργούμε τρεις «υποκλάσεις» (εξειδικευμένες έννοιες): τα παραλληλόγραμμα (με δύο ζευγάρια παράλληλων «πλευρών»), τα τραπέζια (με ένα μόνο ζευγάρι παράλληλων «πλευρών») και τα υπόλοιπα τετράπλευρα (χωρίς κανένα ζευγάρι παράλληλων «πλευρών»). Είναι φανερό ότι οι «υποκλάσεις» είναι ξένες μεταξύ τους και ότι η ένωσή τους καλύπτει το σύνολο των «τετραπλεύρων».

Τέλος, μια ακόμη βασική επιταγή του Αριστοτέλη ήταν ότι για κάτι που ορίζεται πρέπει να εξασφαλίζεται η ύπαρξή του είτε μέσω αιτημάτων είτε μέσω απόδειξης. Γι αυτό διέκρινε τις ειδικές έννοιες σε αυτές που διευκρινίζουν νόημα και σε εκείνες που εξασφαλίζουν ύπαρξη. Εννοείται ότι πρέπει να εξασφαλίζεται η ύπαρξη τόσο για τα προσεχή γένη όσο και για τις υποκλάσεις τους. Αυτό εξηγεί, όπως θα δούμε, την ύπαρξη ορισμών στα «Στοιχεία» που από μια πρώτη ματιά φαίνονται άνευ ουσίας, αφού δεν χρησιμοποιούνται πουθενά. Η πραγματική όμως αιτία της παρουσίας τους είναι για να καταδειχθούν όλες οι υποκλάσεις κάθε προσεχούς γένους και έτσι να εξασφαλιστεί η ορθότητα του ορισμού του.

Στα 13 βιβλία των «Στοιχείων» περιέχονται 121 ορισμοί, 5 αιτήματα, 9 κοινές έννοιες (αξιώματα) και 465 προτάσεις (θεωρήματα). Σε αντίθεση με τη σύγχρονη πρακτική, ο Ευκλείδης ορίζει τις αρχικές έννοιες. Οι ορισμοί, τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες αποτελούν τη γλώσσα της θεωρίας και είναι τα θεμέλια ολόκληρου του έργου.

Βιβλίο Ι: Ξεκινά με τους πρώτους 23 όρους (ορισμούς), όπου ορίζονται το σημείο, η γραμμή (και από αυτή με ειδοποιό διαφορά η ευθεία γραμμή), η επιφάνεια, η γωνία, ο κύκλος, τα σχήματα και οι παράλληλες ευθείες. Στη συνέχεια αναφέρει τα 5 αιτήματα και τις αρχικές έννοιες (αξιώματα), τα οποία είναι (στις σύγχρονες εκδόσεις) 9. Τέλος παραθέτει 48 προτάσεις (θεωρήματα) μαζί με τις αποδείξεις τους. Αιτήματα και κοινές έννοιες υπάρχουν μόνο σε αυτό το πρώτο βιβλίο και αποτελούν τις βάσεις της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Τα πέντε αιτήματα των Στοιχείων είναι τα εξής:

1. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	*Αιτούμαι ότι από κάθε σημείο προς κάθε σημείο μπορεί να αχθεί ευθεία.*
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.	*Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς ευθύγραμμα.*

3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.	*Με κάθε κέντρο και για κάθε διάστημα μπορούμε να γράφουμε κύκλο.*
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.	*Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.	*Εάν η τέμνουσα δύο ευθειών τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες σχηματίζει με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε επεκτείνοντας τες επ' άπειρον θα τέμνονται, από το μέρος που βρίσκονται οι δύο γωνίες αυτές.*

Και οι κοινές έννοιες[4] (αξιώματα) είναι οι παρακάτω:

1.Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.	*Όσα είναι ίσα στο ίδιο είναι και μεταξύ τους ίσα.*
2.Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.	*Αν προστεθεί το ίδιο σε ίσα, τα αθροίσματα θα είναι ίσα.*
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.	*Αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπόλοιπα είναι ίσα.*
4. [Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.]	*Εάν σε άνισα προστεθούν ίσα, τα αθροίσματα θα είναι άνισα.*
5. [Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]	*Του ίδιου ποσού τα διπλάσια είναι ίσα μεταξύ τους.*
6. [Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]	*Του ίδιου ποσού τα μισά είναι ίσα μεταξύ τους.*
7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.	*Όσα εφαρμόζονται μεταξύ τους είναι ίσα.*
8. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].	*Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.*
9. [Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ	*Δύο ευθείες δεν περιέχουν χωρίο.*

[4] Η επικρατούσα άποψη είναι ότι ο Ευκλείδης συμπεριέλαβε μόνο πέντε κοινές έννοιες και οι υπόλοιπες τέσσερεις (οι 4, 5, 6 και 9) είναι μεταγενέστερες προσθήκες.

περιέχουσιν.]	

Βιβλίο II: Περιέχει 2 ορισμούς και μόνο 14 προτάσεις και αποτελεί συνέχεια του τελευταίου μέρους του βιβλίου Ι. Ολόκληρο το βιβλίο συνιστά ουσιώδες κομμάτι της γεωμετρικής άλγεβρας, η οποία στην ουσία κατείχε στην ελληνική γεωμετρία τη θέση της άλγεβρας. Επίσης ορίζει το **γνώμονα,** που είχε μεγάλη εφαρμογή στη λύση γεωμετρικών προτάσεων από την εποχή των Πυθαγορείων.

Βιβλίο III: Το αντικείμενό του είναι η γεωμετρία του κύκλου και η μελέτη των σχέσεων μεταξύ κύκλων που τέμνονται ή εφάπτονται μεταξύ τους. Το βιβλίο ξεκινά με μερικούς ορισμούς, οι οποίοι είναι σε γενικές γραμμές του ίδιου είδους με το πρώτο βιβλίο.

Βιβλίο IV: Αποτελείται εξολοκλήρου από προβλήματα και ασχολείται πάλι με κύκλους, όμως σε σχέση με ευθύγραμμα σχήματα που εγγράφονται ή περιγράφονται σε αυτούς.

Βιβλίο V: Αφιερώνεται στη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου. Περιέχει 18 ορισμούς και 25 προτάσεις.

Βιβλίο VI: Περιέχει την εφαρμογή στην επίπεδη γεωμετρία της γενικής θεωρίας αναλογιών που θεμελιώνεται στο πέμπτο βιβλίο και καταλήγει σε μια πολύ γενική μέθοδο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με εφαρμογή χωρίων.

Βιβλία VII, VIII, IX: Είναι τα αριθμητικά βιβλία. Βασικό βιβλίο είναι το έβδομο και βασικό εργαλείο είναι ο λεγόμενος «Ευκλείδειος αλγόριθμος»[5] (εύρεση μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών). Περιέχουν συνολικά 23 ορισμούς (όλους στην αρχή του έβδομου βιβλίου) και 102 προτάσεις.

Βιβλίο X: Περί άλογων γραμμών, ασυμμετρία μεγεθών. Περιέχει μόλις 4 ορισμούς και 115 προτάσεις.

Βιβλία XI, XII, XIII: Στερεομετρία

11^{ο}: Στοιχειώδεις προτάσεις (28 ορισμοί και 39 προτάσεις)

12^{ο}: Εύδοξος, υπολογισμός εμβαδών – όγκων χρησιμοποιώντας ουσιωδώς το πέμπτο βιβλίο (18 προτάσεις).

13^{ο}: Κανονικά (Πλατωνικά) στερεά (18 προτάσεις).

[5] Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον όρο ανθυφαίρεση.

2.2. Οι ορισμοί στα «Στοιχεία»

Οι Ευκλείδειοι ορισμοί ακολουθούν την Αριστοτελική άποψη και δεν εξετάζουν την ύπαρξη των αντικειμένων που εισάγουν. Απλώς προσπαθούν να «πουν» τι είναι ή τι δεν είναι το καθετί. Μάλιστα είναι αυτοί που αποτελούν τη βάση, όπως θα δούμε, όλης της θεμελίωσης του έργου. Ο Ευκλείδης πιστεύει πως τα σωστά θεμέλια μιας θεωρίας είναι οι κατάλληλοι ορισμοί. Προσπάθειες να διαβαστούν τα «Στοιχεία» με σύγχρονη ματιά είναι καταδικασμένες. Ειδικά όταν αναζητούμε σημερινά πρότυπα σε εκείνα τα κείμενα.

Στο πρώτο βιβλίο του ορίζει το σημείο, την ευθεία, τη γωνία, το επίπεδο, τον κύκλο, τα σχήματα και την παραλληλία. Δηλαδή ορίζει όλες τις πρωταρχικές έννοιες της γεωμετρίας του. Είναι χαρακτηριστικό και άξιο προσοχής ότι το επόμενο βιβλίο με τόσους πολλούς ορισμούς είναι το πέμπτο (έχει 18), όπου εισάγεται η θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου. Μια νέα θεωρία η οποία χρειάζεται θεμελίωση. Επίσης πολλούς ορισμούς βρίσκουμε στο πρώτο βιβλίο των αριθμητικών (το $7^{ο}$ – αλλά κανέναν στο $8^{ο}$ και στο $9^{ο}$ βιβλίο, που αποτελούν απλά τη συνέχεια του έβδομου). Επίσης συναντάμε πολλούς ορισμούς (28) στο $11^{ο}$ βιβλίο, όπου ξεκινά η στερεομετρία. Δηλαδή ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί ως βάση της θεωρίας του ακριβώς αυτούς τους ορισμούς. Μάλιστα, οι ορισμοί του πρώτου βιβλίου αποτελούν συνολικά τη βάση όλης της θεωρίας που αναπτύσσεται στα «Στοιχεία».

ΟΡΟΙ ΒΙΒΛΙΟΥ Ι

(α) **Σημεῖόν** ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
(β) **Γραμμὴ** δὲ μῆκος ἀπλατές.
(γ) Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
(δ) **Εὐθεῖα γραμμή** ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
(ε):**Ἐπιφάνεια** δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
(ς): Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
(ζ): **Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά** ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
(η): Ἐπίπεδος δὲ **γωνία** ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
(θ): Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
(ι): Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῆ, **ὀρθὴ** ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα **κάθετος** καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
(ια): **Ἀμβλεῖα** γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

(ιβ): **Ὀξεῖα** δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.
(ιγ): **Ὅρος** ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.
(ιδ): **Σχῆμά** ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.
(ιε): **Κύκλος** ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
(ις): Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
(ιζ): Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.
(ιη): **Ἡμικύκλιον** δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.
(ιθ): **Σχήματα εὐθύγραμμά** ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.
(κ): Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
(κα): Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
(κβ):Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.
(κγ): **Παράλληλοί** εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Καταρχάς πρέπει να τονίσουμε ότι όλοι οι ορισμοί είναι **ονοματικοί**, με την έννοια ότι αναφέρουν ονόματα γεωμετρικών αντικειμένων και δίνουν χαρακτηριστικά για το τι είναι ή τι δεν είναι αυτό που ορίζουν. Η ύπαρξη αυτών των αντικειμένων πρέπει, κατά την Αριστοτελική παράδοση, να αποδειχθεί ή να δοθεί με τη μορφή αιτήματος.

Οι σύγχρονοι μελετητές αντιμετωπίζουν τους ορισμούς αυτούς κριτικά. Ο Sir Thomas L. Heath στο έργο του «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» αναφέρει χαρακτηριστικά:

Πολλοί από τους ορισμούς υπόκεινται σε κριτική για τον ένα ή τον άλλο λόγο. Δύο από αυτούς τουλάχιστον, δηλαδή οι ορισμοί του ευθύγραμμου τμήματος (4) και της επίπεδης επιφάνειας (7) μοιάζουν αυθεντικοί. Καθώς δεν είναι ικανοποιητικοί, φαίνεται πως επιδέχονται μια απλή εξήγηση. Ο ορισμός του ευθύγραμμου τμήματος αποτελεί προφανώς, μια απόπειρα να εκφραστεί, χωρίς προσφυγή στην όραση, η έννοια του ευθύγραμμου τμήματος όπως την είχε ορίσει ο Πλάτων «εκείνο του οποίου το μέσον καλύπτει τα άκρα». Επίσης ο ορισμός της επίπεδης επιφάνειας αποτελεί διασκευή του ίδιου ορισμού. Όμως οι περισσότεροι από τους ορισμούς υιοθετήθηκαν, πιθανώς, από εκπαιδευτικά βιβλία, που είχαν δημοσιευτεί πριν την εποχή του Ευκλείδη. Ορισμένοι πάλι μοιάζουν να προστέθηκαν απλώς από σεβασμό στην παράδοση, όπως π.χ. οι ορισμοί του ορθογώνιου παραλληλογράμμου, του ρόμβου και του ρομβοειδούς, οι οποίοι δεν χρησιμοποιούνται ποτέ στα Στοιχεία.

Το παραπάνω απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό της λανθασμένης αντιμετώπισης των ορισμών σε ένα θεμελιωμένο σύστημα. Βλέπουμε επίσης την αδυναμία κατανόησης της αναγκαιότητας ορισμού όλων των υποκλάσεων κάθε γένους ώστε να θεμελιωθούν πιο άρτια οι έννοιες, π.χ. των τετραπλεύρων. Οι σχολιαστές που χρονικά βρίσκονται πιο κοντά στην εποχή του Ευκλείδη μας δίνουν μια καλύτερη θέαση του ρόλου των ορισμών και ίσως είναι χρήσιμο να σταθούμε λίγο περισσότερο σε κάποιους από αυτούς.

Ο πρώτος ορισμός ολόκληρου του έργου είναι ο ορισμός του σημείου, ο οποίος είναι σαφέστατα ένας αρνητικός ορισμός. Ο Ευκλείδης μας λέει ακριβώς τι δεν είναι ένα σημείο. Ο Πρόκλος, στο βιβλίο του «Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη», αναφέρει χαρακτηριστικά

[94.8 – 18] Ὁ μὲν οὖν <Εὐκλείδης> διὰ τῆς ἀποφάσεως τῶν μεριστῶν ἐσήμηνεν ἡμῖν τὴν ἀρχὴν πάσης τῆς ὑποκειμένης αὐτῷ φύσεως εἰς θεωρίαν. καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λόγοι προσήκουσι ταῖς ἀρχαῖς, ὡς ὁ Παρμενίδης ἡμᾶς ἀναδιδάσκει τήν τε πρωτίστην αἰτίαν καὶ τὴν ἐσχάτην διὰ μόνων τῶν ἀποφάσεων παραδούς. πᾶσα γὰρ ἀρχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς καθ' ἑτέραν οὐσίαν ὑφέστηκεν καὶ αἱ τούτων ἀποφάσεις τὴν ἐκείνης ἡμῖν δηλοῦσιν ἰδιότητα. τὸ γὰρ αἴτιον μὲν τούτων, οὐδὲν δὲ τούτων	*Ο Ευκλείδης λοιπόν, μέσω της άρνησης των μερών μας δήλωσε την αρχή όλων των υποκειμένων σε αυτή τη θεωρία. Γιατί και οι αρνητικοί ορισμοί ταιριάζουν στις αρχές, όπως μας διδάσκει ο Παρμενίδης, παραδίδοντας την πρωταρχική και την έσχατη αιτία μόνω μέσω των αρνήσεων. Διότι κάθε αρχή έχει λάβει υπόσταση με διαφορετική ουσία από όσα προέρχονται από αυτή, και οι αρνήσεις όλων των επομένων της μας δείχνουν τη δική της ιδιότητα. Γιατί αυτό που αποτελεί αίτιό τους, αλλά δεν αποτελεί ένα από αυτά των οποίων είναι αίτιο, γίνεται κάπως γνωστό με αυτό τον τρόπο παρουσίασης.*

ὑπάρχον, ὧν αἴτιόν ἐστι, γνώριμον πῶς γίνεται διὰ τοῦ τρόπου τούτου τῆς διδασκαλίας.	

Προσπαθεί λοιπόν να δείξει ότι το σημείο, όπως το ορίζει ο Ευκλείδης, είναι ένα νοητό, άυλο αντικείμενο, το οποίο παραλληλίζεται με την έννοια της μονάδας. Το σημείο, αν και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το πέρας ενός διαστήματος, παραμένει αμερές και έχει λάβει αρχική υπόσταση μέσα στο νου με τρόπο αδιαίρετο και ενιαίο με βάση ένα είδος, την ιδέα του σημείου. Μάλιστα κάνει το διαχωρισμό, λέγοντας ότι μόνο το σημείο δεν έχει μέρη στη γεωμετρία, όπως η μονάδα δεν έχει μέρη στην αριθμητική. Ο αρνητικός ορισμός απαλλάσσει το σημείο από οποιαδήποτε πραγμάτωσή του και επομένως καταργεί κάθε υποβιβασμό του, αφήνοντας την καθαρή έννοια. Αυτός είναι και ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να προσεγγίσουμε τον ορισμό αυτό.

[88.3-5] τὸ μὲν οὖν σημεῖον ἀμερὲς ἐκεῖ πάντη, εἰ καὶ κατὰ τὸ πέρας ὑφέστηκεν, ἔχει δὲ τὴν ἄπειρον δύναμιν κρυφίως, καθ' ἣν καὶ γεννᾷ πάντα τὰ διαστήματα.	*Το σημείο λοιπόν είναι εκεί πάντα αμερές και παρόλο που έχει λάβει υπόσταση με βάση το πέρας, έχει με απόκρυφο τρόπο τη δύναμη του απείρου, με την οποία γεννά όλα τα διαστήματα.*
[92.1-4] καὶ πάντα μὲν ἐν νῷ προυφέστηκεν, ἀλλ' ἀμερίστως καὶ ἑνοειδῶς, ὥστε πάντα καθ' ἓν εἶδος ὑφεστάναι κατὰ τὸν τοῦ σημείου λόγον κρυφίως ἔχοντα καὶ ἀμερῶς [πάντα]	*Όλα λοιπόν τα πέρατα έχουν λάβει αρχική υπόσταση μέσα στο νου με τρόπο αδιαίρετο και ενιαίο, ώστε όλα έχουν λάβει υπόσταση με βάση ένα είδος, την ιδέα του σημείου η οποία τα περιέχει όλα με τρόπο απόκρυφο και αδιαίρετο.*
[92.18-93.5] καὶ πανταχοῦ μὲν τὸ σημεῖον ἀμερὲς καὶ τῶν μεριστῶν διαφέρον ἁπλότητι, κατὰ δὲ τὴν ὕφεσιν τῶν ὄντων καὶ τοῦτο τὴν ἐξῃρημένην ἔλαχεν τῶν μεριστῶν ὑπόστασιν καὶ ὅπου μὲν παντελῶς αὐτῶν ὑπερίδρυται κατὰ τὴν τῆς	*Και το μεν σημείο είναι παντού αδιαίρετο και διαφέρει από τα διαιρετά για την απλότητά του. Καθώς όμως κατεβαίνει στις βαθμίδες των όντων, λαμβάνει και αυτό τη χαρακτηριστική υπόσταση των διαιρετών και αλλού έχει εδραιωθεί πλήρως πάνω από τα διαιρετά*

αἰτίας ὑπεροχήν, ὅπου δὲ συντέτακται αὐτοῖς, ὅπου δὲ ἐπεισοδιώδη τὴν ὕπαρξιν ἐν αὐτοῖς ἐκληρώσατο καὶ οἷον καταπινόμενον ὑπὸ τοῦ μερισμοῦ τῶν ἐσχάτων ἐκλύει τὴν οἰκεῖαν ἀμέρειαν. καθάπερ οὖν ἡ μονὰς ἄλλη μὲν ἡ γεννητικὴ τῶν ἀριθμῶν, ἄλλη δὲ ὡς ὕλη τοῖς ἀριθμοῖς ὑπεστρωμένη, καὶ ἀρχὴ μὲν ἑκατέρα καὶ οὐχ ὅπερ ἀριθμός, ἄλλον δὲ τρόπον ἀρχὴ καὶ ἄλλον – κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ σημεῖον οὗ μὲν ὑποστατικόν ἐστι τῶν μεγεθῶν, οὗ δὲ ἄλλως ἀρχὴ καὶ οὐ κατὰ τὴν γεννητικὴν αἰτίαν.	*διατηρώντας την υπεροχή της αιτίας, αλλού έχει τοποθετηθεί δίπλα τους ενώ αλλού έλαβε προσωρινή ύπαρξη μέσα τους και σχεδόν απορροφάται από τη διαίρεση των κατώτατων όντων και χάνει την δική του αμέρεια. Όπως λοιπόν άλλη είναι η μονάδα που γεννά τους αριθμούς και άλλη η μονάδα που σαν ύλη αποτελεί το υπόστρωμα των αριθμών, και καθεμιά από τις δυο δεν είναι ο ίδιος ο αριθμός, αλλά είναι αρχή με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά, έτσι και το σημείο αλλού δίνει υπόσταση στα μεγέθη και αλλού αποτελεί αρχή με διαφορετικό τρόπο και όχι ως αιτία γέννησης.*
[93.6-7] Ἆρ' οὖν τὸ σημεῖον μόνον ἀμερές; ἢ καὶ τὸ νῦν τοιοῦτον ἐν χρόνῳ καὶ ἡ μονὰς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς;	*Άραγε λοιπόν μόνο το σημείο δεν έχει μέρη; Ή και το τώρα μέσα στο χρόνο και η μονάδα μέσα στους αριθμούς;*
[93.18-21] μόνον οὖν τὸ σημεῖον ἀμερὲς κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ὕλην καὶ ἡ μόνας κατὰ τὴν ἀριθμητικήν, καὶ ὁ τοῦ σημείου λόγος, εἰ καὶ πρὸς ἄλλον ἀτελής, ἀλλὰ πρός γε τὴν παροῦσαν ἐπιστήμην τέλειος,	*Λοιπόν, μόνο το σημείο δεν έχει μέρη στη γεωμετρική ύλη και η μονάδα στην αριθμητική ύλη και ο ορισμός του σημείου, αν και μπορεί σε σχέση με κάποιον άλλο να θεωρηθεί ατελής, για την παρούσα επιστήμη είναι τέλειος.*
[94.1-7] μὴ τοίνυν μηδὲ τὸν ὅρον τοῦ σημείου διημαρτῆσθαι νομίζωμεν μηδὲ ἀτελῆ θώμεθα αὐτὸν εἶναι. πρὸς γὰρ τὴν γεωμετρικὴν ὕλην καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς ταύτης ἱκανῶς ἀποδέδοται. μόνον γὰρ οὐχὶ	*Ας μη νομίζουμε λοιπόν ότι ο ορισμός του σημείου είναι εσφαλμένος και ας μη νομίσουμε ότι αυτός είναι ατελής. Διότι έχει αποδοθεί ικανοποιητικά ως προς τη γεωμετρική ύλη και τις αρχές της. Διότι όχι μόνο λέει με σαφήνεια*

λέγει σαφῶς, ὅτι τὸ ἀμερὲς κατ' ἐμὲ σημεῖόν ἐστι καὶ ἡ ἐμὴ ἀρχή, καὶ τὸ ἁπλούστατον οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν ἢ τοῦτο, καὶ οὕτω προσήκει τοῦ γεωμέτρου λέγοντος ἀκούειν.	*ότι το χωρίς μέρη είναι για μένα σημείο και η αρχή μου αλλά και ότι είναι το απλούστερο και κανένα άλλο δεν είναι σαν κι αυτό, και με αυτό τον τρόπο πρέπει να ακούμε το λόγο του γεωμέτρη.*

Και πιο κάτω [95.21 – 96.15] παρουσιάζει τον αντίστοιχο ορισμό των Πυθαγορείων, οι οποίοι όριζαν το σημείο ως μονάδα που έλαβε θέση (μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν). Σε αυτό ο Πρόκλος παρατηρεί ότι πράγματι οι αριθμοί είναι πιο απλοί και πιο καθαροί από τα μεγέθη και ότι η αρχή των αριθμών είναι πιο απλή από την αρχή των μεγεθών (ὅτι μὲν οὖν οἱ ἀριθμοὶ τῶν μεγεθῶν ἀυλότεροι καὶ καθαρώτεροι, καὶ ὅτι τῶν ἀριθμῶν ἡ ἀρχὴ τῆς τῶν μεγεθῶν ἐστιν ἁπλουστέρα, παντὶ καταφανές).

[96.6 – 15] τὸ δὲ σημεῖον ἐν φαντασίᾳ προτείνεται καὶ οἷον ἐν τόπῳ γέγονεν, καὶ ἔνυλόν ἐστι κατὰ τὴν νοητὴν ὕλην. ἄθετος οὖν ἡ μονὰς ὡς ἄυλος καὶ παντὸς ἔξω διαστήματος καὶ τόπου. θέσιν δὲ ἔχει τὸ σημεῖον ὡς ἐν τοῖς φαντασίας κόλποις ἰνδαλλόμενον καὶ ἔνυλον. διὰ δὲ τὴν κοινωνίαν τῶν ἀρχῶν καὶ ἡ μονὰς στιγμῆς ἁπλουστέρα. κατὰ γὰρ τὴν θέσιν ἐπλεόνασεν ἡ στιγμὴ τῆς μονάδος, αἱ δὲ προσθέσεις ἐν τοῖς ἀσωμάτοις ὑφέσεις ἀποτελοῦσι τῶν τὰς προσθήκας δεχομένων.	*Το σημείο όμως προβάλλεται στη φαντασία και έχει βρεθεί θα λέγαμε σε κάποιο τόπο και είναι υλικό κατά τη νοητή ύλη. Η μονάδα, λοιπόν, δεν έχει θέση επειδή είναι άυλη και μακριά από κάθε διάστημα και τόπο. Το σημείο όμως έχει θέση επειδή προβάλλεται στους κόλπους της φαντασίας και είναι υλικό. Και λόγω της επικοινωνίας της με τις αρχές η μονάδα είναι πιο απλή του σημείου. Γιατί το σημείο, έχοντας θέση, έχει κάτι περισσότερο από τη μονάδα, και οι προσθήκες στα ασώματα αποτελούν υποβαθμίσεις όσων δέχονται τις προσθήκες.*

Βλέπουμε από τα παραπάνω, το φιλοσοφικό υπόβαθρο στην προσπάθεια εξήγησης της έννοιας του σημείου, ως κάτι άυλο από τον κόσμο της νόησης και άρα από τον κόσμο του Όντος. Σε αντίθεση με την Αριστοτελική άποψη, την οποία υιοθετεί γενικά ο Ευκλείδης, σύμφωνα με την οποία ένας ορισμός δεν πρέπει να εξετάζει την ύπαρξη του αντικειμένου που εισάγει, ο Πρόκλος προσπαθεί να δείξει ότι μέσα από τον ορισμό του σημείου προσδιορίζεται και η ύπαρξη του σημείου ως το ελάχιστο και άτομο συστατικό της Γεωμετρίας. Έτσι απαντά σε όσους ισχυρίζονται ότι ο Ευκλείδης δεν ορίζει τις πρωταρχικές έννοιες. Το ίδιο το σημείο αποτελεί μια τέτοια και ορίζεται σαφώς. Παρόμοια διαπιστώνουμε ότι ορίζονται τόσο η ευθεία, όσο και το επίπεδο (τα οποία αποτελούν κατά τον Hilbert τις θεμελιώδεις έννοιες κάθε γεωμετρίας).

Ο τρίτος ορισμός φαίνεται να ξεχωρίζει (όπως και ο έκτος) αφού δεν ορίζει αλλά διευκρινίζει κάτι. Τα πέρατα της γραμμής είναι σημεία. Κατά τον Αριστοτέλη δεν είναι επιστημονικό να ορίζουμε τα σημεία ως τα «άκρα» μιας γραμμής, γιατί έτσι ορίζουμε το «πρότερον» με το «ύστερον». Αυτό όμως δίνει λαβή για το εξής σχόλιο. Αφού ο Ευκλείδης ακολουθεί πιστά τη λογική του Αριστοτέλη στη δομή και διάταξη των ορισμών του, γιατί χρησιμοποιεί έναν τόσο «αντιεπιστημονικό» ορισμό; Στην πραγματικότητα ο Ευκλείδης δίνει ένα δεύτερο ορισμό του σημείου, ως πέρας. Αν θυμηθούμε τον Πρόκλο, υπάρχουν δύο τρόποι εμφάνισης ενός σημείου, ως άυλο κατασκεύασμα από τον κόσμο των Ιδεών και ως αφαίρεση από τη γραμμή μέσω του πέρατος αυτής. Με τον τρόπο αυτό και επειδή η γραμμή υπάρχει και αυτή ως ιδέα, έξω από τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνει όταν κατασκευάζεται, ουσιαστικά δίνει μια μορφή ύπαρξης του σημείου. Το σημείο περιέχεται στην ευθεία ως πέρας και επομένως υπάρχει.

Ένας άλλος ενδιαφέρον ορισμός είναι ο ορισμός (η΄), όπου ο Ευκλείδης αναφέρεται σε επίπεδες γωνίες, με πλευρές όχι μόνο ευθείες, αλλά γενικά γραμμές. Μάλιστα στον επόμενο ορισμό (θ΄), έχουμε σε αντιδιαστολή τον ορισμό της ευθύγραμμης γωνίας. Στα «Στοιχεία», αν και όχι πολύ συχνά (μόνο στο βιβλίο ΙΙΙ, στις προτάσεις 16 και 31) συναντούμε και γωνίες με πλευρές τόξα και ημιευθείες. Ο Αριστοτέλης μάλιστα θεωρεί και γωνίες που οι πλευρές τους είναι δυο τόξα, τις οποίες ονομάζει κερατοειδείς[6]. Όπως επισημαίνει ο Πρόκλος κάποιοι κατέταξαν τη γωνία στην κατηγορία της σχέσης, ανάμεσά τους και ο Ευκλείδης, λέγοντας ότι είναι κλίση γραμμών ή επιπέδων που συγκλίνουν και άλλοι την συμπεριέλαβαν στην κατηγορία της ποιότητας και είπαν ότι είναι ένα χαρακτηριστικό της επιφάνειας ή του στερεού όπως η ευθύτητα

[6] Η έννοια της γωνίας είναι έννοια των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών αφού ούτε οι Βαβυλώνιοι, ούτε οι Αιγύπτιοι γνώριζαν την έννοια αυτή.

και η καμπυλότητα. Επίσης ο Εύδημος ο περιπατητικός, ο οποίος έγραψε ένα βιβλίο για τη γωνία, δέχτηκε ότι η γωνία είναι ποιότητα. Γιατί, έχοντας υπόψη του τη γέννησή της λέει ότι δεν είναι τίποτε άλλο παρά η κλίση των γραμμών και αν είναι η ευθύτητα ποιότητα τότε πρέπει και η κλίση να είναι ποιότητα.

Στο κείμενο του Ήρωνος του Αλεξανδρέως «Ονόματα γεωμετρικών όρων» διαβάζουμε

[12.1.2 – 5] Γωνία ἐστὶ συναγωγὴ πρὸς ἓν σημεῖον ὑπὸ κεκλασμένης ἐπιφανείας ἢ γραμμῆς ἀποτελουμένη. κεκλασμένη δὲ λέγεται γραμμή, ἥτις ἐκβαλλομένη οὐ συμπίπτει αὐτὴ καθ' ἑαυτῆς.	*Γωνία είναι η συναγωγή προς ένα σημείο που σχηματίζεται από μια τεθλασμένη επιφάνεια ή γραμμή. Τεθλασμένη λέγεται αυτή η γραμμή που όταν προεκτείνεται δεν ταυτίζεται με τον εαυτό της.*

ενώ ενδιαφέρον έχει και η συσχέτιση που κάνει της ορθής γωνίας με τη μονάδα.

[21.1.3 – 8] Ἡ ὀρθὴ γωνία καὶ τὸ νῦν καὶ μονὰς ὁμοίως ἔχουσιν· ἥ τε γὰρ ὀρθὴ γωνία ἀεὶ ἕστηκεν ἡ αὐτὴ μένουσα τῆς ὀξείας καὶ ἀμβλείας ἐπ' ἄπειρον μετακινουμένων, ἥ τε μονὰς μὲν αὐτὴ ἕστηκεν, ὁ δὲ μερισμὸς περὶ αὐτὴν καὶ ἡ σύνθεσις, καὶ τὸ νῦν δὲ αὐτὸ ἕστηκεν, ὁ δὲ παρεληλυθὼς καὶ ὁ μέλλων ἐπ' ἄπειρον.	*Η ορθή γωνία, το τώρα και η μονάδα σχετίζονται όμοια, γιατί η ορθή γωνία πάντοτε είναι σταθερή και παραμένει η ίδια ενώ η οξεία και η αμβλεία αλλάζουν απεριόριστα, το ίδιο και η μονάδα παραμένει πάντοτε σταθερή, ενώ η διαίρεση η άθροισή της όχι, όμοια και το παρόν παραμένει το ίδιο ενώ ο προγενέστερος και ο μελλοντικός χρόνος ρέουν προς το άπειρο.*

Επίσης, στο χωρίο [136.24.1 – 22] βρίσκουμε μια θεϊκή ερμηνεία της γωνίας, όπου αυτή ανάγεται σε δεσμό. Η κλίση είναι το γένος των επιπέδων γωνιών και το επίπεδο είναι ο τόπος τους (γιατί και οι γωνίες έχουν θέση). Το ίδιο κείμενο βρίσκουμε και στον Πρόκλο.

[128.26 – 129.20] Τὴν γωνίαν σύμβολον εἶναί φαμεν καὶ εἰκόνα τῆς συνοχῆς τῆς ἐν τοῖς θείοις γένεσι καὶ τῆς συναγωγοῦ τάξεως τῶν διῃρημένων εἰς ἓν καὶ τῶν μεριστῶν εἰς τὸ ἀμερὲς καὶ τῶν πολλῶν εἰς συνδετικὴν	*Υποστηρίζουμε ότι η γωνία είναι σύμβολο και εικόνα της συνοχής που υπάρχει στα θεϊκά γένη και της τάξης που συγκεντρώνει σε μια ενότητα τα διαχωρισμένα και σε μια αδιαιρετότητα τα διαιρεμένα και σε μια συνδετική επικοινωνία τα πολλά. Γιατί αυτή γίνεται δεσμός των πολλών*

κοινωνίαν. δεσμὸς γὰρ γίνεται καὶ αὕτη τῶν πολλῶν γραμμῶν καὶ ἐπιπέδων, καὶ συναγωγὸς τοῦ μεγέθους εἰς τὸ ἀμερὲς τῶν σημείων, καὶ συνεκτικὴ παντὸς τοῦ κατ' αὐτὴν ὑφισταμένου σχήματος. διὸ καὶ τὰ λόγια τὰς γωνιακὰς συμβολὰς τῶν σχημάτων συνοχηίδας ἀποκαλεῖ, καθόσον εἰκόνα φέρουσι τῶν συνοχικῶν ἑνώσεων καὶ τῶν συζεύξεων τῶν θείων, καθ' ἃς τὰ διεστῶτα συνάπτουσιν ἀλλήλοις. αἱ μὲν οὖν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις γωνίαι ἀϋλοτέρας αὐτῶν καὶ ἁπλουστέρας ἀποτυποῦνται καὶ τελειοτέρας ἑνώσεις, αἱ δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς τὰς προϊούσας μέχρι τῶν ἐσχάτων καὶ τοῖς διεσπασμένοις κοινωνίαν καὶ τοῖς πάντη μεριστοῖς ὁμοφυῆ σύνταξιν παρεχομένας. τῶν δὲ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις αἱ μὲν τὰς πρώτας αὐτῶν καὶ ἀμίκτους, αἱ δὲ τὰς τῆς ἀπειρίας συνεκτικὰς τῶν ἐν αὐταῖς προόδων ἀπεικονίζονται, καὶ αἱ μὲν τὰς τῶν νοερῶν εἰδῶν ἑνοποιοῦσιν, αἱ δὲ τὰς τῶν αἰσθητῶν λόγων, αἱ δὲ τὰς τῶν μεταξὺ τούτων συνδετικάς.	*γραμμών και επιπέδων, και συγκεντρώνει το μέγεθος στην αδιαιρετότητα των σημείων, και συγκρατεί κάθε σχήμα που λαμβάνει υπόσταση από αυτήν. Γι αυτό και οι Χρησμοί αποκαλούν τις γωνιώδεις συναντήσεις «συνοχίδες» των σχημάτων, στο βαθμό που αποτελούν εικόνα των συνεκτικών ενώσεων και των θεϊκών συζεύξεων με τις οποίες συνδέονται μεταξύ τους τα διαχωρισμένα. Οι γωνίες αποτυπώνουν, λοιπόν, αϋλότερες, απλούστερες και τελειότερες ενώσεις, μέσα στις επιφάνειες, ενώ οι γωνίες μέσα στα στερεά αποτυπώνουν τις ενώσεις που φτάνουν μέχρι τα τελευταία όντα και παρέχουν επικοινωνία στα διασπασμένα και ομογενή συμπαράταξη σε όσα είναι εντελώς διαιρετά. Από τις γωνίες μάλιστα που βρίσκονται μέσα στις επιφάνειες, κάποιες απεικονίζουν τις πρώτες και αμιγείς ενοποιητικές αιτίες, ενώ άλλες απεικονίζουν τις αιτίες που συγκρατούν το άπειρο των προόδων τους.*

Τέλος, ας σταθούμε και στον τελευταίο ορισμό του πρώτου βιβλίου. Εδώ ορίζονται οι παράλληλες ευθείες. Στην πραγματικότητα δεν ορίζεται ένα γεωμετρικό αντικείμενο, αλλά μια σχέση ισοδυναμίας. Ο Πρόκλος, στα σχόλιά του στην πρόταση Ι.30 (Όταν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες) αναφέρει ότι την ιδιότητα αυτή την έχουν μόνο η ισότητα, η ομοιότητα, η ταυτότητα και η παραλληλία και ονομάζει την παραλληλία ομοιότητα θέσης (ἐστιν ὁμοιότης θέσεως ἡ παραλληλότης) παραλληλίζοντάς την μάλιστα με την πρώτη κοινή έννοια.

[373.5 – 23] Εἴωθεν ὁ γεωμέτρης ἐν τοῖς περὶ τῶν σχέσεων λόγοις δεικνύναι τὴν ταυτότητα διήκουσαν ἐν ἅπασι τοῖς πρὸς τὸ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχουσι σχέσιν. οὕτω γὰρ καὶ ἐν τοῖς ἀξιώμασιν ἔλεγεν τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα [καὶ ἀλλήλοις ἴσα] καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς ἐρεῖ τὰ τῷ αὐτῷ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά ἐστι, καὶ οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. κατὰ τοῦτον οὖν τὸν τρόπον καὶ νῦν ἀποδείκνυσιν ὅτι αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. συμβέβηκεν δὲ οὐκ ἐπὶ πασῶν τῶν σχέσεων εἶναι τοῦτο ἀληθές. οὐ γὰρ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια καὶ ἀλλήλων διπλάσιά ἐστιν, οὐδὲ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμιόλια καὶ ἀλλήλων ἡμιόλιά ἐστιν. ἀλλ' ἔοικεν ἐπ' ἐκείνων μόνων χώραν ἔχειν, ὅσαι ἀντιστρέφουσι συνωνύμως, ἐπὶ τῆς ἰσότητος, ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος, ἐπὶ τῆς ταυτότητος, ἐπὶ τῆς παραλλήλου θέσεως. ἡ γὰρ παράλληλος παραλλήλῳ παράλληλός ἐστιν, ὡς τὸ ἴσον ἴσῳ ἴσον, καὶ τὸ ὅμοιον ὁμοίῳ ὅμοιον. καὶ γάρ ἐστιν ὁμοιότης θέσεως ἡ παραλληλότης, εἰ δυνατὸν εἰπεῖν.	*Με αυτή την πρόταση ο γεωμέτρης δείχνει ότι και στις σχέσεις γύρω από λόγους όσα είναι κάτι προς το ίδιο την ίδια έχουν σχέση μεταξύ τους. Διότι έτσι έλεγε και στα αξιώματα, όσα είναι ίσα με το ίδιο [είναι και μεταξύ τους ίσα] και από κει και πέρα έλεγε ότι όσα είναι όμοια με το ίδιο και μεταξύ τους είναι όμοια, και όσα έχουν ίδιο λόγο τότε και μεταξύ τους έχουν τον ίδιο λόγο. Με αυτόν, λοιπόν, τον τρόπο και τώρα αποδεικνύει ότι οι παράλληλες προς την ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες. Δεν συμβαίνει όμως να είναι αυτό αληθές σε κάθε σχέση. Διότι δεν είναι του ίδιου τα διπλάσια να είναι μεταξύ τους διπλάσια, ούτε τα του ίδιου μισά είναι μεταξύ τους μισά. Αλλά φαίνεται να συμβαίνει μόνο σε όσες [σχέσεις] που αντιστρέφονται συνώνυμα, στην ισότητα, την ομοιότητα, την ταυτότητα και την παράλληλη θέση. Διότι η παράλληλη στην παράλληλη, παράλληλη είναι, όπως το ίσο στο ίσο, ίσο είναι και το όμοιο στο όμοιο, όμοιο είναι. Και για αυτό η παραλληλότητα μπορούμε να πούμε ότι είναι ομοιότητα θέσεως.*

2.3. Τα αιτήματα στα «Στοιχεία»

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, ο Ευκλείδης ακολουθεί την Αριστοτέλεια ταξινομία. Οι υποθέσεις και τα αιτήματα διαφέρουν από τα αξιώματα. Όταν κάτι είναι προφανές και γνωστό σε όλους και το αποδέχεται και αυτός που μαθαίνει, τότε έχουμε ένα αξίωμα, όπως για παράδειγμα ότι τα ίσα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα. Όταν πάλι, ο μαθητής δεν γνωρίζει αλλά δέχεται την αλήθεια μιας πρότασης, τότε αυτό καλείται υπόθεση, όπως για παράδειγμα το ότι ο κύκλος είναι ένα σχήμα με συγκεκριμένη ιδιότητα δεν θα το γνωρίζαμε αν κάποιος δεν μας το είχε διδάξει. Όταν όμως το ακούμε, το δεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Όταν τώρα κάτι δεν το γνωρίζει ο μαθητής και ταυτόχρονα δεν είναι τόσο προφανές ώστε να το δεχθεί χωρίς απόδειξη, τότε αυτό, αν δεν μπορούμε να το αποδείξουμε, το ονομάζουμε αίτημα. Όπως για παράδειγμα ότι όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.

Κατά τον Πρόκλο, κοινό χαρακτηριστικό των αξιωμάτων και των αιτημάτων είναι ότι δεν χρειάζονται κάποια απόδειξη ούτε γεωμετρικά επιχειρήματα, αλλά λαμβάνονται ως γνωστά και γίνονται αρχές των επομένων. Η εμφανής και αναπόδεικτη γνώση και η αποδοχή χωρίς κατασκευή διακρίνει τα δύο αυτά, όπως ακριβώς η αποδεικτική γνώση και η αποδοχή των ζητουμένων μαζί με μια κατασκευή διακρίνει τα θεωρήματα από τα προβλήματα. Γιατί πρέπει παντού οι αρχές να υπερτερούν από όσα τις ακολουθούν με το να είναι πιο απλές, αναπόδεικτες και από μόνες τους πιστευτές. Για παράδειγμα, το ότι από ένα σημείο προς ένα άλλο σημείο χαράσσεται μια ευθεία, η σκέψη μας το συλλαμβάνει ως προφανές και εύκολο, γιατί αν ακολουθήσει την ομαλή ροή του σημείου και κινηθεί μαζί του χωρίς να παρεκκλίνει, καταλήγει στο άλλο σημείο. Το ίδιο απλό είναι να χαράξει κανείς έναν κύκλο. Όμως αν θελήσει κανείς να κατασκευάσει ένα ισόπλευρο τρίγωνο θα χρειαστεί μια πιο πολύπλοκη μέθοδο που πολύ απέχει από το να σχηματιστεί με απλή κατανόηση και με μια πρώτη ματιά.

Το αν λοιπόν κάποια πράγματα κατασκευάζονται ευκολότερα ή δυσκολότερα και το αν αποδεικνύονται από περισσότερους ή λιγότερους ενδιάμεσους όρους, εξαρτάται από τη φύση αυτών που τα χρησιμοποιούν. Το αν, όμως, γενικά χρειάζονται απόδειξη και κατασκευή εξαρτάται από την ιδιότητα των ζητουμένων η οποία υπολείπεται από τη σαφήνεια των αιτημάτων και των αξιωμάτων. Πρέπει λοιπόν και τα δύο να έχουν την απλότητα και την ευκολία στο να γίνουν αντιληπτές. Το αίτημα όμως μας ζητά να επινοήσουμε και να δημιουργήσουμε κάποιο αντικείμενο το οποίο έχει απλή και εύκολη την κατανόησή του και χρειάζεται για την παρουσίαση κάποιου συμπτώματος, ενώ το αξίωμα διατυπώνει κάποιο ουσιώδες χαρακτηριστικό το οποίο είναι αμέσως γνωστό στους ακροατές, όπως ότι η φωτιά είναι θερμή. Επομένως το αίτημα είναι ομογενές με το αξίωμα, αλλά διαφέρει από αυτό με τον παραπάνω τρόπο.

Τα αιτήματα, λοιπόν, έχουν την αποστολή να «αποδείξουν» τη μαθηματική ύπαρξη κάποιων βασικών γεωμετρικών αντικειμένων.

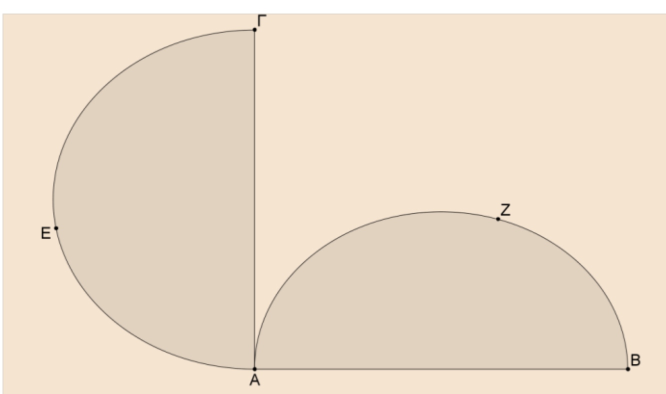
Το αίτημα 1 (από κάθε σημείο προς κάθε σημείο μπορεί να αχθεί ευθεία) περιγράφει τη μορφή της ευθείας και μας δίνει τη βασική λειτουργία του κανόνα, δηλαδή αν δοθούν δύο διαφορετικά σημείου του επιπέδου, τότε μπορούμε να χαράξουμε την ευθεία (ευθύγραμμο τμήμα) που τα συνδέει. Για το αίτημα 2 (Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκταθεί συνεχώς και ευθύγραμμα και προς τα δυο άκρα του) μπορούμε να πούμε ότι ουσιαστικά αποτελεί την περιγραφή της λειτουργίας του κανόνα, ενώ επιβεβαιώνει τη δυνατότητα του τμήματος να προεκτείνεται και από τις δύο μεριές επ' άπειρον και συνεχώς. Αν μάλιστα συνδυαστεί με το πρώτο αίτημα επιβεβαιώνει ότι αν δυο ευθείες έχουν ένα τμήμα κοινό τότε ταυτίζονται. Το τρίτο αίτημα (αν δοθεί ένα σημείο και ένα τμήμα μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο με κέντρο το σημείο αυτό και ακτίνα το τμήμα) έχει ακριβώς την Αριστοτελική θέση του αιτήματος και μια σημαντική του συνέπεια είναι ότι ο ευκλείδειος χώρος είναι συνεχής και εκτείνεται επ' άπειρον. Δηλαδή από αυτό το αίτημα προκύπτει η συνέχεια του χώρου, αφού η ακτίνα του κύκλου μπορεί να είναι όσο θέλουμε μικρή και το άπειρο του χώρου, αφού η ακτίνα μπορεί να είναι όσο θέλουμε μεγάλη.

Ο Πρόκλος αναφέρει σχετικά με τα τρία αυτά αιτήματα, ότι προφανώς είναι αιτήματα, αφού είναι σαφή και μας ζητούν να σχηματίσουμε κάτι και ερμηνεύοντάς τα

[187.4-18] Ἔοικεν μὴν τῶν τριῶν τούτων αἰτημάτων τὸ μὲν πρῶτον ἐν εἰκόσιν ἡμῖν ἐμφανίζειν, ὅπως τὰ ὄντα περιέχεται ἐν τοῖς αὐτῶν αἰτίοις ἀμερεστέροις οὖσι καὶ ὁρίζεται ἀπ' αὐτῶν, καὶ ὅτι καὶ πρὶν ὑποστῇ πανταχόθεν ὑπ' ἐκείνων περιείληπται – καὶ γὰρ ἡ εὐθεῖα τῶν σημείων ὄντων ἐπὶ θάτερον ἀπὸ θατέρου ἐπιζεύγνυται καὶ περατοῦται ὑπ' αὐτῶν καὶ μεταξὺ αὐτῶν	*Φαίνεται ότι από τα τρία αυτά αιτήματα το πρώτο μας παρουσιάζει με εικόνες πως τα όντα περιέχονται μέσα στα αίτιά τους που είναι πιο αδιαίρετα και πως οριοθετούνται από αυτά, και ότι από κάθε πλευρά τους έχουν περιληφθεί από τα αίτια προτού λάβουν υπόσταση – διότι και η ευθεία ενώνει το ένα με το άλλο κάποια σημεία και περατώνεται από αυτά τα σημεία και περιλαμβάνεται μεταξύ αυτών των σημείων.* *Το δεύτερο μας δείχνει πως τα όντα προχωρούν παντού κουβαλώντας μαζί τους τις ρίζες τους*

ἀπείληπται – τὸ δὲ δεύτερον, ὅπως τὰ ὄντα ἐχόμενα τῶν οἰκείων ἀρχῶν πρόεισιν ἐπὶ πάντα τήν τε πρὸς ἐκεῖνα συνέχειαν φυλάττοντα καὶ μὴ ἀποσπώμενα ἀπ' αὐτῶν, ἀλλὰ διὰ τὴν ἀπειροδύναμον αἰτίαν πάντη ἐπειγόμενα χωρεῖν, τὸ δὲ τρίτον, ὅπως τὰ προελθόντα πάλιν ἐπιστρέφεται πρὸς τὰς οἰκείας ἀρχάς. ἡ γὰρ τοῦ κινουμένου περὶ τὸ μένον στροφὴ τὸν κύκλον ἀπογεννῶσα μιμεῖται τὴν κατὰ κύκλον ἐπάνοδον.	*και πως διατηρώντας επαφή με εκείνες χωρίς ποτέ να αποσπώνται από εκείνες, αλλά με την απειροδύναμη αιτία μπορούν να προχωρήσουν παντού.* *Το δε τρίτο μας δείχνει πως όσα προχώρησαν επιστρέφουν πάλι στις ρίζες τους. Διότι η περιστροφή του κινούμενου γύρω από το σταθερό, περιστροφή η οποία γεννά τον κύκλο, μιμείται την κυκλική επιστροφή.*

Το 4^{o} αίτημα (όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες) είναι διαφορετικό από τα προηγούμενα. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι αυτό δεν πρέπει να είναι αίτημα αλλά αξίωμα (ακολουθώντας τον χωρισμό του Γέμινου, σύμφωνα με τον οποίο η πρόταση αυτή λέει απλώς ένα ουσιώδες χαρακτηριστικό των ορθών γωνιών και δεν μας ζητά να δημιουργήσουμε – κατασκευάσουμε κάτι χρησιμοποιώντας απλή σκέψη). Βέβαια, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη είναι αίτημα γιατί χρειάζεται κάποια απόδειξη, αφού δεν είναι απολύτως προφανές ότι ισχύει. Αν όμως υποστηρίξουμε, συνεχίζει ο Πρόκλος, ότι αυτό μπορεί να αποδειχθεί και αναζητήσουμε την απόδειξή του, ακόμα κι έτσι δεν πρέπει να τοποθετηθεί στα αιτήματα. Μάλιστα το αποδεικνύει και δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή ότι υπάρχουν γωνίες ίσες με μια ορθή που δεν είναι ορθές, όπως απέδειξε ο Πάππος. Ας θεωρήσουμε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ τα οποία



σχηματίζουν ορθή γωνία στο Α και ας θεωρήσουμε τα δύο ημικύκλια ΑΖΒ και ΑΕΓ. Επειδή τα δύο ημικύκλια εφαρμόζουν το ένα στο άλλο, η γωνία ΕΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΒ. Αν προσθέσουμε και στις δύο γωνίες την γωνία ΓΑΖ τότε βρίσκουμε ότι η ορθή γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τη μηνοειδή γωνία ΕΑΖ, η οποία προφανώς δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως ορθή από τον ορισμό της ορθής γωνίας.

Τέλος σχολιάζει:

[191.5-15] Φανερὸν δὲ καὶ ἐκ τοῦδε τοῦ αἰτήματος, ὅτι ἡ ὀρθότης τῆς γωνίας τῇ ἰσότητι συγγενής ἐστιν, ὥσπερ ἡ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης τῇ ἀνισότητι. καὶ γάρ ἐστιν ἡ μὲν ὀρθότης αὐτῇ τῇ ἰσότητι σύστοιχος – ἀμφότεραι γὰρ ὑπὸ τὸ πέρας, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ὁμοιότης – ἡ δὲ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης τῇ ἀνισότητι, καθάπερ καὶ ἡ ἀνομοιότης· ἀπειρίας γὰρ ἔκγονοι πᾶσαι. διὸ καὶ οἱ μὲν τὸ ποσὸν ὁρῶντες τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ λέγουσιν, οἱ δὲ τὸ ποιὸν ὁμοίαν. ὅπερ γάρ ἐστιν ἐν ποσοῖς ἡ ἰσότης τοῦτο ἐν τοῖς ποιοῖς ἡ ὁμοιότης.	*Είναι φανερό και από αυτό το αίτημα ότι η ορθότητα της γωνίας είναι συγγενής με την ισότητα, όπως ακριβώς η οξύτητα και η αμβλύτητα με την ανισότητα. Γιατί η μεν ορθότητα ανήκει στην ίδια κατηγορία με την ισότητα – διότι και οι δύο υπάγονται στο πέρας, όπως ακριβώς και η ομοιότητα – ενώ η οξύτητα και η αμβλύτητα ανήκουν στην ίδια κατηγορία με την ανισότητα, όπως και η ανομοιότητα· γιατί όλες παράγονται από το άπειρο. Γι αυτό και όσοι λαμβάνουν υπόψη τους την ποσότητα των γωνιών την ορθή λένε ότι είναι ίση με την ορθή γωνία, ενώ όσοι λαμβάνουν υπόψη τους την ποιότητα λένε ότι είναι όμοια. Διότι ότι είναι για την ποσότητα η ισότητα είναι για την ποιότητα η ομοιότητα.*

Για το 5^{ο} αίτημα (αν μια ευθεία τέμνει δύο ευθείες και σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε, αν οι ευθείες επεκταθούν επ' άπειρο, συναντώνται μεταξύ τους στη μεριά που βρίσκονται οι γωνίες που είναι μικρότερες από δύο ορθές) ο Πρόκλος είναι σαφέστατος.

[191,21-192,1] Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρὴ τῶν αἰτημάτων· θεώρημα γάρ ἐστι, πολλὰς μὲν ἀπορίας ἐπιδεχόμενον, ἃς καὶ ὁ <Πτολεμαῖος> ἔν τινι βιβλίῳ διαλῦσαι προύθετο, πολλῶν δὲ εἰς ἀπόδειξιν δεόμενον καὶ ὅρων καὶ θεωρημάτων. καὶ τό γε ἀντιστρέφον καὶ ὁ <Εὐκλείδης> ὡς	*Αυτό πρέπει να το διαγράψουμε τελείως από τα αιτήματα, γιατί είναι θεώρημα που επιδέχεται πολλές απορίες, τις οποίες και ο Πτολεμαίος σε κάποιο βιβλίο του προσπάθησε να διαλύσει, και χρειάζεται πολλούς ορισμούς και πολλά θεωρήματα για την απόδειξή του. Μάλιστα, το αντίστροφό του το αποδεικνύει ο Ευκλείδης ως θεώρημα.*[7]

[7] Πρόταση Ι.28

θεώρημα δείκνυσιν.	

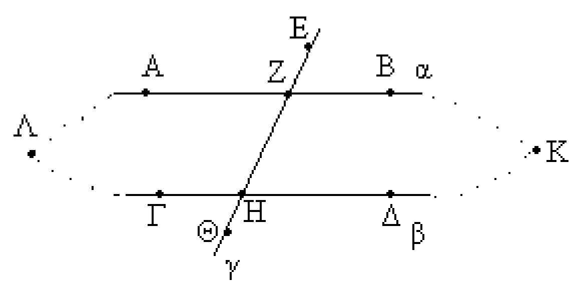
Μάλιστα το συγκεκριμένο αίτημα αρκετοί το θεώρησαν ως θεώρημα και προσπάθησαν να το αποδείξουν.

«Ἤδη μὲν οὖν καὶ ἄλλοι τινὲς ὡς θεώρημα προτάξαντες τοῦτο
αἴτημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφθὲν ἀποδείξεως ἠξίωσαν».

Ένας από αυτούς ήταν όπως είδαμε και ο Πτολεμαίος. Όπως μας πληροφορεί ο Πρόκλος, αρχικά στα σχόλιά του στην πρόταση Ι.28 [*362.14 – 363.18*], ο Πτολεμαίος προσπαθεί να αποδείξει (ἀποδεῖξαι προέθετο) ότι οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που σχηματίζονται οι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο. Αρχικά προσπάθησε να αποδείξει την πρόταση Ι.28 και συγκεκριμένα ότι: «*Αν οι ευθείες α και β τέμνονται από την ευθεία γ και σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα δύο ορθές τότε οι ευθείες α και β είναι παράλληλες*». Αλλάζοντας μόνο τους συμβολισμούς, ο Πτολεμαίος ισχυρίζεται:

Έστω δύο ευθείες α και β, οι οποίες τέμνονται από την ευθεία γ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε οι γωνίες ΒΖΗ και ΖΗΔ να έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές.

Τότε οι ευθείες α και β είναι παράλληλες. Πράγματι, αν τέμνονταν για παράδειγμα στο Κ τότε, επειδή η ευθεία γ τέμνει την ευθεία α σχηματίζει δύο γωνίες, την ΑΖΗ και την ΗΖΒ με άθροισμα ίσο με δύο ορθές. Επίσης η γ τέμνει και την ευθεία β σχηματίζοντας τις γωνίες ΓΗΖ και ΖΗΔ με άθροισμα δύο ορθές. Τότε όμως οι τέσσερεις γωνίες ΑΖΗ, ΒΖΗ, ΓΗΖ και ΔΗΖ έχουν άθροισμα τέσσερεις ορθές και αφού οι ΒΖΗ, ΔΗΖ έχουν άθροισμα δύο ορθές, τόσο θα έχουν και οι άλλες δύο. Αφού όμως οι ΖΒ και ΗΔ τέμνονται στο Κ πρέπει και οι ΖΑ και ΗΓ να τέμνονται σε κάποιο σημείο, έστω το Λ. Όμως τότε οι ευθείες ΛΑΒΚ και ΛΓΔΚ περιέχουν χωρίο, που είναι αδύνατο. Άρα δεν μπορούν να τέμνονται οι α και β και επομένως είναι παράλληλες.



Στη συνέχεια προσπαθεί να αποδείξει και την Ι.29 χωρίς τη χρήση του 5^{ου} αιτήματος. Λέει, με σύγχρονους συμβολισμούς: «Είναι αναγκαίο η τέμνουσα τις παράλληλες α και β να σχηματίζει δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες με δύο ορθές ή μικρότερες από δύο ορθές ή μεγαλύτερες από δύο ορθές. Δεν είναι δυνατόν όμως να σχηματίζει δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μεγαλύτερο από δύο ορθές. Διότι, αν για παράδειγμα οι γωνίες ΑΖΗ και ΓΗΖ είχν άθροισμα μεγαλύτερο από δύο ορθές τότε οι άλλες δύο, οι ΒΖΗ και η ΔΗΖ θα είχαν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές αλλά ταυτόχρονα και μεγαλύτερο από δύο ορθές. Αν η ευθεία γ τέμνει τις ΑΖ και ΓΗ σχηματίζοντας δύο γωνίες με άθροισμα μεγαλύτερο από δύο ορθές το ίδιο θα κάνει και με τις ΖΒ, ΗΔ οι οποίες είναι επίσης παράλληλες. Αυτό όμως είναι άτοπο και επομένως οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες με δύο ορθές.

Εδώ είναι προφανής η παρανόηση. Εισάγει ένα είδος συμμετρίας χωρίς να την αποδεικνύει πουθενά και χωρίς να υπάρχει καμιά λογική που να την υποδεικνύει εκτός από την απελπισμένη προσπάθεια να αποδειχθεί το αναπόδεικτο. Βέβαια στη συνέχεια «αποδεικνύει» το 5^{ο} αίτημα με άψογο τρόπο.

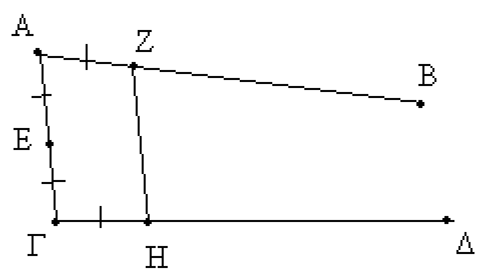
Ο Πρόκλος βλέπει τα κενά στην απόδειξη του Πτολεμαίου και τα επισημαίνει στις γραμμές *368.1 – 24*. Κυρίως στέκεται στις περιπτώσεις που θεώρησε ο Πτολεμαίος και λέει ότι δεν είναι μόνο οι τρεις που έλαβε εκείνος αφού δεν είναι απαραίτητο να είναι και από τις δύο μεριές οι γωνίες οι μεγαλύτερες από δύο ορθές ή μικρότερες από δύο ορθές.

Ταῦτα μὲν οὖν ὁ <Πτολεμαῖος>. ἐφιστάνειν δὲ ἄξιον, μή ποτε παραλογισμός τίς ἐστιν ἐν ταῖς εἰλημμέναις ὑποθέσεσι, λέγω δὲ ἐν ἐκείναις, ἐν αἷς ἔλεγεν ὅτι τῆς τεμνούσης εὐθείας τὰς ἀσυμπτώτους τέτταρας ἐντὸς γωνίας ποιούσης αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἢ δύο ὀρθῶν μείζους ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. **οὐ γὰρ τελεία ἡ διαίρεσις**. κωλύει γὰρ οὐδὲν τὸν ἀσυμπτώτους λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλασσόνων δυεῖν ὀρθῶν ἐκβαλλομένας τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ θάτερα δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας, **καὶ οὐχ ἕνα περὶ τούτων ἀποδέχεσθαι λόγον**. ἀτελοῦς δὲ οὔσης τῆς διαιρέσεως οὐκ ἀποδέδεικται τὸ προκείμενον. ἔτι δὲ κἀκεῖνο πρὸς τὴν δεῖξιν ῥητέον, ὅτι οὐ καθ' αὑτὸ δείκνυσι τὸ ἀδύνατον. οὐ γὰρ ἐπειδὴ παραλλήλους τέμνουσά τις εὐθεῖα μείζους ἐποίησεν τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα μέρη δύο ὀρθῶν ἢ ἐλάσσους, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ ἄτοπον ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν, **ἀλλ' ἐπειδὴ τέσσαρες τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἐντὸς τῶν τεμνομένων, διὰ τοῦτο ἀδύνατος ἑκατέρα τῶν ὑποθέσεων τούτων**, ἐπεὶ κἂν μὴ παραλλήλους τις λάβῃ τὰς εὐθείας τὰ αὐτὰ ἀκολουθήσει τῶν ὑποθέσεων τῶν αὐτῶν εἰλημμένων.

«Αφού οι τέσσερεις εντός γωνίες έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές, είναι αδύνατο να ισχύουν και οι δύο υποθέσεις που οδήγησαν στο άτοπο».

Ο Πρόκλος, δεν αρκείται στον εντοπισμό του λάθους του Πτολεμαίου αλλά δίνει και ένα αντιπαράδειγμα σύμφωνα με το οποίο δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές δεν τέμνονται αλλά είναι παράλληλες. [*368.2 – 369.20*]

«Έστω οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ και θεωρούμε την ευθεία ΑΓ. Έστω ότι οι γωνίες ΒΑΓ και ΔΓΑ έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Διχοτομούμε την ΑΓ στο Ε και αφαιρούμε από την ΑΒ το ΑΖ = ΑΕ και από την ΓΔ την ΓΗ = ΓΕ. Τότε οι ΑΖ και ΓΗ δεν τέμνονται στα Ζ και Η γιατί αν τέμνονταν τότε θα σχημάτιζαν τρίγωνο ΑΓΖ με ΑΖ + ΓΖ = ΑΓ, που είναι άτοπο



από την τριγωνική ανισότητα! Τότε όμως μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή με την τέμνουσα ΖΗ, που πάλι σχηματίζει δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, να χωρίσουμε το ΖΗ στη μέση κ.τ.λ. δείχνοντας ότι ποτέ δεν θα τέμνονται οι ΑΒ και ΓΔ. Μάλιστα ισχυρίζεται ότι δεν μπορούμε να πούμε ούτε ότι είναι παράλληλες οι ΑΒ και ΓΔ διότι το άτοπο με την τριγωνική ανισότητα ισχύει για τα Ζ και Η αλλά αν πάρουμε μια επόμενη τέμνουσα π.χ. την ΚΛ κανείς δεν μας λέει ότι αυτά τα σημεία δεν ταυτίζονται αφού η ΑΚ και η ΓΛ έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από την ΑΓ, όπως προβλέπει η τριγωνική ανισότητα και άρα μπορεί να σχηματίζεται τρίγωνο. Μπορεί όμως και όχι…!

Ας δούμε τώρα και την «απόδειξη» του ίδιου του Πρόκλου στο 5^{ο} αίτημα [371.10–373.1]. Επικαλείται μια αρχή του Αριστοτέλη σύμφωνα με την οποία κάθε πεπερασμένο είναι πάντα μικρότερο από το άπειρο.

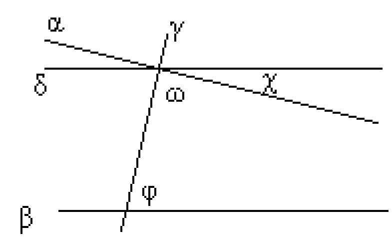
Αριστοτέλης, Περί Ουρανού [271b.17-272a.7]

Ἀνάγκη δὴ πᾶν σῶμα ἤτοι τῶν ἁπλῶν εἶναι ἢ τῶν συνθέτων,
ὥστε καὶ τὸ ἄπειρον ἢ ἁπλοῦν ἔσται ἢ σύνθετον.
Ἀλλὰ μὴν καὶ ὅτι γε πεπερασμένων τῶν ἁπλῶν ἀνάγκη
πεπερασμένον εἶναι τὸ σύνθετον, δῆλον· τὸ γὰρ
ἐκ πεπερασμένων καὶ πλήθει καὶ μεγέθει συγκείμενον πεπέρανται
καὶ πλήθει καὶ μεγέθει· τοσοῦτον γάρ ἐστιν ἐξ ὅσων ἐστὶ συγκείμενον.
Λοιπὸν τοίνυν ἰδεῖν πότερον ἐνδέχεταί τι τῶν ἁπλῶν ἄπειρον εἶναι
τὸ μέγεθος, ἢ τοῦτ' ἀδύνατον. Προχειρισάμενοι δὴ περὶ
τοῦ πρώτου τῶν σωμάτων, οὕτω σκοπῶμεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.
Ὅτι μὲν τοίνυν ἀνάγκη τὸ σῶμα τὸ κύκλῳ φερόμενον
πεπεράνθαι πᾶν, ἐκ τῶνδε δῆλον.
Εἰ γὰρ ἄπειρον τὸ κύκλῳ φερόμενον σῶμα,
ἄπειροι ἔσονται αἱ ἀπὸ τοῦ μέσου ἐκβαλλόμεναι.
Τῶν δ' ἀπείρων τὸ διάστημα ἄπειρον·
διάστημα δὲ λέγω τῶν γραμμῶν, οὗ μηδὲν ἔστιν
ἔξω λαβεῖν μέγεθος ἁπτόμενον τῶν γραμμῶν.
Τοῦτ' οὖν ἀνάγκη ἄπειρον εἶναι· τῶν γὰρ
πεπερασμένων ἀεὶ ἔσται πεπερασμένον.
Ἔτι δ' ἀεὶ ἔστι τοῦ δοθέντος μεῖζον λαβεῖν,
ὥστε καθάπερ ἀριθμὸν λέγομεν ἄπειρον,
ὅτι μέγιστος οὐκ ἔστιν, ὁ αὐτὸς λόγος καὶ περὶ
τοῦ διαστήματος· εἰ οὖν τὸ μὲν ἄπειρον μὴ ἔστι διελθεῖν,
ἀπείρου δ' ὄντος ἀνάγκη τὸ διάστημα ἄπειρον εἶναι,

οὐκ ἂν ἐνδέχοιτο κινηθῆναι κύκλῳ· τὸν δ' οὐρανὸν
ὁρῶμεν κύκλῳ στρεφόμενον, καὶ τῷ λόγῳ δὲ διωρίσαμεν
ὅτι ἐστί τινος ἡ κύκλῳ κίνησις.

Βασιζόμενος σε αυτή την αρχή – αξίωμα του Αριστοτέλη, αποδεικνύει ότι αν μια ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη. Πράγματι, αν η ευθείες α και β είναι παράλληλες και η γ τέμνει την α τότε επειδή κάθε ευθεία είναι άπειρη ενώ η απόσταση των παράλληλων ευθειών είναι πεπερασμένη θα υπάρχει κάποιο σημείο πάνω στη γ που θα τέμνει την ευθεία β (αν η γ τέμνει την ευθεία α στο σημείο Κ θα υπάρχει σημείο Λ της γ με ΚΛ μεγαλύτερο της απόστασης των α και β. Αν το Λ δεν είναι πάνω στη β τότε μπορεί να βρεθεί άλλο σημείο της γ έστω Μ με ΚΜ > ΚΛ, κ.ο.κ. μέχρι να βρεθεί σημείο πάνω στην β).

Έστω τώρα ότι έχουμε δύο ευθείες α και β που τέμνονται από τη γ και σχηματίζουν τις γωνίες ω και φ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Τότε υπάρχει η ευθεία δ που σχηματίζει με την ευθεία α γωνία χ τέτοια, ώστε φ + ω + χ να είναι ίση με δύο ορθές. Οι ευθείες δ και β είναι τότε παράλληλες και η α τέμνει την δ, άρα θα τέμνει και την β και μάλιστα προς την πλευρά που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ.



Προφανώς ήταν μια αρκετά ενδιαφέρουσα προσπάθεια αυτή του Πρόκλου, αν και μοιραία αποτυχημένη. Αποδεικνύει ένα αξίωμα με το να εισάγει ένα καινούργιο. Έτσι δεν απαλλάσσει τη γεωμετρία από το 5^o αίτημα απλά μετατοπίζει το πρόβλημα στον Αριστοτέλη και την αρχή του.

Υπήρξαν και άλλες τέτοιες προσπάθειες απόδειξης του αιτήματος αυτού, με το ίδιο πάντα αρνητικό αποτέλεσμα. Ο Saccheri στο έργο του «*Euclides ab omni naevo Vindicatus*» (1773) προσπαθεί να διερευνήσει ποια θα ήταν η γεωμετρία χωρίς το Ευκλείδειο αίτημα. Φαίνεται να είχε συνειδητοποιήσει ότι θα μπορούσε να υπάρξει άλλη γεωμετρία δίπλα σε αυτή που θεμελίωσε ο Ευκλείδης. Όπως είναι γνωστό, οι προσπάθειες συνεχίστηκαν κυρίως κατά τον 18^o και 19^o αιώνα από διάφορους αξιόλογους μαθηματικούς της εποχής και οδήγησαν στη δημιουργία άλλων μη-ευκλείδειων γεωμετριών.

Βλέπουμε ότι τόσο πολύ πίστευαν στη δυνατότητα απόδειξης αυτού του αιτήματος, που ήταν πρόθυμοι να αφιερώσουν χρόνια από τη ζωή του και καμιά φορά ολόκληρη τη ζωή τους για να τα καταφέρουν. Όπως θα δούμε, ο ίδιος ο Ευκλείδης ουσιαστικά τους έστρεψε σε αυτή την ιδέα με το να εισάγει την παραλληλία ως ομοιότητα θέσης.

2.4. «...μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ...»

Η σχέση μεταξύ αιτημάτων και ορισμών είναι μια σχέση αντιθετική. Ένα αίτημα είναι μια ιδιότητα – θέση η οποία, ενώ είναι προφανές ή λογικό να ισχύει, δεν μπορεί να αποδειχθεί διότι λείπει ο σωστός ορισμός ενός ή περισσότερων στοιχείων στα οποία στηρίζεται. Όταν όμως αυτός ο κατάλληλος ορισμός βρεθεί, τότε το αίτημα αποδεικνύεται και μάλιστα πολύ εύκολα. Αυτό προκύπτει καταρχάς από το παρακάτω χωρίο των «Τοπικών» του Αριστοτέλη, όπου διαβάζουμε:

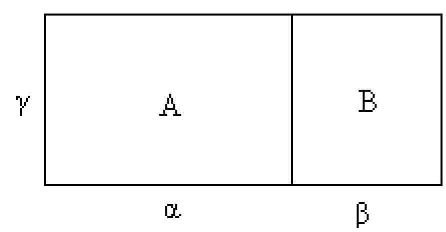
[158b24 – 159a2] Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν, οἷον πότερον ἓν ἑνὶ ἐναντίον ἢ πλείω· ὁρισθέντων δὲ τῶν ἐναντίων κατὰ τρόπον ῥᾴδιον συμβιβάσαι πότερον ἐνδέχεται πλείω τῷ αὐτῷ εἶναι ἐναντία ἢ οὔ. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁρισμοῦ δεομένων. ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον·	*Για πολλές θέσεις, επειδή δεν έχει αποδοθεί σωστά ο ορισμός, δεν είναι εύκολο να συζητήσει κανείς γι αυτές ή να τις αποδείξει, για παράδειγμα αν κάτι έχει ένα ή περισσότερα ενάντια. Αν όμως τα ενάντια ορισθούν με απλό τρόπο, τότε θα ήταν δυνατό να συμπεράνει κανείς αν κάτι είναι ή όχι ενάντιο προς αυτό. Με αυτό τον τρόπο χειρίζεται κανείς πράγματα που χρειάζονται ορισμό. Φαίνεται ότι στα μαθηματικά κάποια πράγματα επειδή λείπει ο ορισμός δεν είναι εύκολο να αποδειχθούν[8], για παράδειγμα το ότι η τέμνουσα το επίπεδο, ομοίως διαιρεί και τη γραμμή και το χωρίο. Όταν όμως διατυπωθεί ο ορισμός γίνεται αμέσως φανερό. Διότι την ίδια ανθυφαίρεση έχουν και τα χωρία και οι γραμμές. Είναι δε αυτός ο ορισμός*

[8] Το «γράφονται» εδώ έχει την έννοια του κατασκευάζονται με γεωμετρικό τρόπο ή του αποδεικνύονται με γεωμετρικό τρόπο. Δες και παρακάτω το κείμενο του Αλέξανδρου του Αφροδισιέα.

τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος. ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τιθεμένων μὲν τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος, ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπιχειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ τὰ ἀνὰ μέσον εἶναι)· ἂν δὲ μὴ τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ' ὅλως ἀδύνατον.	*του ίσου λόγου. Όταν με απλό τρόπο τεθούν οι ορισμοί των πρώτων στοιχείων, όπως για παράδειγμα τι είναι γραμμή και τι είναι κύκλος, τότε μπορούν απλά να αποδειχθούν (αν και δεν υπάρχουν πολλά που μπορεί να πει κάποιος αφού δεν υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα). Αν πάλι δεν δοθούν οι ορισμοί των αρχών, δύσκολο αν όχι παντελώς αδύνατο είναι να αποδειχτούν.*

Το παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης, για να στηρίξει τη θέση του αυτή είναι το εξής.

Υπήρχε ένα αίτημα, ότι η γραμμή που τέμνει το επίπεδο, διαιρεί κατά όμοιο τρόπο την γραμμή και το χωρίο, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}$.



Αν και κάτι τέτοιο φαίνεται προφανές ότι πρέπει να ισχύει, δεν ήταν δυνατή η απόδειξή του λόγω έλλειψης του κατάλληλου ορισμού της αναλογίας. Πράγματι δεν υπήρχε πριν από τους Πυθαγόρειους η έννοια της αναλογίας όταν δεν ήταν ομογενείς και οι τέσσερεις όροι. Όταν αυτός ο ορισμός υπήρξε, δηλαδή ότι δύο λόγοι είναι ίσοι όταν έχουν την ίδια ανθυφαίρεση[9], τότε έγινε πολύ εύκολη και η απόδειξή του.

Ας θεωρήσουμε την ανθυφαίρεση των α και β. Έχουμε:

$\alpha = \kappa_1 \beta + \gamma_1$, με $\gamma_1 < \beta$ (για κάποια κ_1, γ_1)

Αν $\gamma_1 = 0$, η ανθυφαίρεση ολοκληρώθηκε, αλλιώς υπάρχουν κ_2, γ_2 ώστε

$$\beta = \kappa_2 \gamma_1 + \gamma_2 \ , \ \text{με } \gamma_2 < \gamma_1$$

Η ανθυφαίρεση τελειώνει όταν κάποιο από τα υπόλοιπα γίνει ίσο με 1 (γιατί τότε στο επόμενο βήμα το υπόλοιπο αυτό θα μετρά το προηγούμενο). Η ανθυφαίρεση μπορεί επομένως να γραφεί ως εξής:

[9] Η ανθυφαίρεση δύο μεγεθών είναι μια διαδικασία εύρεσης κοινού μέτρου για δύο μεγέθη και για τους αριθμούς η αντίστοιχη διαδικασία είναι ο λεγόμενος Ευκλείδειος αλγόριθμος. (Δες σελίδα 65)

$$\begin{cases} \alpha = \kappa_1 \cdot \beta + \gamma_1 , & \mu\varepsilon\ \gamma_1 < \beta \\ \beta = \kappa_2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 , & \mu\varepsilon\ \gamma_2 < \gamma_1 \\ \gamma_1 = \kappa_3 \cdot \gamma_2 + \gamma_3 , & \mu\varepsilon\ \gamma_3 < \gamma_2 \\ \vdots & \\ \vdots & \end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους των εξισώσεων με το γ παίρνουμε:

$$\begin{cases} \alpha \cdot \gamma = \kappa_1 \cdot \beta \cdot \gamma + \gamma_1 \cdot \gamma , & \mu\varepsilon\ \gamma_1 \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \\ \beta \cdot \gamma = \kappa_2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma + \gamma_2 \cdot \gamma , & \mu\varepsilon\ \gamma_2 \cdot \gamma < \gamma_1 \cdot \gamma \\ \gamma_1 \cdot \gamma = \kappa_3 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma + \gamma_3 \cdot \gamma , & \mu\varepsilon\ \gamma_3 \cdot \gamma < \gamma_2 \cdot \gamma \\ \vdots & \\ \vdots & \end{cases}$$

δηλαδή

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \kappa_1 \cdot \mathrm{B} + \Gamma_1 , & \mu\varepsilon\ \Gamma_1 < B \\ \mathrm{B} = \kappa_2 \cdot \Gamma_1 + \Gamma_2 , & \mu\varepsilon\ \Gamma_2 < \Gamma_1 \\ \Gamma_1 = \kappa_3 \cdot \Gamma_2 + \Gamma_3 , & \mu\varepsilon\ \Gamma_3 < \Gamma_2 \\ \vdots & \\ \vdots & \end{cases}$$

Επομένως πράγματι, Ανθ(α,β) = Ανθ(Α,Β) = $[\kappa_1 , \kappa_2 , \kappa_3 , \ldots]$.

Όπως φαίνεται και από το παρακάτω κείμενο του Αλεξάνδρου, πράγματι αυτή είναι η σχέση που παρουσιάζει ο Αριστοτέλης.

Αλέξανδρος ο Αφροδισιεύς, Σχόλια είς Τοπικά Αριστοτέλους [544,8 – 546,15]

<Ἐν πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ.>

Δείξας ὅτι ἐν πολλοῖς τῶν προβλημάτων ἀναγκαῖόν ἐστι πρῶτον ὡρίσθαι τὸ πρᾶγμα, προστίθησι τοῦ προειρημένου δεικτικὸν καὶ τὸ πρὸς πολλὰ προβλήματα μὴ ῥᾴδιον εἶναι διαλέγεσθαι ἢ δεικνύναι τὸ ἐν αὐτοῖς ἀληθές, εἰ μὴ καλῶς εἴη ὁ ὁρισμὸς ὁ τῶν ἐν αὐτῷ πραγμάτων ἀποδεδομένος. ὅτι γὰρ <ἓν ἑνὶ ἐναντίον> ἐστίν, οὐχ οἷόν τε δεικνύναι μὴ καλῶς ὁρισθέντων τῶν ἐναντίων. ἂν γάρ τις λέγῃ ἐναντία εἶναι τὰ πολὺ ἀλλήλων διεστῶτα ἢ τὰ ἀλλήλων ἀναιρετικά, οὐχ οἷόν τε ἀπὸ τούτων ὁρμώμενον δεῖξαι ἓν ἑνὶ ἐναντίον· δύναται γὰρ καὶ πολλὰ πολὺ ἀφεστῶτα ἀλλήλων λαμβάνεσθαι, τοῦτο μὲν ἐν τῷ αὐτῷ γένει· τὸ γὰρ ξανθὸν καὶ τὸ ὠχρὸν πολὺ τοῦ λευκοῦ διεστᾶσι, ἀλλὰ καὶ ἀναιρετικά εἰσι τοῦ λευκοῦ, κἀκεῖνο τούτων· ἔστι δὲ πολὺ διεστῶτα καὶ ἐν διαφόροις γένεσι λαμβάνειν. ἀποδοθέντος δὲ αὐτῶν τοῦ λόγου, ὅτι τὰ πλεῖστον ἀλλήλων διεστῶτα ἐν τῷ αὐτῷ γένει, *****· πλεῖστον δὲ ἀλλήλων διεστάναι οὐχ οἷόν τε πλείω τῶν δύο· ἓν γὰρ ἑνὶ τὸ πλεῖστον διεστώς.

[ἄλλως. Ἀποδοθέντος δὲ αὐτῶν τοῦ λόγου <κατὰ τρόπον,> ἤγουν καλῶς, <ῥᾴδιόν ἐστι συμβιβάσαι> καὶ ἀποδεῖξαι <πότερον ἐνδέχεται τῷ αὐτῷ> ὑποκειμένῳ πλεῖστα <ἐναντία ἢ οὔ.> εἰ γὰρ ἀποδοθείη λόγος ὅτι ἐναντία εἰσὶ τὰ κατὰ πολὺ ἀλλήλων διεστηκότα φθαρτικὰ ἀλλήλων ὄντα καὶ εἰς ἄλληλα πεφυκότα μὴ μεταβάλλεσθαι, ἐπεὶ τὰ ἄκρα δύο εἰσίν, ἃ καὶ πλεῖστον ἀλλήλων διέστηκε, καὶ οὐ πλείω, δῆλον ὅτι ἓν ἑνὶ ἐναντίον ἐστί.]

545.1 p. 158b29

<Ἔοικε δὲ κἀν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι.>

Ὅτι οὐ μόνον ἐν τοῖς λόγοις καὶ ἐν τῷ διαλέγεσθαι ἀλλὰ <καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν> δυσαπολόγητά ἐστιν· τὸ γὰρ <οὐ ῥᾴδιον ἀπογράφεσθαι> εἶπεν ἀντὶ τοῦ ‘οὐ ῥᾴδιον ἀποδείκνυσθαι’, συνιστὰς ὅτι ἐν πολλοῖς τῶν ὄντων προβλήμασιν ὁρισμοῦ δεῖ. **παραδείγματι δὲ τοῦδε ὡς δεικνυμένῳ καὶ ἀσαφεῖ κέχρηται τῷ ὅτι ἡ <παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον.> ἔστι δὲ τὸ λεγόμενον, ὅτι ἐὰν ἐπίπεδον παραλληλόγραμμον ᾖ, ἀχθῇ δ' ἐν αὐτῷ μιᾷ τῶν πλευρῶν παράλληλος, ἡ παράλληλος ὁμοίως διαιρεῖ τὴν γραμμὴν καὶ τὸ πᾶν χωρίον, τουτέστιν ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ. τοῦτο γὰρ ὁμοίως μὲν λεγόμενον οὐκ ἔστι γνώριμον· ῥηθέντος μέντοι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀνάλογον γνώριμον γίνεται ὅτι ἀνάλογον ὑπὸ τῆς ἀχθείσης παραλλήλου τέμνεται ἥ τε γραμμὴ καὶ τὸ χωρίον. ἔστι δὲ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις· αὐτὸς δὲ τὴν ἀνθυφαίρεσιν <ἀνταναίρεσιν> εἴρηκε. τὰ δ' ἀνάλογον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα καὶ ὁμοίως ἔχειν πρὸς ἄλληλα λέγεται· διὸ εἶπεν <ἔστι δὲ ὁρισμὸς τοῦ**

αὐτοῦ λόγου οὗτος> ἀντὶ τοῦ ‘ἔστι δὲ ὁρισμὸς τοῦ ἀνάλογον’. οὗ ῥηθέντος τοῦ ὅρου δῆλον γίνεται ὅτι ἡ παράλληλος ἀγομένη πλευρᾷ ἐν παραλληλογράμμῳ χωρίῳ ὁμοίως τέμνει καὶ ἀνάλογον τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. [ἄλλως. Ἔοικε, φησίν, ἐν τοῖς μαθηματικοῖς μὴ ῥᾳδίως καταγράφεσθαί τινα διὰ τὸ ἐλλιπῆ τὸν ὅρον ἀποδοθῆναι. οἷον ἡ γραμμὴ ἡ τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, <παρὰ τὴν πλευράν,> ἐπεὶ τέμνει καὶ τὴν πλευράν, <ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμήν,> ἤτοι τὴν πλευράν, καὶ τὸ ἐμβαδόν. γραμμὴν δὲ λέγει τήν τε εὐθεῖαν τὴν τέμνουσαν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐπιπέδου καὶ αὐτὴν τὴν τεμνομένην πλευράν. ἐλλιπὴς οὖν ἐστιν οὗτος ὁ ὅρος, ὅτι γραμμὴν εἴρηκε καὶ τὴν ἀγομένην παρὰ τὴν πλευρὰν εὐθεῖαν καὶ τὴν τεμνομένην πλευράν. εἴη δ' ἂν τέλειος ὁ ὅρος, εἰ οὕτως ἐλέγετο· ἡ παρά τινα πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἢ τοῦ παραλληλογράμμου ἀγομένη εὐθεῖα ὁμοίως τέμνει τό τε ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου καὶ τὴν πλευράν.]

p. 158b35

<Ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τιθεμένων.>

Εἰπὼν τὰ περὶ τῶν μαθημάτων καὶ χρησάμενος τῷ προειρημένῳ παραδείγματι, καὶ καθόλου, φησί, τὰ <πρῶτα τῶν στοιχείων> (ταῦτα δ' ἂν εἴη καὶ τὰ ἐγγὺς τῆς ἀρχῆς καὶ τὰ δι' ἐκείνων μόνων δεικνύμενα), εἰ μὲν εἶεν οἱ ὁρισμοὶ τῶν ἀρχῶν γνώριμοι, οἷον τί σημεῖον, τί <γραμμή, τί κύκλος,> τί τρίγωνον, δι' ὧν δείκνυται τὰ πρῶτα θεωρήματα, ῥᾴδια δειχθῆναι, οὐ διὰ πολλῶν δὲ τῷ μὴ πολλῶν τῶν μέσων, δι' ὧν ἡ δεῖξις, εὐπορίαν εἶναι ἐπ' αὐτῶν διὰ τὸ πλησίον τῶν ἀρχῶν, ὡς ἤδη προείρηται, εἶναι αὐτὰ καὶ διὰ τούτων δείκνυσθαι μόνων· εἰ δὲ μὴ εἶεν ὡρισμέναι αἱ ἀρχαί, ἢ <χαλεπὸν ἢ> καὶ <ἀδύνατον> περὶ τούτων ἀπόδειξιν γίνεσθαι. εἰπὼν δὲ περὶ τῶν κατὰ τὰ μαθήματα δείξεων καὶ τὸ χρήσιμον τὸ πρὸς τὰς ἀποδείξεις τῶν ὅρων συστήσας καὶ διὰ τούτου, φησὶν <ὁμοίως τούτοις> καὶ ἐπὶ τῶν λόγων ἔχειν, λόγους λέγων τὰς ἐπιχειρήσεις τὰς ἐν τῷ διαλέγεσθαι.

	δεῖ δέ, φησί, μὴ λανθάνειν ὅτι τὰ δυσεπιχείρητα τῶν προβλημάτων
546.15	<πέπονθέ τι τῶν εἰρημένων.>

Επομένως, πρέπει να ορίζονται με σαφή και απλό τρόπο οι αρχικές έννοιες ώστε οι κατά τα άλλα προφανείς προτάσεις (αιτήματα) να μπορούν να αποδειχθούν.

Ας δούμε τώρα δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της δυναμικής σχέσης, όπως προκύπτουν από τα ίδια τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

2.4.1. Το Βιβλίο VII των Στοιχείων

Αρχικά θα μελετήσουμε το $7^{ο}$ βιβλίο (Αριθμητικό) των «Στοιχείων». Στο βιβλίο αυτό δεν υπάρχουν αιτήματα. Υπάρχουν μόνο ορισμοί και προτάσεις. Αν και πρόκειται για ένα ξεχωριστό κλάδο, τη θεωρία αριθμών, δεν υπάρχουν προτάσεις προφανείς, που να μην έχουν απόδειξη. Ενδεχομένως αυτό να συμβαίνει γιατί έχουν δοθεί οι κατάλληλοι ορισμοί.

ΟΡΟΙ ΒΙΒΛΙΟΥ VII

(α) **Μονάς** ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.
(β) **Ἀριθμὸς** δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
(γ) **Μέρος** ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.
(δ) **Μέρη** δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ
(ε) **Πολλαπλάσιος** δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.
(στ) **Ἄρτιος** ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος. (ζ) **Περισσὸς** δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.
(η) **Ἀρτιάκις ἄρτιος** ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. (θ) **Ἀρτιάκις** δὲ **περισσός** ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. (ι) [**Περισσάκις ἀρτιός** ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν]. (ια) **Περισσάκις** δὲ **περισσὸς** ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.
(ιβ) **Πρῶτος** ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

(ιγ) **Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους** ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. (ιδ)**Σύνθετος** ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος. (ιε) **Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους** ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
(ιστ) **Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν** λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.
(ιζ) Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος **ἐπίπεδος** καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. (ιη) Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος **στερεός** ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. (ιθ) **Τετράγωνος** ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. (κ) **Κύβος** δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.
(κα**) Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν**, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.
(κβ) **Ὅμοιοι** ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. (κγ) **Τέλειος** ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν

Ο ορισμός της μονάδας (α) παρατηρούμε ότι είναι ένας ορισμός που βασίζεται στη φιλοσοφία. Όταν το έν είναι καθορισμένο τότε μπορούμε να κατανοήσουμε τι σημαίνει μονάδα. Αλλιώς θα ήταν «μαθηματικά» άχρηστος. Επίσης σχετίζεται και με τον ορισμό του σημείου ως «μονάδα λαμβάνουσα θέσιν».

Οι ορισμοί (γ) και (δ), ιδιαιτέρως ο τελευταίος, είναι αρκετά ασαφείς. Τι σημαίνει ότι ο α είναι μέρη του β. Σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει $α < β$ και το α να μην καταμετρά τον β. Επίσης στον ορισμό κα΄ της αναλογίας υπάρχει ασάφεια αφού δεν ξεκαθαρίζεται τι σημαίνει η φράση «τα αυτά μέρη».

Το πρόβλημα ξεκινά από την εμμονή του Ευκλείδη να βάζει όλους τους ορισμούς πριν από τις προτάσεις. Όμως κάποιοι ορισμοί για να γίνουν κατανοητοί προϋποθέτουν κάποιες προτάσεις κι έτσι αναγκαστικά οι ορισμοί είναι ασαφείς. Επίσης αξίζει να τονίσουμε πως με τον ορισμό του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών (ιστ΄) σε καμία περίπτωση δεν υπονοεί ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Μάλιστα όπως θα δούμε την αποδεικνύει σε πρόταση με πολύ ενδιαφέροντα και απρόσμενο τρόπο.

Πρόταση	Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων,	*Για δύο άνισους αριθμούς, όταν*

VII.1	ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.	*ανθυφαιρούμε πάντα τον μικρότερο από τον μεγαλύτερο και το υπόλοιπο δεν καταμετρά το προηγούμενο μέχρι να εμφανιστεί μονάδα, τότε οι αρχικοί αριθμοί γίνονται πρώτοι μεταξύ τους.*

Πρόταση VII.2	Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	*Δοθέντων δύο αριθμών, όχι πρώτων μεταξύ τους, να βρεθεί το μέγιστο κοινό μέτρο τους (Μ.Κ.Δ.).*

Απόδειξη(των δύο προτάσεων): (Με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, ο οποίος στα «Στοιχεία» καλείται ανθυφαίρεση των α και β).

Αφαιρώ από το α το β συνεχώς μέχρι η διαφορά να γίνει μικρότερη από το β. Έστω ότι μετά από τις διαδοχικές αυτές αφαιρέσεις φτάνω στη σχέση $\alpha = \kappa_1\beta + \gamma_1$, όπου $\gamma_1 < \beta$. Αυτή η διαδικασία είναι η **ανθυφαίρεση** του α με το β.

Ουσιαστικά σε κάθε ανθυφαίρεση μπορούν να εμφανιστούν δύο αποτελέσματα. Ή το β καταμετρά το α, οπότε $\alpha = \kappa_1\beta$ είτε όχι οπότε προκύπτει και το υπόλοιπο γ_1.

Ας δούμε ένα διάγραμμα ροής της διαδικασίας της ανθυφαίρεσης:

$$\alpha > \beta$$

ή

$$\boxed{\alpha = \kappa_1 \cdot \beta} \qquad \alpha = \kappa_1 \cdot \beta + \gamma_1 \quad , \quad \gamma_1 < \beta$$

ΤΕΛΟΣ

ή

$$\boxed{\beta = \kappa_2 \cdot \gamma_1} \qquad \beta = \kappa_2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \quad , \quad \gamma_2 < \gamma_1$$

ΤΕΛΟΣ

ή

....

Δηλαδή σε κάθε βήμα είτε ολοκληρώνεται η ανθυφαίρεση με την εύρεση του κοινού μέτρου, είτε δημιουργείται ένα καινούριο υπόλοιπο και η διαδικασία συνεχίζεται.

$$\alpha = \kappa_1 \cdot \beta + \gamma_1 \quad , \quad \gamma_1 < \beta$$

$$\beta = \kappa_2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \quad , \quad \gamma_2 < \gamma_1$$

$$\gamma_1 = \kappa_3 \cdot \gamma_2 + \gamma_3 \quad , \quad \gamma_3 < \gamma_2$$

⋮

Δημιουργείται έτσι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία: $\alpha > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \ldots$

Εξ ορισμού, ο μόνος τρόπος για να τελειώσει η διαδικασία είναι σε κάποιο στάδιο το υπόλοιπο να διαιρεί ακριβώς το αμέσως προηγούμενό του. Η ακολουθία των υπολοίπων έχει ελάχιστο στοιχείο κάποιο γ_ν (από την αρχή της επαγωγής, σύμφωνα με την οποία κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο), άρα η διαδικασία σταματάει (ολοκληρώνεται). Επομένως $\gamma_{\nu-1} = \kappa_{\nu+1} \cdot \gamma_\nu$.

Έστω ότι η διαδικασία για τα α και β σταματάει στο βήμα $\gamma_2 = \kappa_4 \cdot \gamma_3$.

Ισχυρισμός: $\gamma_3 = \text{ΜΚΔ}(\alpha , \beta)$

Το γ_3 διαιρεί τα α και β. Πράγματι

$$\gamma_1 = \kappa_3 \cdot (\kappa_4 \cdot \gamma_3) + \gamma_3 = (\kappa_3\kappa_4 + 1)\, \gamma_3$$

και επομένως

$$\beta = \kappa_2 \cdot [(\kappa_3\kappa_4 + 1)\, \gamma_3] + \kappa_4 \cdot \gamma_3 = [\kappa_2 \cdot (\kappa_3\kappa_4 + 1) + \kappa_4]\cdot \gamma_3,$$

δηλαδή το γ_3 διαιρεί το β και τέλος

$$\alpha = \kappa_1 \cdot [\kappa_2 \cdot (\kappa_3\kappa_4 + 1) + \kappa_4]\cdot \gamma_3 + (\kappa_3\kappa_4 + 1)\, \gamma_3$$

δηλαδή το γ_3 διαιρεί και το α.

Έστω ότι γ είναι ένας κοινός διαιρέτης των α και β. Τότε από το πρώτο βήμα ο γ διαιρεί τον γ_1, από το δεύτερο βήμα διαιρεί επομένως τον γ_2 και τελικά διαιρεί τον γ_3. Άρα $\gamma \leq \gamma_3$.

Αν $\alpha > \beta$ είναι δύο αριθμοί, θέτουμε ως $\text{Ανθ}(\alpha , \beta) = [\kappa_1 , \kappa_2 , \kappa_3 , \ldots]$.

Αν $\gamma_\nu = 1$, οι α και β λέγονται σχετικώς πρώτοι.

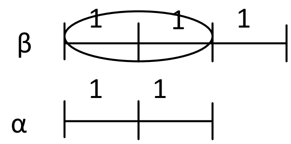
Πρόταση VII.3	Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	*Δοθέντων τριών αριθμών, όχι πρώτων μεταξύ τους ανά δύο, να βρεθεί το μέγιστο κοινό μέτρο τους (Μ.Κ.Δ.).*

Πρόταση VII.4	Ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.	*Για δύο οποιουσδήποτε αριθμούς ο μικρότερος είναι είτε μέρος είτε μέρη του μεγαλύτερου.*

Η πρόταση αυτή μοιάζει τετριμμένη αφού από τον ορισμό του μέρους και του μέρη είναι προφανής. Όμως την αποδεικνύει και μάλιστα σχολαστικά. Ουσιαστικά εξηγεί τους ορισμούς (γ) και (δ) υπό το πρίσμα του Ευκλείδειου αλγορίθμου.

Απόδειξη: Έστω α < β. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

i) α και β σχετικώς πρώτοι. Τότε το α είναι μέρη του β. Πράγματι, ΜΚΔ(α , β) =1, άρα α = 1 · α και β = 1 · β.



Επομένως το α είναι π.χ. 2 από τα 3 **μέρη** του β (μ από τα ν μέρη του β, όπου μ,ν πρώτοι μεταξύ τους).

ii) Αν οι α και β δεν είναι σχετικώς πρώτοι, τότε ή το α καταμετρά το β, οπότε ΜΚΔ(α , β) = α και προφανώς το α είναι μέρος του β, ή το α δεν καταμετρά το β οπότε ΜΚΔ(β , α) = κ > 1. Τότε όμως όπως και πριν β = κ · μ και α = κ · ν με ν < μ, άρα αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το κ, το β θα αποτελείται από μ μονάδες εκ των οποίων τα ν μέρη θα είναι το α. Άρα το α είναι μέρη του β.

Τώρα μπορούμε να γράψουμε τον ορισμό της αναλογίας με σύγχρονη ορολογία.

Ορισμός (κα΄): Έστω α, β, γ, δ αριθμοί. Τότε $\alpha/_{\beta} = \gamma/_{\delta} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha = \mu\kappa \\ \beta = \nu\kappa\end{matrix}\right\}\ \kappa\alpha\iota\ \left\{\begin{matrix}\gamma = \mu\kappa' \\ \delta = \nu\kappa'\end{matrix}\right\}$, όπου κ = ΜΚΔ(α , β) και κ΄ = ΜΚΔ(γ , δ) για κάποιους αριθμούς μ και ν.

Παρατήρηση: Αν κ = ΜΚΔ(α , β) και α = μ · κ, β = ν · κ, τότε οι μ και ν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Για την απόδειξη των ιδιοτήτων των αναλογιών ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί δύο προτάσεις[10] οι οποίες ούτε καν διατυπώνονται πουθενά.

Πρόταση Α	Αν $\alpha/_{\beta} = \alpha'/_{\beta'}\ \kappa\alpha\iota\ \alpha/_{\beta} = \alpha''/_{\beta''}$, τότε $\alpha'/_{\beta'} = \alpha''/_{\beta''}$

Απόδειξη: Έστω κ = ΜΚΔ(α , β), κ΄ = ΜΚΔ(α΄, β΄) και κ΄΄ = ΜΚΔ(α΄΄ , β΄΄). Τότε έχουμε: $\begin{cases}\alpha = \mu\kappa \\ \beta = \nu\kappa\end{cases}$ για κάποιους αριθμούς μ και ν και από την πρώτη αναλογία θα

[10] Οι προτάσεις αυτές διατυπώθηκαν και αποδείχτηκαν σε αυτή τη μορφή από τον κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη στις διαλέξεις του την άνοιξη του 2010 στα πλαίσια του μαθήματος της Ιστορίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, στο διαπανεπιστημιακό μεταπτυχιακό πρόγραμμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των μαθηματικών του Μαθηματικού τμήματος του ΕΚΠΑ.

είναι $\begin{cases}\alpha' = \mu\kappa' \\ \beta' = \nu\kappa'\end{cases}$. Επίσης από τη δεύτερη αναλογία θα είναι και $\begin{cases}\alpha'' = \mu\kappa'' \\ \beta'' = \nu\kappa''\end{cases}$. Τότε όμως είναι προφανές το ζητούμενο.

Πρόταση Β	Αν $\alpha/\beta = \alpha'/\beta$, τότε α = α΄.

Απόδειξη: Έστω κ = ΜΚΔ(α , β) και κ΄ = ΜΚΔ(α΄ , β). Τότε $\begin{cases}\alpha = \mu\kappa \\ \beta = \nu\kappa\end{cases}$ και $\begin{cases}\alpha' = \mu\kappa' \\ \beta = \nu\kappa'\end{cases}$. Άρα ν · κ = ν · κ΄, δηλαδή κ = κ΄ . Άρα και α = α΄.

1η ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

(αποδεικνύονται απευθείας με τον ορισμό)

Κοινό χαρακτηριστικό των προτάσεων Α, Β, Σύνθεσης λόγου(5, 6, **12**), Διαίρεσης λόγου (7, 8, **11**) και εναλλάξ (9, 10, **13**) είναι ότι χρησιμοποιούν για την απόδειξή τους τον ορισμό της αναλογίας (κα΄). Πιθανότατα, πριν την εισαγωγή του ορισμού αυτού θα αποτελούσαν τα αιτήματα της θεωρίας λόγων αριθμών. Με τη διατύπωση όμως του κατάλληλου ορισμού αποδείχθηκαν και έτσι το κεφάλαιο δεν έχει πλέον αιτήματα.

► **Προτάσεις VII 5, 6, 12 (σύνθεση λόγου)**

VII.5 Ἐὰν ἀριθμός ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ,
καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

VII.6 Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ,
καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

VII.12 Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων
πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Αν $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2$ τότε $\alpha_1 + \alpha_2/\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1/\beta_1$

Απόδειξη: Έστω κ_1 = ΜΚΔ(α_1 , β_1) και κ_2 = ΜΚΔ(α_2 , β_2). Τότε

$\alpha_1 = \mu \cdot \kappa_1$ και $\beta_1 = \nu \cdot \kappa_1$ και $\alpha_2 = \mu \cdot \kappa_2$ και $\beta_2 = \nu \cdot \kappa_2$

και επομένως $\alpha_1 + \alpha_2 = \mu \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$ και $\beta_1 + \beta_2 = \nu \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$.

Επίσης αφού τα μ και ν είναι πρώτοι μεταξύ τους έπεται ότι το $\kappa_1 + \kappa_2$ είναι ΜΚΔ των $\alpha_1 + \alpha_2$ και $\beta_1 + \beta_2$, άρα ισχύει το ζητούμενο.

Γενίκευση: Μπορούμε να δούμε επίσης ότι αν $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \cdots = \alpha_\nu/\beta_\nu$ τότε

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu/\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu = \alpha_1/\beta_1$$

Αν τώρα θεωρήσουμε στη γενίκευση όλους τους λόγους ίσους με α/β, τότε προκύπτει ότι: $\nu\alpha/\nu\beta = \alpha/\beta$ για κάθε ν = 1, 2, 3, …, δηλαδή η

(***Πρόταση VII.17***: Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν).

Ειδικότερα, για α = 1: $1/\beta = \nu/\nu\beta$, δηλαδή η

(***Πρόταση VII.15***: Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον).

► Προτάσεις VII 7, 8, 11 (διαίρεση λόγου)

VII.7 Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

VII.8 Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

VII.11 Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Είναι όπως η σύνθεση λόγου μόνο που μιλά για διαφορές αριθμών.

► Προτάσεις VII 9, 10, 13 (εναλλάξ)

VII.9 Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

VII.10 Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

VII.13 Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ τότε $\alpha/\gamma = \beta/\delta$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της αναλογίας έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha = \mu\kappa \\ \beta = \nu\kappa\end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases}\gamma = \mu\kappa' \\ \delta = \nu\kappa'\end{cases}$$

όπου κ = ΜΚΔ(α , β) και κ΄ = ΜΚΔ(γ, δ). Έπομένως:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha = \mu\kappa \\ \gamma = \mu\kappa'\end{cases} \xrightarrow{VII.17} \alpha/\gamma = \kappa/\kappa' \\ \\ \text{και} \\ \\ \begin{cases}\beta = \nu\kappa \\ \delta = \nu\kappa'\end{cases} \xrightarrow{VII.17} \beta/\delta = \kappa/\kappa'\end{array}\right\} \underset{\Pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\eta\ A}{\Longrightarrow} \alpha/\gamma = \beta/\delta$$

2η ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

(αποδεικνύονται χωρίς τη χρήση του ορισμού)

Οι υπόλοιπες προτάσεις του έβδομου βιβλίου αποδεικνύονται βασιζόμενες στις προτάσεις της 1ης ομάδας.

► ***Πρόταση VII.14*** (Δι’ ίσου)

Αν $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$ $και$ $\beta/\gamma = \beta'/\gamma'$, τότε $\alpha/\gamma = \alpha'/\gamma'$

(Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται).

Απόδειξη:

Είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha/\beta = \alpha'/\beta' \overset{\varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi}{\Longrightarrow} \alpha/\alpha' = \beta/\beta' \\ \\ \quad\text{και} \\ \\ \beta/\gamma = \beta'/\gamma' \overset{\varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi}{\Longrightarrow} \beta/\beta' = \gamma/\gamma'\end{array}\right\} \underset{\Pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\eta\ A}{\Longrightarrow} \alpha/\alpha' = \gamma/\gamma' \quad \overset{\varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi}{\Longrightarrow} \quad \alpha/\gamma = \alpha'/\gamma'$$

► ***Πρόταση VII.16*** (Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

Αν α, β είναι αριθμοί τότε α · β = β · α

(Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται).

Απόδειξη: Είναι από την VII.15 $1/_{\beta} = {}^{\alpha}/_{\alpha\beta}$ και χρησιμοποιώντας την εναλλάξ ${}^{1}/_{\alpha} = {}^{\beta}/_{\alpha\beta}$. Επίσης ${}^{1}/_{\alpha} = {}^{\beta}/_{\beta\alpha}$ πάλι από την VII.15. Άρα, από την Πρόταση Α παίρνουμε: ${}^{\beta}/_{\alpha\beta} = {}^{\beta}/_{\beta\alpha}$ και από την Πρόταση Β είναι αβ = βα.

► ***Πρόταση VII.18***

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας,
οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

$${}^{\alpha}/_{\beta} = {}^{\gamma\alpha}/_{\gamma\beta} = {}^{\alpha\gamma}/_{\beta\gamma}$$

► ***Πρόταση VII.19***

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς
ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ·
καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου,
οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Δηλαδή:

$${}^{\alpha}/_{\beta} = {}^{\gamma}/_{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\delta = \beta\gamma$$

Απόδειξη:

$$\begin{matrix} {}^{\alpha}/_{\beta} = {}^{\alpha\delta}/_{\beta\delta} \\ {}^{\gamma}/_{\delta} = {}^{\beta\gamma}/_{\beta\delta} \end{matrix} \xRightarrow{\text{Πρόταση Α}} {}^{\alpha\delta}/_{\beta\delta} = {}^{\beta\gamma}/_{\beta\delta} \xRightarrow{\text{Πρόταση Β}} \alpha\delta = \beta\gamma$$

Το αντίστροφο είναι προφανές.

Αναπτύξαμε τις προτάσεις 1 – 19. Το δεύτερο μισό του βιβλίου αποτελείται από προτάσεις που προκύπτουν από αυτές και δεν έχει νόημα να συνεχίσουμε την παρουσίαση. Η δομή όμως του έβδομου βιβλίου αποτελεί ένα καλό παράδειγμα για τη σχέση ορισμών και αιτημάτων. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει αυτή τη δομή καθώς και τη δομή που υπήρχε πριν τη διατύπωση του ορισμού της αναλογίας. Το σχήμα αυτό εξηγεί γιατί στο έβδομο βιβλίο δεν υπάρχουν αιτήματα.

Παλιά δομή	**Δομή VII**
Λείπει ο ορισμός της αναλογίας	Ορισμός της αναλογίας
1η ομάδα προτάσεων Αιτήματα	1η ομάδα προτάσεων Αποδεικνύονται με τον ορισμό
2η ομάδα προτάσεων Αποδείξιμες προτάσεις από τα αιτήματα	2η ομάδα προτάσεων Αποδεικνύονται χωρίς τη χρήση του ορισμού (όπως και στην παλιά θεωρία)

Το παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης στα Τοπικά έχει το ανάλογό του στη σύνθεση λόγου (για αριθμούς): $\alpha/\beta = \gamma\alpha/\gamma\beta$, το οποίο δεν μπορούσε να αποδειχθεί χωρίς τον ορισμό της αναλογίας, ο οποίος όμως χρειάζεται τον Ευκλείδειο αλγόριθμο που δεν είναι καθόλου προφανής. Όταν αυτά διατυπώθηκαν, η απόδειξη της σύνθεσης λόγου έγινε απλό να αποδειχθεί και έπαψε να είναι αίτημα.

2.4.2. Το Βιβλίο V των Στοιχείων

Το δεύτερο σημείο από το οποίο γίνεται φανερή αυτή η δυναμική σχέση αιτημάτων και ορισμών είναι το πέμπτο βιβλίο των «Στοιχείων». Σε αυτό παρουσιάζεται η θεωρία λόγων μεγεθών, όπως αυτή διατυπώθηκε από τον Εύδοξο. Πριν από αυτή τη θεωρία δεν υπήρχε διαχωρισμός στη θεωρία λόγων αριθμών και μεγεθών. Και οι δύο βασίζονταν στη Πυθαγόρεια θεωρία της ίσης ανθυφαίρεσης. Στα «Στοιχεία» αντικείμενο μελέτης είναι τόσο οι αριθμοί, δηλαδή οι ακέραιοι, όσο και τα μεγέθη, δηλαδή οι συνεχείς ποσότητες. Για τους Πυθαγόρειους για όλα τα ομοειδή πράγματα μπορεί να βρεθεί ένα κοινό μέτρο (στη βάση του προσδιορισμού του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ακεραίων με τον λεγόμενο ευκλείδειο αλγόριθμο). Η ανακάλυψη λοιπόν της ασυμμετρίας, δηλαδή της ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών, οδήγησε στον διαχωρισμό τους από τους αριθμούς. Όπως διαβάζουμε σε σχόλια στο βιβλίο X των «Στοιχείων», το οποίο θεωρείται ότι είναι του Θεαίτητου, δηλαδή προγενέστερου του Ευδόξου,

[0.1.1 – 7]

Ὁ σκοπὸς τοῦ ι΄ βιβλίου τῷ Εὐκλείδῃ διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων· **οὐ γὰρ ταὐτὸν ἀσύμμετρα καὶ ἄλογα, διότι τὰ μὲν φύσει ἔστιν, τὰ δὲ ἄλογα καὶ ῥητὰ θέσει.** εἰ γὰρ καὶ τὴν τοῦ τετραγώνου διάμετρον φύσις ἀσύμμετρον ποιεῖ πρὸς τὴν πλευράν, ἀλλὰ κατὰ τοὺς ἐν ἑαυτῇ ἐκείνου λόγους ποιεῖ καὶ οὐ κατὰ τὸ ἐπιτυχόν· ὥστε οὐδὲν τῶν ἀσυμμέτρων τῇ φύσει

και πιο κάτω

[10.1.21 – 52]

ἦλθον **δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως**. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μὲν καὶ ὁποιονοῦν ἀριθμὸν καθ' ὁποιασοῦν τομὰς διαιρούμενον μόριόν τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, πᾶν δὲ μέγεθος ἐπ' ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόριον, ὃ διὰ τὸ εἶναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέξεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ' ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μόρια, ὧν ἕκαστον ἐπ' ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἁπλῶς τὸ μὲν μέγεθος κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι μετέχειν τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δὲ ἀριθμὸν κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου. ἐπεὶ οὖν τὰ μέτρα τῶν μετρουμένων ἐλάττονα εἶναι προσήκει, μετρεῖται δὲ πᾶς ἀριθμός, ἀνάγκη πάντων ἔλαττόν τι εἶναι τὸ μέτρον. ὥστε καὶ τῶν μεγεθῶν, εἰ πάντα μετρεῖται κοινῷ μέτρῳ, ἀνάγκη εἶναί τι ἐλάχιστον. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν ἔστιν· πεπέρασται γάρ, ὡς προείρηται· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν οὐκέτι. οὐκ ἄρα κοινὸν πάντων τι μεγεθῶν μέτρον.

τοῦτο οὖν καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνωκότες συμμετρίαν ὡς ἦν τοῖς μεγέθεσι δυνατόν, ἐξεῦρον. πάντα γὰρ **τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ μέτρον μεγέθη σύμμετρα ὠνόμασαν, τὰ δὲ οὐχ ὑποπίπτοντα τῷ αὐτῷ μέτρῳ ἀσύμμετρα, καὶ τούτων άλιν, ὅσα μὲν ἄλλῳ τινὶ κοινῷ μετρεῖται μέτρῳ, ἀλλήλοις σύμμετρα, ὅσα δὲ μή, ἀσύμμετρα, ἐκείνοις. καὶ οὕτω θέσει λαμβανομένων τῶν μέτρων πάντα εἰς συμμετρίας ἀνήγαγον διαφόρους, εἰ δὲ εἰς διαφόρους, καὶ ὡς πρός τινα οὐ πάντα σύμμετρα εἶναι δύναται. ῥητὰ δὲ πάντα καὶ πάντα ἄλογα δυνατὸν εἶναι ὡς πρός τι· διὸ τὸ μὲν σύμμετρον φύσει ἂν εἴη αὐτοῖς καὶ τὸ ἀσύμμετρον, τὸ δὲ ῥητὸν καὶ ἄλογον θέσει.**

και λίγο πιο κάτω

[10.1.70 – 79]

Ὅτι δὲ χρήσιμος ἡ τούτων θεωρία, μὴ καὶ περιττὸν λέγειν. **τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν, καὶ ἴσως ᾐνίττοντο, ὅτι πᾶν τὸ ἄλογον ἐν τῷ παντὶ καὶ ἄλογον**

καὶ ἀνείδεον κρύπτεσθαι φιλεῖ, καὶ εἴ τις ἂν ψυχὴ ἐπιδράμοι τῷ τοιούτῳ εἴδει τῆς ζωῆς πρόχειρον καὶ φανερὸν τοῦτο ποιήσηται, εἰς τὸν τῆς γενέσεως ὑποφέρεται πόντον καὶ τοῖς ἀστάτοις ταύτης κλύζεται ῥεύμασιν. **τοιοῦτον σέβας καὶ οὗτοι εἶχον οἱ ἄνδρες περὶ τὴν τῶν ἀλόγων θεωρίαν.**

Βλέπουμε ότι οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την αρρητότητα των μεγεθών, πιθανά με την ανακάλυψη της αρρητότητας του λόγου διαγωνίου προς πλευρά σε ένα τετράγωνο και προσπάθησαν να αναπτύξουν μια θεωρία για τους άρρητους αριθμούς. Μάλιστα, αυτή τη θεωρία τους την βάσιζαν στην άπειρη ανθυφαίρεση.

Αν α και β (ομοειδή) μεγέθη, με $α > β$, τότε ορίζεται η ανθυφαίρεση του α με το β. Ξέρουμε πώς να τοποθετήσουμε το β πάνω στο α και να βρούμε τη διαφορά τους (πρόταση Ι.3 των Στοιχείων «Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν»). Τελικά υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: Είτε αφαιρώντας διαδοχικά το β από το α στο τέλος θα «καλυφθεί» ολόκληρο το α, είτε θα περισσέψει ένα τμήμα $γ < β$. Δηλαδή,

$$\text{ή} \quad α = κ \cdot β \qquad \text{ή} \qquad α = κ \cdot β + γ \ , \ \text{με } γ < β.$$

(Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν το β ΔΕΝ είναι απείρως μικρό ως προς το α, δηλαδή δεν ισχύει ότι όλα τα πολλαπλάσια του β είναι μικρότερα του α – $β, 2β, 3β, \ldots, κβ, \ldots < α$). Επομένως η διαδικασία γίνεται όπως πριν για τους αριθμούς. Όμως δεν μπορεί να αποκλειστεί η περίπτωση της άπειρης ανθυφαίρεσης, αφού δεν μιλάμε για αριθμούς και δεν ισχύει η αρχή της επαγωγής για τα μεγέθη!

Πρόταση Χ.2: Αν $α > β$ μεγέθη, ώστε να ορίζεται καλώς η ανθυφαίρεση του α με το β και η Ανθ(α , β) είναι άπειρη, τότε τα α και β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Απόδειξη: (με σύγχρονη ορολογία – όχι αυτή που υπάρχει στα Στοιχεία)[11]

Ας υποθέσουμε ότι τα α και β είναι σύμμετρα. Τότε υπάρχουν αριθμοί m, n και μέγεθος γ (ομοειδές των α και β) ώστε $α = mγ$ και $β = nγ$, $m > n$. Όμως η Ανθ(m , n) είναι πεπερασμένη, αφού οι m, n είναι αριθμοί. Έστω ότι

$$\left.\begin{aligned} m &= κ_1 \cdot n + δ_1 \\ n &= κ_2 \cdot δ_1 + δ_2 \\ δ_1 &= κ_3 \cdot δ_2 + δ_3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Πολλαπλασιάζουμε με } γ} \left\{\begin{aligned} m \cdot γ &= κ_1 \cdot n \cdot γ + δ_1 \cdot γ \\ n \cdot γ &= κ_2 \cdot δ_1 \cdot γ + δ_2 \cdot γ \\ δ_1 \cdot γ &= κ_3 \cdot δ_2 \cdot γ + δ_3 \cdot γ \end{aligned}\right.$$

[11] Η απόδειξη αυτή όπως και η επόμενη προέρχεται από τις παραδόσεις του κ. Στυλιανού Νεγρεπόντη στις διαλέξεις του την άνοιξη του 2010 Μαθηματικού τμήματος του ΕΚΠΑ.

$\delta_2 = \kappa_4 \cdot \delta_3$ $\qquad\qquad$ $\delta_2 \cdot \gamma = \kappa_4 \cdot \delta_3 \cdot \gamma$

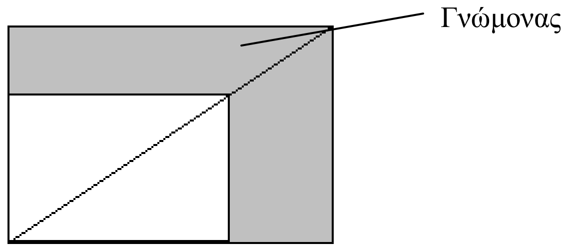
Άρα η Ανθ(α , β) = $[\kappa_1 , \kappa_2 , \kappa_3 , \kappa_4]$ δηλαδή είναι πεπερασμένη. Άτοπο!

Μια προσπάθεια ανακατασκευής της απόδειξης της άπειρης ανθυφαίρεσης διαγωνίου και πλευράς ενός τετραγώνου, Ανθ(δ , α) = $[1 , \overline{2}]$ ακολουθεί.

Απόδειξη

Καταρχάς θα χρειαστούμε την έννοια του γνώμονα, όπως υπάρχει στο βιβλίο ΙΙ των «Στοιχείων».

Όρος ΙΙ.2	Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.	*Σε κάθε παραλληλόγραμμο το παραλληλόγραμμο γύρω από τη διάμετρο συν τα δύο παραπληρώματα λέγεται γνώμονας.*



Γνωρίζουμε ότι για ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\delta^2 = 2\alpha^2$. Αλλάζουμε το πλαίσιο θεώρησης αυτής της σχέσης.

$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, (1) και $\Gamma_o = \alpha^2$ ο πρώτος γνώμονας

Είναι δ > α, άρα γράφουμε $\delta = \alpha + \gamma_1$ (με χρήση της Πρότασης Ι.3)

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε

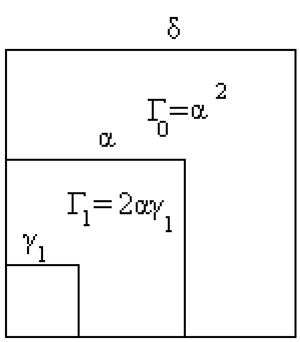
$$(\alpha + \gamma_1)^2 = \alpha^2 + \alpha^2$$

και από την πρόταση ΙΙ.4, όπου αποδεικνύεται με γεωμετρικό τρόπο η γνωστή ταυτότητα του τετραγώνου αθροίσματος,

$$\alpha^2 + \gamma_1^2 + 2\alpha\gamma_1 = 2\alpha^2$$

$$\alpha^2 = 2\alpha\gamma_1 + \gamma_1^2 \qquad (2)$$

Εμφανίζεται έτσι ο γνώμονας $\Gamma_1 = 2\alpha\gamma_1$.



Επίσης $\alpha^2 > \gamma_1^2$ και επομένως $\alpha > \gamma_1$. Συμπληρώνεται επομένως η πρώτη ανθυφαιρετική σχέση

$$\delta = \alpha + \gamma_1 \text{ , με } \gamma_1 < \alpha$$

Όμως από την (2) προκύπτει ότι $\alpha^2 > 2\alpha\gamma_1$, άρα $\alpha > 2\gamma_1$. Έτσι γράφουμε $\alpha = 2\gamma_1 + \gamma_2$ και αντικαθιστούμε στην (2).

$$(2\gamma_1 + \gamma_2)^2 = 2(2\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_1 + \gamma_1^2$$

$$4\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2 = 4\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^2$$

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \qquad (3)$$

Εμφανίζεται ο γνώμονας $\Gamma_2 = 2\gamma_1\gamma_2$.

Επίσης $\gamma_1^2 > \gamma_2^2$ και επομένως $\gamma_1 > \gamma_2$. Συμπληρώνεται επομένως η δεύτερη ανθυφαιρετική σχέση

$$\alpha = 2 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \text{ , με } \gamma_2 < \gamma_1$$

Όμοια βρίσκουμε ότι εξακολουθεί η ίδια διαδικασία οπότε έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Αυτή η ανακάλυψη των Πυθαγορείων οδήγησε, όχι όπως κάποιοι νομίζουν σε κρίση και διάλυση της Πυθαγόρειας σχολής, αλλά σε εγρήγορση και όξυνση της προσπάθειας κατανόησης αυτού του νέου ευρήματος. Στο βιβλίο X των «Στοιχείων», που αποδίδεται στον Θεαίτητο, αναφέρονται όλα τα ευρήματα των Πυθαγορείων σχετικά με την αρρητότητα μεγεθών. Εκεί ορίζεται και η διαδικασία της ανθυφαίρεσης μεγεθών που περιγράψαμε.

Εκείνο στο οποίο έχει ενδιαφέρον να σταθούμε είναι ότι πριν τον Εύδοξο υπήρχε θεωρία λόγων μεγεθών που βασιζόταν στην ίση ανθυφαίρεση. Η πρόταση VI.1 των «Στοιχείων» είναι ουσιαστικά αυτή που αναφέρει ο Αριστοτέλης (α/β = Α/Β)(«Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις»), αλλά αποδεικνύεται από τον ορισμό της αναλογίας του Ευδόξου. Το 6ο βιβλίο είναι εφαρμογή του 5ου βιβλίου στη γεωμετρία (θεωρία ομοιότητας) και αναφέρεται στις εφαρμογές χωρίων καθ’ υπερβολή και κατ’ έλλειψη χρησιμοποιώντας και λόγους. Όμως ο ορισμός της αναλογίας του βιβλίου V χρησιμοποιείται, ουσιαστικά μόνο μια φορά στο VI, οι γνώσεις του οποίου είναι παλαιότερες από τον Εύδοξο. Απλά ο Ευκλείδης το εντάσσει στα «Στοιχεία» χρησιμοποιώντας τον καινούριο – καλύτερο ορισμό του Ευδόξου.

Ακολουθώντας πάντα το χωρίο των Τοπικών μπορούμε να πούμε ότι υπήρχαν δύο στάδια – θεωρίες λόγων μεγεθών πριν τον Εύδοξο. Ένα πρώτο στάδιο χωρίς ορισμό αναλογίας και ένα δεύτερο στάδιο, όπου δύο λόγοι μεγεθών είναι ίσοι όταν έχουν ίση ανθυφαίρεση. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ αν και μόνο αν Ανθ(α,β) = Ανθ(γ,δ). Ο Ευκλείδης τελικά χρησιμοποιεί το τρίτο, μεταγενέστερο στάδιο, που οφείλεται στον Εύδοξο. Η ανθυφαίρεση ήταν βασικό στοιχείο της θεωρίας λόγων στην περίοδο του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Όταν όμως λίγα χρόνια αργότερα εμφανίστηκε ο Εύδοξος με μια νέα θεωρία λόγου μεγεθών και κυρίως με έναν καλύτερο ορισμό αναλογίας επικράτησε η δική του. Ο Εύδοξος ενδιαφερόταν για υπολογισμούς εμβαδών κ.τ.λ. Οι προσεγγίσεις του με τη μέθοδο της εξάντλησης δεν ήταν ανθυφαιρετικές άρα η δεύτερη θεωρία δεν βοηθούσε. Γι αυτό έφτιαξε την δική του θεωρία και η ενδιάμεση θεωρία γρήγορα ξεχάστηκε. Ο Ευκλείδης, λοιπόν, παρέλειψε πολλά πράγματα για την ανθυφαίρεση και χρησιμοποίησε για το βιβλίο V των Στοιχείων τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου. Όμως, στο βιβλίο VII (αριθμητικό) χρησιμοποιείται μια θεωρία λόγων αριθμών που βασίζεται στην ίση ανθυφαίρεση, όπως είδαμε και επίσης ίχνη της μεθόδου αυτής υπάρχουν και σε άλλα βιβλία. Ας δούμε κάποια στοιχεία του βιβλίου V.

ΟΡΙΣΜΟΙ

	(α) Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.
	(β) Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.
(γ) **Λόγος** ἐστὶ δύο μεγεθῶν **ὁμογενῶν** ἡ κατὰ **πηλικότητά** ποια σχέσις.	
(δ) **Λόγον** ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.	***Ιδιότητα Ευδόξου Αρχιμήδη*** *Τα α και β έχουν λόγο αν για κάποιους φυσικούς μ και ν είναι μα > β και νβ > α.*
(ε)Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς	***Ορισμός αναλογίας Ευδόξου*** *Έστω α, β, γ, δ κατάλληλα μεγέθη. Θα λέμε ότι*

τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.	$\alpha/\beta = \gamma/\delta$ *αν και μόνο αν για κάθε μ και ν αριθμούς ισχύουν οι συνθήκες:* ▪ *αν να > μβ τότε και νγ > μδ* ▪ *αν να = μβ τότε και νγ = μδ* ▪ *αν να < μβ τότε και νγ < μδ*
	(στ) Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω
(ζ) Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.	*Μπορεί να παρεμβληθεί μεταξύ των δύο ρητών ένας τρίτος ρητός τότε είναι άνισοι οι λόγοι: Είναι* $\alpha/\beta > \gamma/\delta$ *αν υπάρχουν αριθμοί μ και ν ώστε μα > νβ και μγ < νδ.*
	(η) Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.
	(θ) Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.
	(ι) Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.
	(ια) Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.
	(ιβ) Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

	(ιγ) Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.
	(ιδ) Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.
	(ιε) Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.
	(ιστ) Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.
	(ιζ) Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι ὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.
	(ιη) Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Ο ορισμός V.4 (Ιδιότητα Ευδόξου – Αρχιμήδη) μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή: «*Δεν υπάρχει λόγος μεγεθών* α/β *ώστε* $\nu/1 < \alpha/\beta$ *για κάθε ν = 1, 2, …*». Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα ομογενή μεγέθη α και β και ας πάρουμε όλα τα πολλαπλάσια του β (β, 2β, 3β, …, νβ, …). Αν υποθέσουμε ότι νβ < α για κάθε ν τότε δεν ικανοποιείται ο ορισμός V.4. Επομένως η ιδιότητα του Ευδόξου ταυτίζεται με το ότι το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

Ας δούμε τώρα τον ορισμό της αναλογίας. Το πραγματικό του περιεχόμενο αποσαφηνίστηκε περί το 1870, όταν ορίστηκαν με αυστηρό τρόπο οι πραγματικοί αριθμοί ως τομές Dedekind.

Φυσικοί αριθμοί: Υπάρχουν οι πράξεις της πρόσθεσης (+) και του πολλαπλασιασμού (·) και διάταξη.

Ακέραιοι: Υπάρχει ότι και στους φυσικούς και επιπλέον υπάρχει το 0 και η αφαίρεση (αρνητικοί αριθμοί).

Ρητοί αριθμοί: Ορίζεται το μ/ν ως ζεύγος ακεραίων με ν ≠ 0. Δηλαδή ένας ρητός είναι μια κλάση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}x(\mathbb{Z}\setminus\{0\})/\sim$

Ορισμός: Μια τομή Dedekind είναι ένα ζεύγος (P , R) ώστε $P \cup R = \mathbb{Q}$, $P \neq \emptyset$, $R \neq \emptyset$ και αν $x \in P$ $\kappa\alpha\iota$ $y \in R$, τότε x < y.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός των τομών Dedekind είναι συνολοθεωρητικός και αναφέρεται μόνο στη διάταξη των ρητών.

Στα σύγχρονα μαθηματικά ο ορισμός των πραγματικών αριθμών είναι : «Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο των τομών Dedekind».

Με την έννοια αυτή ο **ορισμός V.5** (ορισμός αναλογίας) λαμβάνει την εξής μορφή:

Έστω α, β δύο μεγέθη κατάλληλα και θεωρώ το λόγο α/β. Η τομή Dedekind η οποία ορίζεται από το λόγο αυτό είναι το ζεύγος (P(α,β) , R(α,β)) ως εξής:

$$P(\alpha,\beta) = \left\{\mu/\nu : \mu/\nu \leq \alpha/\beta\right\} \quad \text{και} \quad R(\alpha,\beta) = \left\{\mu/\nu : \mu/\nu > \alpha/\beta\right\}$$

Τότε

$$\alpha/\beta = \gamma/\delta \quad \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \alpha\nu \begin{cases} P(\alpha,\beta) = P(\gamma,\delta) \\ R(\alpha,\beta) = R(\gamma,\delta) \end{cases}.$$

Παρατήρηση: Ο Εύδοξος λέει επομένως ότι κάθε λόγος α/β ορίζει μια τομή Dedekind. Δεν υπάρχει όμως ο ισχυρισμός για το αντίστροφο. Ότι κάθε τομή Dedekind ορίζει έναν (πραγματικό) αριθμό. Από αυτόν τον ισχυρισμό προκύπτει η ιδιότητα του supremum και με απλό τρόπο προκύπτει η ιδιότητα Ευδόξου – Αρχιμήδη.

Έστω ότι το σύνολο Α = {ν/1: ν = 1, 2, 3, …} είναι άνω φραγμένο. Τότε υπάρχει το supremum του συνόλου αυτού, έστω το α/β. Θεωρούμε το $^{\alpha}/_{\beta} - 1 = {}^{\alpha-\beta}/_{\beta}$ το οποίο δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου Α. Υπάρχει επομένως κάποιο μ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta} < \frac{\mu}{1}$$

Τότε όμως

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\mu}{1} + 1 = \frac{\mu+1}{1}$$

και το τελευταίο κλάσμα προφανώς ανήκει στο σύνολο Α και είναι μεγαλύτερο από το supremum του συνόλου. Άτοπο!

Θεμελιώδης Πρόταση V.8	Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.	Αν α > β τότε $^{\alpha}/_{\gamma} > {}^{\beta}/_{\gamma}$

Ισοδύναμη διατύπωση: Αν $^{\alpha}/_{\gamma} = {}^{\beta}/_{\gamma}$, τότε α = β.

Απόδειξη: Έστω α ≠ β, π.χ. α > β. Σχηματίζουμε τη διαφορά α – β. Από την ιδιότητα του Ευδόξου η διαφορά αυτή <u>δεν είναι απείρως μικρή</u> ως προς γ, δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε ν(α – β) > γ ⇔ $\boxed{\nu\alpha > \gamma + \nu\beta}$ (1)

Σταθεροποιούμε τον φυσικό αριθμό ν και θεωρούμε το μέγεθος νβ.

Το γ <u>δεν είναι απείρως μικρό</u> ως προς το νβ. Επομένως υπάρχει φυσικός αριθμός μ τέτοιος ώστε $\boxed{\mu\gamma > \nu\beta}$ (2)

Επιλέγουμε το ελάχιστο δυνατό μ, οπότε

▪ αν μ = 1 έχουμε $\alpha/_{\gamma} > 1/_{\nu} > \beta/_{\gamma}$, δηλαδή να > γ και γ > νβ που ισχύουν από τις (1) και (2).

▪ αν μ > 1 τότε $\boxed{(\mu - 1)\gamma \leq \nu\beta}$ (διότι ο μ ελάχιστος). Ισχυρισμός $\alpha/_{\gamma} > \mu/_{\nu} > \beta/_{\gamma}$.

Δηλαδή θέλουμε μγ > νβ που ισχύει από την (2) και να > μγ. Όμως

από την (1) $\quad \nu\alpha > \gamma + \nu\beta \geq \gamma + (\mu - 1)\gamma = \mu\gamma$

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ V

V.8 (η μόνη πρόταση που χρησιμοποιεί την ιδιότητα του Ευδόξου)				
	V.14	V.20	V.21	
	V.16 (Εναλλάξ)	V.22 (δι' ίσου)	V.23 (Τεταραγμένη αναλογία)	

Ας δούμε λίγο αυτές τις προτάσεις.

Πρόταση V.16 (Εναλλάξ)	Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.	Αν $\alpha/_{\beta} = \gamma/_{\delta}$ τότε $\alpha/_{\gamma} = \beta/_{\delta}$

Η συγκεκριμένη πρόταση έχει νόημα μόνο όταν και τα τέσσερα μεγέθη είναι ομογενή. Άρα δεν μπορεί να αποτελέσει βάση για την απόδειξη της δι' ίσου, όπως γίνεται στο έβδομο βιβλίο με τους αριθμούς. Έτσι ο Ευκλείδης δίνει ανεξάρτητες αποδείξεις.

Πρόταση V.22 (Δι' ίσου)	Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.	Αν $\alpha/_{\beta} = \alpha'/_{\beta'}$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta/_{\gamma} = \beta'/_{\gamma'}$, τότε $\alpha/_{\gamma} = \alpha'/_{\gamma'}$

Εδώ τα μεγέθη α, β, γ πρέπει να είναι ομογενή και τα αντίστοιχα τονούμενα να είναι επίσης ομογενή μεταξύ τους αλλά δεν υπάρχει καμιά υποχρέωση τα τονούμενα να είναι ομογενή με τα άτονα.

Πρόταση V.23 (Τεταραγμένη)	Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.	Αν $\alpha/\beta = \beta'/\gamma'$ $και$ $\beta/\gamma = \alpha'/\beta'$, τότε $\alpha/\gamma = \alpha'/\gamma'$

Παρατηρούμε, ότι όπως και στο βιβλίο VII, έτσι και εδώ, η ύπαρξη των κατάλληλων ορισμών (της αρχής Ευδόξου – Αρχιμήδη) οδηγεί στην απόδειξη της πρότασης V.8 και από αυτήν αποδεικνύονται οι επόμενες. Η πρόταση αυτή δεν μπορούσε να αποδειχθεί μέσω της ανθυφαίρεσης γιατί δεν υπήρχε ο κατάλληλος ορισμός του λόγου. (Η αναλογία ορίζεται μέσω της ίσης ανθυφαίρεσης αλλά ο λόγος δεν ορίζεται πριν τη διατύπωση του ορισμού V.4).

Γίνεται φανερό ότι το ξεπέρασμα της αρρητότητας και η ενσωμάτωση των άρρητων ποσοτήτων δεν έγινε μέσω μιας αξιωματικής θεμελίωσης, όπως θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς κοιτώντας με ένα σύγχρονο μαθηματικό βλέμμα, αλλά μέσω της διατύπωσης του κατάλληλου ορισμού για την αναλογία. Και από αυτό το σημείο λοιπόν, διακρίνουμε την δυναμική σχέση αιτημάτων και ορισμών, όπως αναφέρεται στο χωρίο των Τοπικών του Αριστοτέλη.

2.4.3. Η παραλληλία ως ομοιότητα θέσης

Μπορούμε, τέλος, να δούμε και ένα τρίτο, ίσως λιγότερο φανερό σημείο στα «Στοιχεία», το οποίο όμως είναι δηλωτικό του πως οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί προσέγγιζαν το θέμα των κατάλληλων ορισμών.

Στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» και συγκεκριμένα στις προτάσεις I.27 και I.28, ο Ευκλείδης αναφέρεται για πρώτη φορά σε προτάσεις παραλληλίας, διαχωρίζοντας την περίπτωση των εναλλάξ γωνιών από τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Πρόταση	Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα	*Αν σε δύο ευθείες μια άλλη ευθεία*

I.27	ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.	*τέμνουσα των δύο σχηματίζει τις εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε οι ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.*

Πρόταση I.28	Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.	*Αν σε δύο ευθείες μια άλλη ευθεία τέμνουσα των δύο σχηματίζει τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή τις εντός και επί τα αυτά μέρη ίσες με δύο ορθές, τότε οι ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.*

Ο Πρόκλος στα σχόλιά του στις προτάσεις αυτές προσπαθεί να εξηγήσει γιατί ο Ευκλείδης χωρίζει τις περιπτώσεις των εντός εναλλάξ γωνιών από τις άλλες δύο. Η εξήγηση που προτείνει είναι ότι θέλησε με αυτό τον τρόπο να δώσει έμφαση στην «εναλλάξ» περίπτωση. Μάλιστα τονίζει το γεγονός ότι ο όρος «εναλλάξ» εμφανίζεται και για τους αριθμούς στο 7^{ο} βιβλίο των Στοιχείων.

Αὐτὸ δὲ δὴ τὸ **ἐναλλὰξ** ἰστέον ὅτι διχῶς ὁ γεωμέτρης παραλαμβάνει, **ποτὲ μὲν κατὰ τὴν τοιάνδε θέσιν, ποτὲ δὲ κατὰ τὴν τοιάνδε τῶν λόγων ἀκολουθίαν**. καὶ κατὰ μὲν τοῦτο τὸ σημαινόμενον **ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς χρῆται τῷ ἐναλλάξ,** κατὰ δὲ τὸ ἕτερον ἔν τε τούτῳ καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις ἅπασι βιβλίοις ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τῆς εἰς ταύτας ἐμπιπτούσης. τὰς γὰρ γωνίας τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γιγνομένας, μηδὲ ἐφεξῆς ἀλλήλαις κειμένας, ἀλλὰ διειργομένας μὲν ὑπὸ τῆς ἐμπιπτούσης, ἐντὸς δὲ ἄμφω τῶν παραλλήλων, διαφερούσας δὲ τῷ τὴν μὲν ἄνω κεῖσθαι, τὴν δὲ κάτω, τὰς ἐναλλὰξ προσαγορεύει. λέγω δὲ οἷον εὐθειῶν οὐσῶν τῶν <αβ> καὶ <γδ> καὶ ἐμπιπτούσης εἰς αὐτὰς τῆς

<εζ> ἐναλλὰξ εἶναί φησι τὰς ὑπὸ <αεζ> καὶ <δζε> καὶ πάλιν τὰς ὑπὸ <γζε> καὶ <βεζ> ὡς ἐνηλλαγμένως ἐχούσας κατὰ τὴν θέσιν.

. . .

Ἐξαχῶς οὖν λαμβανομένων τῶν γωνιῶν ὁ γεωμέτρης τρεῖς μόνας ἐκλέξατο καὶ ταῦτα εἰς τὰ ἑπόμενα συμπτώματα τῶν παραλλήλων ἀπέφηνεν ὄντα χαρακτηριστικά. τούτων δὲ τῶν τριῶν μία μέν ἐστιν ἐκ τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐκ μὲν τῶν ἐντὸς ληφθεισῶν μόνον, **ἃς καὶ ἐκάλεσεν ἐναλλάξ**, ὡς παραλελεῖφθαι τὰς ἐκτὸς οὔσας ἀμφοτέρας καὶ τὴν μὲν ἐκτός, τὴν δὲ ἐντός, ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτά, τῶν δὲ ἐντὸς ἀμφοτέρων, ἃς δυσὶν ὀρθαῖς εἶναί φησιν ἴσας, καὶ ὧν ἡ μέν ἐστιν ἐντός, ἡ δὲ ἐκτός, ἃς εἶπεν ἴσας εἶναι, ὑπολειπομένης δὲ μιᾶς λήψεως τῆς ἐκτὸς ἀμφοτέρας ὑποτιθεμένης.

. . .

τί οὖν τὸ αἴτιον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως; εἰ οὖν πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἀπέβλεψεν τὴν πρὸς ἀλλήλας ἢ τὴν πρὸς τὰς δύο ὀρθάς, οὐδὲ ταύτῃ διέστησε τὰ προκείμενα θεωρήματα ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνο τὸ τὰς γωνίας ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λαμβάνεσθαι ἢ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά. τὸ μὲν γὰρ πρὸ τούτου τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ παρελάμβανε – τοιαῦται γὰρ αἱ ἐναλλάξ – τοῦτο δὲ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτά, ὡς καὶ ἐκ τῆς προτάσεως δῆλον.

Επίσης στα σχόλιά του στην πρόταση Ι.30 («Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι».[*Όταν δύο ευθείες είναι παράλληλες με τρίτη ευθεία τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες*]), αναφέρει ότι αυτή την ιδιότητα την έχουν μόνο η ισότητα, η ομοιότητα, η ταυτότητα και η παραλληλία και ονομάζει την παραλληλία ομοιότητα θέσης, όπως είδαμε (σελίδα 49) στο σχολιασμό του ορισμού της παραλληλίας στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων».

Αφού, λοιπόν, για την αναλογία έχει βρεθεί κατάλληλος ορισμός, είναι λογικό ότι μπορούμε να αναζητήσουμε κατάλληλο ορισμό και για την παραλληλία αφού αυτή είναι ένα είδος ομοιότητας, άρα αναλογίας. Έτσι, μπορούμε να ελπίζουμε ότι μόλις αυτός ο «κατάλληλος» ορισμός θα υπάρξει, τότε θα μπορούμε να αποδείξουμε το $5^{ο}$ αίτημα. Ο Ευκλείδης δείχνει να προσεγγίζει το θέμα με αυτόν τον τρόπο, δηλαδή αντιμετωπίζοντας την παραλληλία ως μια σχέση ισοδυναμίας, όπως την αναλογία, προετοιμάζοντας και αφήνοντας στους επόμενους την απόδειξη του $5^{ου}$ του αιτήματος.

3. ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη δυναμική σχέση ορισμών και αξιωμάτων όπως αυτή γίνεται φανερή σε σύγχρονες θεμελιώσεις επικεντρώνοντας την προσοχή μας στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών.

Η αξιωματική θεμελίωση του $\mathbb{R}$ υπήρξε μια «αναγκαιότητα» ώστε να δημιουργηθούν στέρεες βάσεις στο οικοδόμημα του απειροστικού λογισμού, όπως αυτός αναπτύχθηκε τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα. Η επιστήμη, με τη βοήθεια του απειροστικού λογισμού κατόρθωσε να λύσει μια σειρά από προβλήματα, από τον υπολογισμό της τροχιάς ενός σώματος έως την πρόβλεψη της κίνησης των πλανητών. Παρ' όλα αυτά, οι θεμελιώδεις έννοιες με τις οποίες επιτεύχθηκαν αυτά τα αποτελέσματα δεν είχαν οριστεί με αυστηρό τρόπο. Ο απειροστικός λογισμός εκείνης της εποχής βασιζόταν στην έννοια της απειροστής ποσότητας, μια έννοια που βρισκόταν στο μεταίχμιο της ύπαρξης και της ανυπαρξίας. Ήταν κάτι σαν το μηδέν αλλά όχι το πραγματικό μηδέν. Άλλοτε το παρέλειπαν και άλλοτε διαιρούσαν με αυτό. Η χρήση αυτή άρχισε να οδηγεί σε παράδοξα και λάθη και μοιραία οδήγησε στην αμφισβήτηση και έγινε φανερό ότι υπήρχαν κενά στις θεμελιώσεις. Υπήρχαν σειρές που δεν συνέκλιναν, άλλες που συνέκλιναν σε συνάρτηση διαφορετική της αρχικής και σειρές συνεχών συναρτήσεων που συνέκλιναν σε μη συνεχείς συναρτήσεις. Επίσης υπήρχαν θεμελιώδεις έννοιες όπως αυτή της παραγώγου και του ολοκληρώματος, που εξακολουθούσαν να παραμένουν χωρίς ένα κατάλληλο ορισμό. Οι πιο ενδιαφέρουσες ελλείψεις είχαν εντοπιστεί κατ' αρχήν στην αναγκαιότητα του ορισμού του ορίου και κατόπιν στην επίτευξη κριτηρίων για τη σύγκλιση των σειρών. Πίσω όμως από όλα αυτά υπήρχε η ανάγκη της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

Η Γεωμετρία, από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων, διαδραμάτισε, όπως είδαμε, πρωταρχικό ρόλο και παρέμεινε το σταθερό κριτήριο αυστηρότητας. Η γεωμετρική θεώρηση εννοιών και μεθόδων λογισμού δημιουργούσε στενή εξάρτηση του απειροστικού λογισμού από διαισθητικές γεωμετρικές έννοιες. Τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα, με την ανακάλυψη και την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, η γεωμετρία, μη μπορώντας να δικαιολογήσει πολλά από τα αποτελέσματα του νέου λογισμού, παραμερίστηκε και τη θέση της πήρε η άλγεβρα. Παρ' όλα αυτά εξακολουθούσε να υπάρχει σύγχυση με αποτέλεσμα να υπάρχει μια ανάμειξη της άλγεβρας και της γεωμετρίας, ακόμα και στα έργα του Cauchy. Η όποια ελπίδα, τέλος, για γερές βάσεις στη Γεωμετρία διαψεύστηκε με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής, όπως οι Euler, Lagrange και Cauchy προσπάθησαν, κάτω από το βάρος της αμφισβήτησης, να χρησιμοποιήσουν την αριθμητική στη θεμελίωση του λογισμού. Αυτό όμως ήταν μόνο μερικά επιτυχημένο εγχείρημα, διότι οι πραγματικοί αριθμοί ήταν κατανοητοί μόνο με μια διαισθητική μορφή (δεν υπήρχε κατάλληλος ορισμός). Ιστορικά, οι πραγματικοί αριθμοί εισήχθησαν γεωμετρικά και αυτό αποτελούσε σοβαρό ανασταλτικό παράγοντα για τον απογαλακτισμό του απειροστικού λογισμού από τη γεωμετρία.

Καθώς ο 19^{ος} αιώνας διέτρεχε το τελευταίο του τέταρτο, οι Wilhelm Richard Dedekind και Karl Weierstrass ανέλαβαν να διορθώσουν την ανάμειξη της αλγεβρικής τυποποίησης και της γεωμετρικής δικαιολόγησης. Αναγνώρισαν την αναγκαιότητα ενός αυστηρού αριθμητικού ορισμού των πραγματικών αριθμών. Καθιέρωσαν την αριθμητική ως γλώσσα των αυστηρών μαθηματικών, δικαιώνοντας τον Πυθαγόρα, παραμερίζοντας τόσο την γεωμετρία όσο και την άλγεβρα.

Οι ρίζες που οδήγησαν στην κατανόηση της φύσης των πραγματικών αριθμών βρίσκονται, όπως είδαμε, στην Ελληνική αρχαιότητα και αποτελούν ένα από τα πιο λαμπρά επιτεύγματά της. Οι Πυθαγόρειοι, με την ανακάλυψη της αρρητότητας, οδηγήθηκαν στην ανάπτυξη βαθύτερων φιλοσοφικών και μαθηματικών αναζητήσεων, οι οποίες οδήγησαν στη διατύπωση της μεγαλειώδους λύσης που πρότεινε ο Εύδοξος. Η λύση αυτή έγινε δεκτή από την αρχαία Ελληνική μαθηματική κοινότητα και εκτίθεται στο πέμπτο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Διαβάζουμε στην Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών του T.L.Heath (Τόμος 1):

«*Το μεγαλείο της νέας θεωρίας καθαυτό δε χρειάζεται παραπέρα συζήτηση, αν ληφθεί υπόψη ότι ο ορισμός των ίσων λόγων στο Βιβλίο V του Ευκλείδη, Ορισ. 5, αντιστοιχεί ακριβώς στη σύγχρονη θεωρία των άρρητων αριθμών, που οφείλεται στον Dedekind, και ότι είναι λέξη προς λέξη η ίδια με τον ορισμό των ίσων μεταξύ τους αριθμών του Weierstrass*».

Η πλήρης θεωρητική σύλληψη των πραγματικών αριθμών από τον Εύδοξο, η οποία συνδυάζονταν κατά τρόπο ουσιαστικό και με την ανάπτυξη του ολοκληρωτικού λογισμού (υπολογισμοί εμβαδών και όγκων), δεν συνοδεύονταν από ευχέρεια στους αλγεβρικούς χειρισμούς. Έτσι οι ανυπέρβλητες αυτές θεωρητικές κατακτήσεις στη θεμελίωση και ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού δεν προκάλεσαν μια γενική ανάπτυξη όλων των φυσικών επιστημών, όπως έγινε τελικά τον 17^{ο} αιώνα.

Για να γίνει η αριθμητική το θεμέλιο των μαθηματικών, ήταν αναγκαίο να υπάρξει μια δομή του γραμμικού συνεχούς, δηλαδή του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Να δείξουν πώς αυτό μπορεί να δημιουργηθεί από τους ακεραίους 1, 2, 3, ... Προτάθηκαν γι αυτό τρεις διαφορετικές μέθοδοι, από τον Dedekind, τον Cantor και τον

Weierstrass. Και στις τρεις αυτές μεθόδους έπρεπε κάποιος να χρησιμοποιήσει απειροσύνολα ρητών αριθμών για να ορίσει ή να κατασκευάσει έναν πραγματικό αριθμό. Έτσι, σε αυτή την προσπάθεια αναγωγής, έπρεπε να οδηγηθεί στην εισαγωγή των απειροσυνόλων στη θεμελίωση των μαθηματικών.

Η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε από τον Cantor αλλά όπως είδαμε, η ανακάλυψη αντιφάσεων οδήγησε στο τέλος του 19^{ου} αιώνα και στις αρχές του εικοστού σε διαμάχες, που με τη σειρά τους οδήγησαν σε προσπάθειες «καθαρισμού» των θεμελίων των μαθηματικών. Όσον αφορά τη θεωρία συνόλων, διατυπώθηκε το αξιωματικό σύστημα Zermelo – Fraenkel – Skolem. Όπως στην Ευκλείδεια γεωμετρία ο Ευκλείδης ήρθε για να την απαλλάξει από την απροσδιόριστη ενορατική έννοια του «σημείου» και της «ευθείας», η οποία οδηγούσε σε παράδοξα όπως του Ζήνωνα, έτσι και ο Zermelo στα 1908 προσπάθησε να απαλλάξει τη θεωρία συνόλων από παρόμοια προβλήματα, που πήγαζαν από την ενορατική προσέγγιση του δημιουργού της.

Βέβαια θέλουμε ακόμη να μελετήσουμε τα σύνολα και έτσι τα αξιώματα δε διαλέγονται στην τύχη αλλά σύμφωνα με την ενορατική μας αντίληψη για ένα σύνολο. Δηλαδή, πάλι τα αξιώματα – αιτήματα ακολουθούν την Αριστοτελική λογική. Είναι αυτά που φαίνονται προφανή για τα μαθηματικά αντικείμενα που θέλουμε να επεξεργαστούμε, αλλά δεν μπορούν να αποδειχθούν γιατί δεν υπάρχει ο κατάλληλος ορισμός.

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEM ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ. Για να διατυπώσουμε αυτά τα θεωρήματα είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα της θεωρίας συνόλων, ένα λεξιλόγιο που δίνεται στην αρχή. Αυτό το σύστημα αξιωμάτων δημιουργήθηκε από τους Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel και Thokolf Skolem.

$\forall$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ	$\leftrightarrow$ ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ	$\in$ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΟΥ
$\exists$ ΥΠΑΡΧΕΙ	$\vee$ Ή	$=$ ΙΣΟΥΤΑΙ
$\exists!$ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΑ	$\wedge$ ΚΑΙ	$\neq$ ΔΕΝ ΙΣΟΥΤΑΙ
$\cup$ ΕΝΩΣΗ	$\sim$ ΟΧΙ	Φ ΤΟ ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ
$\rightarrow$ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ	$\subseteq$ ΕΙΝΑΙ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΤΟΥ	

1. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ

$$\forall x, y, (\forall z\, (z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

2. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΕΝΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

$$\exists\, x\ \forall y\, (\sim y \in x).$$

Υπάρχει ένα σύνολο χωρίς κανένα μέλος (κενό σύνολο).

3. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΩΝ ΜΗ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΖΕΥΓΩΝ

$$\forall x, y\ \exists\, z\ \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Αν το x και y είναι σύνολα, τότε το (μη διατεταγμένο) ζεύγος {x, y} είναι ένα σύνολο.

4. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

$$\forall x\ \exists\, y\ \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists\, t\, (z \in t \wedge t \in x)).$$

Αν το x είναι σύνολο συνόλων, η ένωση όλων των μελών του είναι σύνολο. (Για παράδειγμα, αν $x = \left\{ \begin{matrix} \{a,b,c\} \\ \{a,c,d,e\} \end{matrix} \right\}$, τότε η ένωση των δύο στοιχείων του x είναι το σύνολο {a, b, c, d, e}.)

5. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ

$$\exists\, x\, (\Phi \in x \wedge\ \forall y\, (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x).$$

Υπάρχει ένα σύνολο x που περιλαμβάνει το κενό σύνολο και αυτό σημαίνει ότι, αν το y ανήκει στο x, τότε η ένωση του y και του {y} είναι επίσης στο x. Η διάκριση ανάμεσα στο στοιχείο y και στο μονοσύνολο {y} είναι βασική. Το αξίωμα εγγυάται την ύπαρξη άπειρων συνόλων.

6. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

$$\forall t_1, \ldots, t_k\, (\forall x\ \exists!\, y\ A_n\, (x, y \cdot t_1, \ldots, t_k) \rightarrow \forall u\ \exists\, v\ B(u, v))$$

$$\text{όπου}\quad B(u, v) \equiv \forall r\, (r \in v \leftrightarrow \exists\, s\, (s \in u \wedge A_n\, (s, r \cdot t_1, \ldots, t_k))).$$

Αυτό το αξίωμα είναι δύσκολο να διατυπωθεί στα ελληνικά (και στα αγγλικά). Καλείται αξίωμα 6_n αντί για 6, επειδή στην πραγματικότητα είναι μια ολόκληρη οικογένεια αξιωμάτων. Υποθέτουμε ότι όλοι οι τύποι που εκφράζονται στο σύστημά μας έχουν απαριθμηθεί ώστε ο νιοστός να ονομάζεται A_n. Τότε το αξίωμα της αντικατάστασης λέει ότι αν για σταθερά $t_1, \ldots, t_k$, $A_n(x, y \cdot t_1)$ ορίζει το y μοναδικά ως συνάρτηση του x, ας πούμε $y = \varphi(x)$, τότε για κάθε u στο πεδίο τιμών του φ στο u είναι σύνολο. Αυτό σημαίνει χοντρικά ότι κάθε («λογική») ιδιότητα που μπορεί να διατυπωθεί στην τυπική γλώσσα της θεωρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει ένα σύνολο (το σύνολο των πραγμάτων που έχουν τη δηλωμένη ιδιότητα).

7. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟΥ

$$\forall x\ \exists\, y\ \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Το αξίωμα λέει ότι για κάθε x υπάρχει το σύνολο y όλων των υποσυνόλων του x. Αν και το y ορίζεται με αυτή την ιδιότητα, δεν καλύπτεται από το αξίωμα της αντικατάστασης επειδή δε δίνεται ως το πεδίο τιμών καμιάς συνάρτησης. Και αυτό γιατί ο πληθάριθμος του y θα είναι μεγαλύτερος από του x, οπότε το αξίωμα μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε μεγαλύτερους πληθικούς αριθμούς.

8. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Αν $\alpha \rightarrow A_\alpha \neq \phi$ είναι συνάρτηση που ορίζεται για όλα τα $\alpha \in x$, τότε υπάρχει άλλη συνάρτηση $f(\alpha)$ για $\alpha \in x$ με $f(\alpha) \in A_\alpha$.

Αυτό είναι το πολύ γνωστό αξίωμα επιλογής που μας επιτρέπει να κάνουμε άπειρες επιλογές, αν και δεν έχουμε κάποια ιδιότητα που θα μας όριζε τη συνάρτηση επιλογής και θα μας επέτρεπε έτσι να χρησιμοποιήσουμε την 6_n.

9. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

$$\forall x\ \exists\, y\, (x = \phi\ \vee (y \in x \wedge \forall z\, (z \in x \rightarrow \sim z \in y))).$$

Αυτό το αξίωμα απαγορεύει, για παράδειγμα, το $x \in x$.

3.1. Η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Στα εγχειρίδια του απειροστικού λογισμού, το σύνολο των πραγματικών αριθμών δίνεται αξιωματικά. Είναι εκείνο το σύνολο που τα στοιχεία του, η ύπαρξη των οποίων δεν αμφισβητείται, ικανοποιούν ένα συγκεκριμένο αριθμό ιδιοτήτων. Το σύνολο συμβολίζεται με το $\mathbb{R}$ και επίσης θεωρούνται δεδομένες οι δύο πράξεις – συναρτήσεις + (πρόσθεση) και · (πολλαπλασιασμός) : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου κάθε ζεύγος (α , β) $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ έχει ως εικόνα το άθροισμα $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ και το γινόμενό τους $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$. Ακόμα, στους πραγματικούς αριθμούς είναι ορισμένη μια σχέση διάταξης $\leq$. Για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β, ο α είναι μικρότερος ή ίσος του β (ή ισοδύναμα ο β είναι μεγαλύτερος ή ίσος του α) αν $\alpha \leq \beta$ (ή ισοδύναμα $\beta \geq \alpha$). Αν τέλος ισχύει ότι $\alpha \leq \beta$ και $\alpha \neq \beta$, τότε θα λέμε ότι το α είναι μικρότερο του β (ισοδύναμα ότι το β είναι μεγαλύτερο του α).

Τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών είναι 13 και μπορούν να χωριστούν σε τρεις βασικές ομάδες[12]. Η πρώτη ομάδα περιγράφει τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$, η δεύτερη ομάδα τις ιδιότητες διάταξής του και η τρίτη ομάδα, που αποτελείται από ένα μόνο αξίωμα, το αποκαλούμενο αξίωμα της πληρότητας, είναι εκείνη που ξεχωρίζει το $\mathbb{R}$ από όλα τα άλλα σύνολα με τις ιδιότητες των δύο πρώτων ομάδων.

Πρώτη ομάδα αξιωμάτων (Αξιώματα σώματος)

Για $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

(Α1): $x + y = y + x$ (*μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης*)

(Α2): $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης*)

(Α3): υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (*ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου για την πρόσθεση*)

(Α4): για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x + y = 0$ (*ύπαρξης αντίθετων στοιχείων*)

(Α5): $xy = yx$ (*μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού*)

(Α6): $x(yz) = (xy)z$ (*προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού*)

(Α7): υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{R}$ με $1 \neq 0$ και $x \cdot 1 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (*ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου για τον πολλαπλασιασμό*)

(Α8): για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $xy = 1$

[12] Σε κάποια εγχειρίδια είναι 14 διατυπώνοντας λίγο διαφορετικά τα αξιώματα διάταξης.

(*ύπαρξη αντιστρόφων στοιχείων*)
(A9): x(y+z)= xy+xz (*επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση*)

Κάθε σύνολο K, με δύο απεικονίσεις όπως οι παραπάνω, που πληρούν τα αξιώματα (A1) έως και (A9) καλείται **σώμα** ως προς αυτές τις απεικονίσεις.

Από την (A1) έχουμε ότι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι μοναδικό. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει και ένα άλλο στοιχείο 0΄♏ ☼ με την ιδιότητα x + 0΄ = x, τότε 0 + 0΄ = 0΄ και 0΄ + 0 = 0 και επομένως, αφού 0 + 0΄ = 0΄+ 0 είναι 0 = 0΄.

Το αντίθετο στοιχείο κάθε αριθμού είναι μοναδικό. Πράγματι, αν y, y΄ ♏ ☼ δύο αριθμοί τέτοιοι ώστε x + y = 0 και x + y΄= 0, τότε από τα (A3), (A2) και (A1) έχουμε διαδοχικά: y = y + 0 = y + (x + y΄) = (y + x) + y΄= (x + y) + y΄ = 0 + y΄ = y΄. Έτσι, το μοναδικό αντίθετο κάθε στοιχείου x ♏ ☼ το συμβολίζουμε με –x. Αν x, y ♏ ☼, τότε ορίζουμε ως διαφορά x – y = x + (-y).

Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι μοναδικό, αφού αν υπάρχει 1΄♏ ☼ με τις ιδιότητες 1 ≠ 0 και x · 1 = x για κάθε x ♏ ☼, τότε από το (A7) είναι 1 · 1΄ = 1 και 1΄ · 1 = 1΄. Όμως από το (A5) 1 · 1΄ = 1΄ · 1, άρα 1 = 1΄.

Τέλος και το αντίστροφο στοιχείο είναι μοναδικό, γιατί αν για το x ♏ ☼, με x ≠ 0 υπάρχουν y, y΄ ♏ ☼ με την ιδιότητα xy = xy΄ = 1, τότε ισχύει από τις (A7), (A6) και (A5) ότι y = y · 1 = y(xy΄) = (yx)y΄=(xy)y΄= 1 · y΄= y΄.

Δεύτερη ομάδα αξιωμάτων (Αξιώματα διάταξης)

(A10): Το σύνολο ☼ είναι εφοδιασμένο με μια σχέση ολικής διάταξης[13], που θα τη συμβολίζουμε με ≤.

Το σύνολο ☼$^+$ 💻🖬{x ♏ ☼ : 0 ≤ x} θα το καλούμε το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών και το ☼ - ☼$^+$ σύνολο των αρνητικών αριθμών.

(A11): Αν για τα x, y ♏ ☼ έχουμε x ≤ y, τότε για κάθε z ♏ ☼ ισχύει x + z ≤ y + z.
(A12): Αν x, y ♏ ☼$^+$, τότε και x · y ♏ ☼$^+$.

Επομένως έχουμε την ισχύ της ισοδυναμίας: x ≤ y αν και μόνο αν y – x ♏ ☼$^+$.

Ένα σώμα με τα αξιώματα της διάταξης καλείται **ολικά διατεταγμένο σώμα**.

Αξίωμα Πληρότητας

[13] Μια σχέση σ σε ένα σύνολο A ≠🖎 λέγεται σχέση διάταξης στο A, αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική. Αν επιπλέον έχει την ιδιότητα για κάθε x, y ♏ A να ισχύει xσy ή yσx, τότε η σ καλείται ολική ή γραμμική διάταξη.

Η διάταξη στο ☼ μας παρέχει τη δυνατότητα για τον ορισμό των ακόλουθων εννοιών.

Έστω B ⊆ ☼. Ένα b ♏ ☼ θα καλείται **άνω φράγμα** του B, αν για κάθε x ♏ B ισχύει $x \leq b$. Αν μάλιστα υπάρχει κάποιο s ♏ ☼ με την ιδιότητα το s να είναι άνω φράγμα του B και για κάθε άνω φράγμα b του B να ισχύει $s \leq b$, τότε το s καλείται **ελάχιστο άνω φράγμα** ή **supremum** του B. Είναι φανερό πως το supremum ενός συνόλου, αν υπάρχει, είναι μοναδικό (από την ιδιότητά του να είναι ελάχιστο). Ένα σύνολο που έχει άνω φράγμα λέγεται **άνω φραγμένο**.

(Α13): (**Αξίωμα της πληρότητας**) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο B ⊆ ☼ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες που θέτει το (Α13) στο σύνολο B για ύπαρξη του supremum είναι οι ασθενέστερες δυνατές. Αν το σύνολο B είναι κενό τότε κάθε αριθμός είναι ένα άνω φράγμα επομένως δεν μπορεί το κενό σύνολο να έχει supremum. Αν το B δεν είναι άνω φραγμένο τότε προφανώς δεν μπορεί πάλι να έχει supremum. Αυτό που λέει το αξίωμα αυτό είναι ότι τελικά, όλα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών που μπορούν να έχουν supremum πράγματι έχουν. Το αξίωμα αυτό είναι υπαρξιακό και προβλέπει την ύπαρξη όσο το δυνατόν περισσότερων πραγματικών αριθμών. Παρατηρούμε επίσης ότι αν και έχει υπαρξιακό χαρακτήρα, εντούτοις η ύπαρξη αυτών των αριθμών δεν προκύπτει από κάποια κατασκευαστική διαδικασία.

Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι τα παραπάνω αξιώματα προσπαθούν να εγκλωβίσουν ένα σύνολο. Ήταν όμως αναγκαίο, κάποια στιγμή, να δοθεί ένα συγκεκριμένο σύνολο, με συγκεκριμένα στοιχεία, που να ικανοποιεί αυτά τα αξιώματα. Η μη γεωμετρική κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών έγινε τελικά τη δεκαετία του 1870 από τους Dedekind, Cantor, Weierstrass και Meray μέσω ενός απείρου συνόλου ρητών αριθμών.

3.2. Θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind

Ο Dedekind έθεσε ως σκοπό του την ανακατασκευή του διαισθητικού ορισμού στον οποίο βασίστηκε ο Cauchy για να αποδείξει θεωρήματα σχετικά με την ύπαρξη των ορίων. Προσπάθησε να αναλύσει την έννοια της συνέχειας των πραγματικών αριθμών, έτσι ώστε αυτή να εκφραστεί αριθμητικά και κατά συνέπεια να αποφύγει την παράκαμψη του Cauchy στη γεωμετρία. Φαντάστηκε την ευθεία των αριθμών σαν ‘ένα στερεό σωλήνα απείρου μήκους γεμάτο με διατεταγμένους ρητούς αριθμούς. Κάθε τομή του σωλήνα δίνει δύο τμήματα A, B και μας αποκαλύπτει δύο διατομές, τα άκρα των συνόλων A και B. Κοιτάζοντας αυτές τις εκτεθειμένες πλευρές μπορεί κανείς να «διαβάσει» τους αριθμούς που μας δείχνουν. Αν δεν μας δείχνουν αριθμό, τότε η τομή έγινε σε έναν άρρητο. Έτσι ο Dedekind όρισε τους άρρητους με τη βοήθεια των συνόλων A και B. Έλυσε, λοιπόν, το πρόβλημα προτείνοντας ότι η ουσία της συνέχειας της ευθείας βρίσκεται στην αρχή ότι: «Αν όλα τα σημεία της ευθείας εμπίπτουν σε δύο κλάσεις τέτοιες, ώστε κάθε σημείο της πρώτης κλάσης να βρίσκεται αριστερά από κάθε σημείο της δεύτερης κλάσης, τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο, που παράγει αυτή η διαίρεση όλων των σημείων σε δύο κλάσεις, αυτό το χωρισμό σε δύο μέρη»[14].

Εμπνευσμένος από την αρχή του για τη συνέχεια, ο Dedekind εισήγαγε την έννοια της τομής στο σύνολο ✈ των ρητών.

«Μια τομή είναι ο χωρισμός του ✈ σε δύο μη κενές κλάσεις L, R, τέτοιες ώστε, για οποιαδήποτε x, y, αν το x ♏ L και y ♏ R, τότε x < y». Συμβόλισε την τομή με (L, R) και όρισε ως πραγματικό αριθμό κάθε τέτοια τομή. Κάθε τομή έχει τις ιδιότητες:

1. L ≠ 🖎 και R ≠ 🖎

2. Κάθε ρητός ανήκει είτε στο L είτε στο R και δεν υπάρχει ρητός που να ανήκει και στις δύο κλάσεις.

3. Αν α ανήκει στο L και β στο R, τότε α < β.

4. Το L δεν έχει μέγιστο στοιχείο[15].

Αν συγκρίνουμε αυτό τον ορισμό με τον ορισμό του Ευδόξου παρατηρούμε την απόλυτη ταύτισή τους. Πράγματι, αρχικά, στον ορισμό V.4, αποκλείει την περίπτωση των απειροστών, αφού λέει ότι για να υπάρχει λόγος α/β πρέπει να υπάρχουν αριθμοί μ και ν ώστε μβ > α και να > β.

Ορισμός 5.4	Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ
(Ιδιότητα Ευδόξου – Αρχιμήδη)	δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Ο ορισμός αυτός μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή: «*Δεν υπάρχει λόγος μεγεθών* α/β *ώστε* $\nu/1 < \alpha/\beta$ *για κάθε ν = 1, 2, 3, ...*». Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα

[14] R.Dedekind, Steigkeit und irrational zahlen

[15] Αντίστοιχα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το R δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Επιλέγουμε αυτό τον ορισμό για να συμβαδίζει με την έννοια του supremum στην αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών.

ομογενή μεγέθη α και β και ας πάρουμε όλα τα πολλαπλάσια του β {β, 2β, 3β, ..., νβ, ...}. Αν υποθέσουμε ότι νβ < α για κάθε ν τότε δεν ικανοποιείται ο ορισμός 5.4. Επομένως, η ιδιότητα Ευδόξου – Αρχιμήδη ταυτίζεται με το ότι το σύνολο ☠ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

Στον ορισμό 5 (της αναλογίας μεγεθών) αναφέρει ότι, είναι $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, όταν για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών μ και ν είναι:

αν μα > νβ τότε και μγ > νδ,
αν μα = νβ τότε και μγ = νδ και
αν μα < νβ τότε και μγ < νδ.[16]

Ορισμός 5.5 Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

Πρακτικά δηλαδή, από τον ορισμό της αναλογίας (V.5) προκύπτει ότι κάθε λόγος ορίζει μια τομή Dedekind. Το αντίστροφο όμως δεν διατυπώνεται από κανέναν και σε καμιά αρχαία πηγή και αυτό αποτελεί το εμπόδιο για να φτάσουν οι αρχαίοι Έλληνες στον ορισμό των πραγματικών αριθμών.

Ας δοκιμάσουμε να διατυπώσουμε τον ορισμό V.5 του Ευδόξου με τη γλώσσα των τομών Dedekind.

Έστω (α , β) ένα αποδεκτό ζεύγος. Θέτουμε L(α,β) = {(μ,ν) ∈ NxN : μβ < να} (δηλαδή το κλάσμα $\mu/\nu < \alpha/\beta$) και R(α,β) = {(μ,ν) ∈ NxN : μβ $\geq$ να}. Τότε:

(1) Το ζεύγος (L(α,β) , R(α,β)) είναι μια τομή Dedekind που καθορίζεται από το λόγο α/β.

(2) Ο ορισμός V.5 γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \text{ οι τομές Dedekind των δύο λόγων είναι ίσες}$$

[16] Δηλαδή το α/β χωρίζει τους ρητούς αριθμούς σε αυτούς που είναι μεγαλύτεροι από αυτόν και σε αυτούς που είναι μικρότεροι από αυτόν και ορίζεται η ισότητα δύο λόγων από την ισότητα – ταύτιση αυτών των δύο απειροσυνόλων για κάθε ένα από τα δύο κλάσματα.

Δηλαδή κάθε λόγος α/β κατά τον Εύδοξο καθορίζει μια τομή Dedekind. Έναν πραγματικό αριθμό!

Για τον Dedekind το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο όλων των τομών. Για δύο πραγματικούς αριθμούς $x = (L_1,R_1)$ και $y = (L_2,R_2)$, $x < y$ ❿ L_1⊠L_2.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα 13 αξιώματα των πραγματικών αριθμών χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Dedekind. Στην πραγματικότητα θα χρησιμοποιήσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό, όπου ο πραγματικός αριθμός θα ταυτίζεται όχι με ολόκληρη την τομή αλλά μόνο με το σύνολο L. Προφανώς, αν το L είναι καθορισμένο τότε και το R είναι πλήρως γνωστό από τον τρόπο ορισμού της τομής Dedekind. Ας ξεκινήσουμε.

3.2.1. Ας δοκιμάσουμε να ορίσουμε ένα πραγματικό αριθμό

Ορισμός: Πραγματικός αριθμός είναι ένα σύνολο α, από ρητούς αριθμούς, με τις εξής τέσσερεις ιδιότητες:

(1) Αν ο x ανήκει στο α και y είναι ένας ρητός αριθμός μικρότερος του x, τότε και ο y ανήκει στο α.

(2) $\alpha \neq \emptyset$

(3) $\alpha \neq \mathbb{Q}$

(4) Δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο στο α.(Αν ο x ανήκει στο α τότε υπάρχει κάποιο y στο α με $y > x$).

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

► Π.χ.: Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα πραγματικού αριθμού:

$$\alpha = \{x \in \mathbb{Q}: x < 0 \text{ ή } x^2 < 2\}$$

Αυτός είναι ο πραγματικός αριθμός που θα ονομάσουμε $\sqrt{2}$ και πραγματικά, είναι ένας πραγματικός αριθμός αφού

(1) Αν x ανήκει στο α και $y < x$ τότε:

- αν $x < 0$ είναι και $y < 0$, δηλαδή το y ανήκει στο α.
- αν $x^2 < 2$ και $x > 0$, $y > 0$ τότε $y < x \Rightarrow y^2 < x^2 < 2 \Rightarrow$ y ανήκει στο α

(2) Προφανώς ο ρητός -1 ανήκει στο α, άρα ο α δεν είναι κενό σύνολο.

(3) Προφανώς ο ρητός 2012 δεν ανήκει στο α, άρα ο α δεν περιλαμβάνει όλους τους ρητούς.

(4) Αν x είναι το μέγιστο στοιχείο του α, τότε για κάθε ν φυσικό αριθμό,

$$x^2 + 1/\nu \geq 2 \text{ ή } 1/\nu \geq \text{ ή } \nu \leq 1/(2 - x^2)$$

Άτοπο (ο x είναι συγκεκριμένος ρητός αριθμός)! Επομένως δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο για τον α.

Παρατήρηση: Με βάση τον ορισμό μας, κάθε ρητός αριθμός **δεν είναι** πραγματικός αριθμός. Αντί γι αυτό, κάθε ρητός αριθμός x είναι ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς της μορφής $\{y \in Q : y < x\}$.

Η ιδέα ξεκίνησε να χτίζεται. Υπάρχει όμως πολύς δρόμος ακόμα μέχρι να μπορέσουμε να πούμε ότι ορίσαμε τους πραγματικούς αριθμούς. Πρέπει να ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και μια διάταξη, ώστε να αποδειχτεί ότι υπάρχει τελικά το **πλήρως διατεταγμένο σώμα** που θα αποτελέσει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Διάταξη – Αρχή της πληρότητας

Ορισμός: Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η

$\alpha < \beta$ σημαίνει ότι το α περιέχεται στο β, αλλά $\alpha \neq \beta$.

$\alpha \leq \beta$ σημαίνει ότι το α περιέχεται στο β.

$\alpha > \beta$ σημαίνει ότι το β περιέχεται στο α, αλλά $\beta \neq \alpha$.

$\alpha \geq \beta$ σημαίνει ότι το β περιέχεται στο α.

Θεώρημα (Αρχή της Πληρότητας) (*13^o Αξίωμα του ☼*)

Αν Α είναι ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, $A \neq \emptyset$ και το Α είναι άνω φραγμένο, τότε το Α έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη

Θέτουμε β = {x ρητός : ο x ανήκει σε κάποιο α στο Α}. Το β είναι σίγουρα μια συλλογή ρητών αριθμών. Θα δείξουμε ότι είναι ένας πραγματικός αριθμός.

(1) Αν το x ανήκει στο β και $y < x$ τότε το y ανήκει στο β. Πράγματι, αφού το x ανήκει σε κάποιο α στο Α τότε και το y ανήκει στο α (ο α είναι πραγματικός αριθμός). Άρα το y ανήκει στο β.

(2) Αφού $A \neq \emptyset$, υπάρχει κάποιο α στο Α. Αφού το α είναι πραγματικός αριθμός, υπάρχει κάποιο x που ανήκει στο α. Άρα το x ανήκει στο β, δηλαδή $\beta \neq \emptyset$.

(3) Αφού το Α είναι άνω φραγμένο, υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός γ τέτοιος, ώστε $\alpha \leq \gamma$ για κάθε α στο Α. Όμως το γ είναι πραγματικός αριθμός,

επομένως υπάρχει z ρητός αριθμός που δεν ανήκει στο γ. Τότε όμως δεν ανήκει σε κανένα άλλο πραγματικό αριθμό του Α. Άρα ο z δεν ανήκει σε κανένα πραγματικό αριθμό α στο Α άρα $\beta \neq \mathbb{Q}$.

(4) Τέλος, αν x ανήκει στο β και x είναι το μέγιστο στοιχείο του β τότε, αφού το x ανήκει σε κάποιο α στο Α και το α δεν έχει μέγιστο στοιχείο υπάρχει κάποιο y στο α με $y > x$. Τότε όμως ο y ανήκει στον β. Άρα το β δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Άρα ο β είναι πραγματικός αριθμός.

- Αν ο α ανήκει στο Α, τότε το α περιέχεται στο β, από τον ορισμό του β. Άρα $\alpha \leq \beta$, δηλαδή το β είναι άνω φράγμα του Α

- Αν γ είναι ένα άνω φράγμα του Α, τότε $\alpha \leq \gamma$ για κάθε α στο Α. Άρα το α περιέχεται στο γ για κάθε α στο Α και επομένως το β περιέχεται στο γ. Άρα $\beta \leq \gamma$.

Επομένως το β είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α.

Θεώρημα (*10^{o} Αξίωμα του ☼*): Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ολικά διατεταγμένο.

Απόδειξη

(*αυτοπαθής*) Από τον ορισμό των πραγματικών αριθμών είναι $\alpha \leq \alpha$ για κάθε α♏ ☼.

(*αντισυμμετρική*) Αν α, β ♏ ☼ με $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$, τότε κάθε ρητός που ανήκει στο α περιέχεται και στο και κάθε ρητός του β περιέχεται και στο α, άρα $\alpha = \beta$.

(*μεταβατική*) Αν α, β, γ ♏ ☼, με $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma$ τότε προφανώς $\alpha \leq \gamma$.

Αξίζει να σταθούμε και να παρατηρήσουμε ότι τα αξιώματα της διάταξης αποδεικνύονται ως προφανή συμπεράσματα του (κατάλληλου) ορισμού.

Άθροισμα δύο πραγματικών

Ορισμός: Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ορίζουμε το άθροισμά τους ως το σύνολο $\alpha + \beta = \{x$ στο $Q \mid x = y + z$ για κάποιο y στο α και κάποιο z στο $\beta\}$.

Θεώρημα: Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε το $\alpha + \beta$ είναι πραγματικός αριθμός. (*Η πρόσθεση είναι κλειστή πράξη στο ☼*)

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι για το σύνολο των ρητών $\alpha + \beta$ ισχύουν οι γνωστές τέσσερεις ιδιότητες. Είναι

(1) Έστω w < x για κάποιο x στο α + β. Τότε, αφού x = y + z είναι w < y + z δηλαδή w – y < z. Επειδή το β είναι πραγματικός αριθμός, ο w – y ανήκει στον β. Άρα ο w = y + (w – y) ανήκει στο α + β.

(2) Προφανώς α + β είναι μη κενό σύνολο, αφού τα α και β είναι μη κενά σύνολα.

(3) Αφού τόσο ο α όσο και ο β δεν είναι όλο το ℚ, υπάρχουν x που δεν ανήκει στο α και y που δεν ανήκει στο β. Κάθε z στο α ικανοποιεί την z < x και κάθε w στο β την w < y. Άρα z + w < x + y.

Τότε όμως το x + y δεν ανήκει στο α + β. Άρα το α + β δεν ταυτίζεται με το σύνολο ℚ.

(4) Αν τώρα το x ανήκει στο α + β, τότε x = y + z, με y στο α και z στο β. Υπάρχουν m στο α και n στο β με y < m και z < n.

Τότε x < m + n και το m + n είναι στοιχείο του α + β. Άρα το α + β δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Όπως έχετε μάλλον καταλάβει ήδη, η όλη διαδικασία είναι αρκετά επίπονη, αφού κάθε φορά που θα αναφέρουμε έναν καινούριο πραγματικό αριθμό θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτός πράγματι είναι τέτοιος, δηλαδή ότι ισχύουν οι γνωστές τέσσερεις ιδιότητες. Στα επόμενα θα αρκεστούμε στην απόδειξη μόνο κάποιων ιδιαίτερων σημείων, αφήνοντας στον αναγνώστη την ικανοποίηση να ελέγξει την αλήθεια των προτάσεων που θα διατυπώνονται.

Πρόταση: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών με την πράξη της πρόσθεσης, όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μια αντιμεταθετική ομάδα. Δηλαδή ισχύουν οι ιδιότητες:

(Αντιμεταθετική) Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:

(*1^o Αξίωμα του* ☼) α + β = β + α

(Προσεταιριστική) Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:

(*2^o Αξίωμα του* ☼) (α + β) + γ = α + (β + γ)

(Ουδέτερο στοιχείο) Αν α είναι πραγματικός αριθμός, τότε

(*3^o Αξίωμα του* ☼) α + **0** = α, όπου **0** = {x στο ℚ: x < 0}

(Συμμετρικό στοιχείο) Αν α είναι πραγματικός αριθμός τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός β, τέτοιος ώστε

(*4^o Αξίωμα του* ☼) α + β = **0**

Ο αριθμός β συμβολίζεται με –α και ορίζεται παρακάτω.

Απόδειξη

Αφού $x + y = y + x$ για τυχαίους ρητούς αριθμούς x, y, κάθε στοιχείο του $α + β$ είναι και στοιχείο του $β + α$ και αντίστροφα.

Όμοια, αφού $x + (y + z) = (x + y) + z$, για τυχαίους ρητούς αριθμούς x, y, z κάθε στοιχείο του $α + (β + γ)$ είναι και στοιχείο του $(α + β) + γ$ και αντίστροφα.

Επίσης ο αριθμός **0** είναι καλά ορισμένος πραγματικός αριθμός. Αν x ανήκει στον α και ο y ανήκει στον **0**, είναι $y < 0$, άρα $x + y < x$ και επομένως ο α + **0** περιέχεται στον α. Αντίστροφα, αν το x ανήκει στο α, τότε υπάρχει ρητός αριθμός y στον α τέτοιος, ώστε $y > x$. Αφού $x = y + (x – y)$, με y στον α και $x – y$ στον **0**, το x ανήκει στον α + **0**. Άρα τελικά κάθε στοιχείο του α είναι και στοιχείο του α + **0**.

► Για την τελευταία ιδιότητα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τον –α για κάθε πραγματικό αριθμό α. Ορίζουμε:

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός, τότε

- α = {x στο ✈: το –x δεν ανήκει στο α, αλλά το –x δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈-α}

όπου ✈ – α = { x στο ✈ : το x δεν ανήκει στον α}.

<u>Ο –α είναι ένας πραγματικός αριθμός.</u>

(1) Έστω ότι το x ανήκει στον –α και $y < x$. Τότε $–y > -x$. Αφού το –x δεν ανήκει στον α προφανώς και το –y δεν ανήκει στον α και δεν μπορεί να είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈ – α, αφού $–x < -y$. Άρα το y ανήκει στον –α.

(2) Προφανώς, αφού α πραγματικός, υπάρχει ρητός x που δεν ανήκει στον α και δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του ✈ – α (γιατί τότε θεωρούμε κάποιο $y > x$). Άρα το –α δεν είναι κενό.

(3) Αφού το α δεν είναι κενό, έστω x στο α. Το –x δεν μπορεί τότε να ανήκει στο –α, άρα το –α δεν είναι ολόκληρο το ✈.

(4) Τέλος, αν το x ανήκει στο –α, οπότε το –x δεν ανήκει στο α και υπάρχει κάποιος ρητός $y < -x$ ο οποίος επίσης δεν ανήκει στον α. Έστω z ένας ρητός με $y < z < -x$. Τότε ούτε το z ανήκει στο α και δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈ – α. Άρα το –z ανήκει στο –α και $– z > x$. Άρα το –α δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστούμε την **αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδη** για τους ρητούς: «Για κάθε δύο ρητούς αριθμούς w και z με $z < w$, μπορεί να βρεθεί ένας φυσικός αριθμός n ώστε $w < nz$». Η ιδιότητα αυτή θα χρειαστεί στην απόδειξη του ακόλουθου λήμματος και του επόμενου θεωρήματος.

Λήμμα: Έστω α ένας πραγματικός αριθμός και z ένας θετικός ρητός αριθμός. Τότε υπάρχουν ρητοί αριθμοί x στο α και y που δεν ανήκει στο α, τέτοιοι ώστε

$$y - x = z.$$

Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι το y δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του Q–α.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το z ανήκει στον α. Αν οι αριθμοί z, 2z, 3z, …ανήκουν όλοι στον α, τότε όλο το $\mathbb{Q}$ ανήκει στον α, αφού $w < nz$ για κάποιον n. Άρα υπάρχει κάποιος n ώστε το $x = nz$ να ανήκει στο α και το $y = (n + 1)z$ να μην ανήκει στο α. Προφανώς $y – x = z$.

Αν το y είναι το ελάχιστο στοιχείο του Q – α, θέτουμε $x' > x$ ένα στοιχείο του και αντικαθιστούμε το x με το x΄ και το y με το $y + (x' – x)$.

Αν το z δεν ανήκει στο α υπάρχει μια παρόμοια απόδειξη, που βασίζεται στο γεγονός ότι οι αριθμοί (-n)z δεν ανήκουν όλοι στο α.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη του συμμετρικού στοιχείου κάθε πραγματικού.

Έστω x που ανήκει στο α και y που ανήκει στο –α. Τότε το –y δεν ανήκει στο α, άρα $–y > x$. Επομένως $x + y < 0$, άρα το $x + y$ ανήκει στο **0**. Έτσι κάθε στοιχείο του α + (-α) είναι στοιχείο του **0**.

Αντίστροφα, αν το z ανήκει στο **0**, τότε $–z > 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα, υπάρχουν κάποιο x στο α και κάποιο y όχι στο α, ώστε το y να μην είναι το ελάχιστο στοιχείο του Q- α και $y – x = -z$. Τότε όμως $x+(-y) = z$. Άρα z είναι στοιχείο του α + (-α).

Θεώρημα (*11ο Αξίωμα του ☼*): Αν για τα α, β ♏ ☼ έχουμε $α \leq β$, τότε για κάθε γ ♏ ☼ ισχύει ότι $α + γ \leq β + γ$.

Απόδειξη

Αν x ♏ (α + γ), δηλαδή $x = y + z$, με y ♏ α και z ♏ γ, τότε, αφού $α \leq β$, το y ♏ β και επομένως το (y + z) ♏ (β + γ). Άρα $α + γ \leq β + γ$.

Θετικά στοιχεία - Πολλαπλασιασμός

Ορισμός (θετικών στοιχείων): P = {α στο $\mathbb{R}$: α > **0**}

Παρατηρείστε ότι αν τα α και β ανήκουν στο P, τότε και το άθροισμά τους α + β ανήκει στο P.

Θεώρημα: Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει μία και μόνο μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) α = **0**

(ii) ο α ανήκει στο P

(iii) ο –α ανήκει στο P

Απόδειξη

Αν ο α περιέχει οποιονδήποτε θετικό ρητό αριθμό, τότε περιέχει και το 0 και επομένως δεν μπορεί να είναι το **0**. Δηλαδή τότε ο α ανήκει στο P. Αν ο α δεν περιέχει θετικούς ρητούς, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

- Ο α να περιέχει όλους τους αρνητικούς ρητούς, οπότε α = **0**.

- Να υπάρχει κάποιος αρνητικός ρητός αριθμός x που να μην ανήκει στον α. Τότε ο –α περιέχει τον θετικό ρητό αριθμό –x, οπότε ο –α ανήκει στο P. (Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο x δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈ – α, γιατί τότε θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τον x με τον $x/2$ > x).

Άρα, αν α = **0**, είναι φανερό ότι δεν μπορεί να ισχύει κάποια από τις άλλες δύο. Επίσης είναι αδύνατο να ισχύουν ταυτόχρονα οι (ii) και (iii), γιατί τότε θα είχαμε και 0 = α + (-α) > 0.

Θεώρημα: Ισχύει η ισοδυναμία: α < β ➓ β – α ♏ P.

Απόδειξη

Από το 11$^{\text{ο}}$ Αξίωμα που αποδείξαμε, α ≤ β σημαίνει ότι α + γ ≤ β + γ. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι α < β (δηλαδή ότι τα α και β δεν είναι ίσα) τότε προφανώς ισχύει και ότι α + γ < β + γ. Πράγματι, αν α + γ = β + γ, τότε

α = α + **0** = α + [γ + (-γ)] = (α + γ) + (-γ) = (β + γ) + (-γ) = β + [γ + (-γ) = β + **0** = β

που προφανώς δεν ισχύει.

Τότε όμως α < β σημαίνει ότι α + (-α) < β + (-α) ή β – α > **0**, δηλαδή β – α ♏ P και αντιστρόφως, αν β – α > 0, τότε β > α.

Ορισμός (πολλαπλασιασμού): Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και α, β > **0**, τότε α·β = {z : z ≤ 0 ή z = x · y για κάποιο x στον α και y στον β, με x, y > 0}

Θεώρημα: Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί με α, β > **0** τότε το γινόμενο α·β είναι πραγματικός αριθμός και μάλιστα θετικός.

Απόδειξη

(1) Υποθέτουμε ότι w < z, όπου το z ανήκει στο α·β. Αν w ≤ 0, τότε το w ανήκει στο α·β. Ας υποθέσουμε ότι w > 0. Τότε z > 0, άρα z = xy για κάποιο θετικό ρητό x στο α και για κάποιο θετικό ρητό y στο β. Τώρα

$$w = \frac{wz}{z} = \frac{wxy}{z} = (\frac{w}{z} \cdot x) \cdot y$$

και αφού 0 < w < z, είναι (w/z) x < x δηλαδή ανήκει στον α. Άρα το w ανήκει στον α·β.

(2) Προφανώς α · β ≠ ➦.

(3) Αν το x δεν ανήκει στο α και το y δεν ανήκει στο β, τότε x > x΄ για κάθε x΄ στο α και y > y΄ για κάθε y΄ στο β. Επομένως xy > x΄y΄ για όλα τα θετικά x΄ και y΄ με αυτή την ιδιότητα. Άρα το xy δεν ανήκει στο α·β και επομένως το α·β ≠ ✈.

(4) Υποθέτουμε ότι το w ανήκει στο α·β και w ≤ 0. Υπάρχει κάποιο x > 0 στο α και κάποιο y > 0 στο β, οπότε το z = xy ανήκει στο α·β και είναι z > 0, άρα w < z. Ας υποθέσουμε ότι το w > 0. Τότε w = xy, για κάποιο θετικό x στο α και για κάποιο θετικό y στο β. Επίσης το α περιέχει κάποιο x΄ > x (αφού δεν έχει μέγιστο στοιχείο). Αν z = x΄y, τότε z > xy = w και το z ανήκει στο α·β. Δηλαδή το α·β δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Το ότι το γινόμενο δύο θετικών είναι θετικός προκύπτει άμεσα, αφού υπάρχει θετικός ρητός x στον α και θετικός ρητός y στον β, οπότε ο ρητός xy > 0 ανήκει στον α·β και επομένως ο α·β ανήκει στο P. (*12^{ο} Αξίωμα του ☼*)

Για να συμπληρώσουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών πρέπει να ορίσουμε πρώτα την απόλυτη τιμή του α.

Ορισμός: Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha \ , & \alpha\nu\ \alpha \geq \mathbf{0} \\ -\alpha \ , & \alpha\nu\ \alpha < \mathbf{0} \end{cases}$$

Ορισμός: Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \mathbf{0} \ , & \alpha\nu\ \alpha = \mathbf{0} \text{ ή } \beta = \mathbf{0} \\ |\alpha| \cdot |\beta| \ , & \alpha\nu\ \alpha > \mathbf{0}\ \kappa\alpha\iota\ \beta > \mathbf{0} \text{ ή } \alpha\nu\ \alpha < \mathbf{0}\ \kappa\alpha\iota\ \beta < \mathbf{0} \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|) \ , & \alpha\nu\ \alpha > \mathbf{0}\ \kappa\alpha\iota\ \beta < \mathbf{0} \text{ ή } \alpha\nu\ \alpha < \mathbf{0}\ \kappa\alpha\iota\ \beta > \mathbf{0} \end{cases}$$

Επομένως για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού συνήθως ανάγουμε ο πρόβλημα στην περίπτωση των θετικών αριθμών.

Πρόταση: Για το σύνολο των πραγματικών αριθμών και την πράξη του πολλαπλασιασμού ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(Αντιμεταθετική) Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

(5^{o} *Αξίωμα του* ☼) α · β = β · α

(Προσεταιριστική) Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

(6^{o} *Αξίωμα του* ☼) α · (β · γ) = (α · β) · γ

(Ουδέτερο στοιχείο) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει

(7^{o} *Αξίωμα του* ☼) α · **1** = α , όπου **1** = {x στο ✈ : x < 1}

(Ύπαρξη αντιστρόφου) Για κάθε α θετικό πραγματικό αριθμό, υπάρχει ο $α^{-1}$,

(8^{o} *Αξίωμα του* ☼) ώστε α · $α^{-1}$ = **1**.

Απόδειξη

Αν α > 0 και β > 0, τότε από την ισότητα των ρητών xy = yx προκύπτει το ζητούμενο.

Αν α < 0 και β < 0, τότε (-α) · (-β) > 0 και επομένως α · β = (-α) · (-β) = (-β) · (-α) = β · α.

Τέλος, αν α > 0 και β < 0, τότε πάλι, α · β = - [α · (-β)] = -[(-β) · α] = β · α, αφού α·(-β)>0.

Η προσεταιριστική ιδιότητα είναι επίσης προφανής από την αντίστοιχη ιδιότητα των ρητών, όταν οι α, β και γ είναι θετικοί. Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται όπως πριν.

Για την ύπαρξη του ουδέτερου στοιχείου, αν α > 0, τότε κάθε στοιχείο του α · **1** είναι και στοιχείο του α (αν z ρητός που ανήκει στο **1**, τότε επειδή z < 1 είναι zx < x για κάθε x στον α, με x > 0). Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι κάποιο x ανήκει στο α. Αν x ≤ 0 τότε το x αυτομάτως ανήκει και στο α · **1**. Αν x > 0, τότε υπάρχει ρητός y στο α με x < y. Τότε x = y (x/y) και το x/y ανήκει στο **1**. Άρα α · **1** = α.

Αν α < 0, τότε α · **1** = - (|α| · |**1**|) = -(|α|) = α.

Τέλος είναι προφανές όταν α = **0**.

Ορίζουμε για α > 0 τον αντίστροφο του α ως εξής:

$α^{-1}$ = {x στο ✈: x ≤ 0 ή x > 0 και το 1/x δεν ανήκει στο α, αλλά το 1/x δεν είναι το μικρότερο στοιχείο του ✈ – α}

Αν α < 0, τότε $α^{-1}$ = - ($|α|^{-1}$).

Προφανώς χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που α > 0. Έχουμε:

(1) Έστω ότι $y < x$ και ότι το x ανήκει στο $α^{-1}$. Αν $y \leq 0$, τότε το y ανήκει στο $α^{-1}$. Αν $y > 0$, τότε $x > 0$ και το $1/x$ δεν ανήκει στο α. Αφού $1/y > 1/x$ έπεται ότι ούτε το $1/y$ ανήκει στο α και το $1/y$ δεν είναι το μικρότερο στοιχείο του ✈ - α. Άρα το y ανήκει στο $α^{-1}$.

(2) Προφανώς ο $α^{-1}$ δεν είναι το κενό σύνολο.

(3) Αφού $α > 0$, ο α περιέχει κάποιο θετικό ρητό, έστω x. Τότε ο $1/x$ είναι ρητός και δεν ανήκει στον $α^{-1}$. Άρα ο $α^{-1}$ δεν ταυτίζεται με το ✈.

(4) Υποθέτουμε ότι το x ανήκει στο $α^{-1}$. Αν $x \leq 0$, τότε προφανώς δεν είναι μέγιστο στοιχείο, αφού ο $α^{-1}$ περιέχει κάποιον θετικό ρητό. Αν $x > 0$, τότε το $1/x$ δεν ανήκει στον α. Αφού το $1/x$ δεν είναι το μικρότερο στοιχείο του ✈ - α, υπάρχει ένας ρητός y όχι στο α, με $y < 1/x$. Διαλέγουμε έναν ρητό αριθμό z με $y < z < 1/x$. Τότε το $1/z$ ανήκει στο α και $1/z > x$. Άρα το $α^{-1}$ δεν περιέχει κάποιο μέγιστο στοιχείο.

Για να αποδείξουμε ότι ο $α^{-1}$ είναι πράγματι ο αντίστροφος του α χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα: Έστω α ένας πραγματικός αριθμός με $α > 0$ και z ένας ρητός αριθμός με $z > 1$. Τότε υπάρχουν ρητοί αριθμοί x στο α και y που δεν ανήκει στο α, τέτοιοι, ώστε $y/x = z$. Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι το y δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈ - α.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το z ανήκει στο α. Αφού $z – 1 > 0$ και

$$z^n = (1 + (z – 1))^n \geq 1 + n(z – 1)$$

έπεται ότι οι αριθμοί $z, z^2, z^3, \ldots$ δεν μπορούν όλοι να βρίσκονται στο α. Προφανώς για κάποιον εκθέτη κ, το $x = z^{κ-1}$ ανήκει στο α ενώ το $y = z^κ$ δεν ανήκει. Τότε όμως $y/x = z$. Επιπλέον, αν το y είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈ - α, παίρνουμε ένα $x΄ > x$ στοιχεία του α και αντικαθιστούμε το x με το x΄ και το y με το yx'/x.

Αν το z δεν ανήκει στο α, μπορούμε να δώσουμε ανάλογη απόδειξη βασιζόμενοι στο γεγονός ότι κάποιος αριθμός της μορφής $1/z^n$ πρέπει να ανήκει στο α.

(Απόδειξη $8^{ου}$ Αξιώματος): Έστω x θετικός ρητός στο α και y θετικός ρητός στο $α^{-1}$. Τότε το $1/y$ δεν ανήκει στο α, άρα $1/y > x$ επομένως $xy < 1$, που σημαίνει ότι το xy ανήκει στο **1**. Άρα κάθε στοιχείο του $α \cdot α^{-1}$ ανήκει στο **1**.

Για να αποδείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό ας θεωρήσουμε έναν ρητό z στο **1**. Αν $z \leq 0$, τότε είναι φανερό ότι το z ανήκει στο $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. Ας υποθέσουμε ότι $0 < z < 1$. Σύμφωνα με το Λήμμα, υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί x στο α και y όχι στο α, τέτοιοι ώστε $y/x = 1/z$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το y δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του ✈ - α. Αυτό όμως σημαίνει ότι z = x (1/y), όπου το x ανήκει στο α και το 1/y ανήκει στο α^{-1}. Επομένως το z ανήκει στο $\alpha \cdot \alpha^{-1}$.

Έχουμε σχεδόν τελειώσει. Με την προσθήκη της **επιμεριστικής ιδιότητας** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση θα κλείσουμε την απόδειξη όλων των αξιωμάτων.

Θεώρημα (*9ο Αξίωμα του ☼*): Αν α , β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε αρχικά ότι α, β, γ > **0**. Τότε και οι δύο αριθμοί στην ισότητα περιέχουν όλους τους ρητούς αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το 0. Ένας θετικός ρητός αριθμός στο $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ είναι της μορφής $x \cdot (y + z)$ για θετικά x στο α, y στο β και z στο γ. Αφού $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, όπου $x \cdot y$ είναι θετικό στοιχείο του $\alpha \cdot \beta$ και $x \cdot z$ είναι θετικό στοιχείο του $\alpha \cdot \gamma$, αυτός ο αριθμός ανήκει στο $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Άρα κάθε στοιχείο του $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ ανήκει και στο $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Αντίστροφα, ένας θετικός ρητός αριθμός στο $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ είναι της μορφής $x_1 \cdot y + x_2 \cdot z$, για θετικά x_1, x_2 στο α, y στο β και z στο γ. Αν $x_1 \leq x_2$, τότε $\frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot y \leq y$, άρα το $\frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot y$ ανήκει στο β. Άρα το

$$x_1 \cdot y + x_2 \cdot z = x_2 \cdot [\frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot y + z]$$

ανήκει στο $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$. Φυσικά το ίδιο τέχνασμα δουλεύει και αν $x_2 \leq x_1$.

Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου τα α, β, γ δεν είναι όλα στο P. Αν κάποιο από τα τρία είναι ίσο με **0**, η απόδειξη είναι απλή και οι περιπτώσεις όπου α < **0** ελέγχονται εύκολα αν έχουμε εξετάσει όλες τις περιπτώσεις για τα β και γ. Έτσι, υποθέτουμε ότι α > **0** και εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις: (i) β , γ < **0**, (ii) β < **0** και γ > **0**, (iii) β > **0** και γ < **0**. Η πρώτη περίπτωση έπεται άμεσα από την περίπτωση που έχουμε αποδείξει και η τρίτη περίπτωση έπεται από τη δεύτερη με απλή εναλλαγή των β και γ. Επομένως, επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $\beta < \mathbf{0}$ και $\gamma > \mathbf{0}$. Υπάρχουν τότε δύο ενδεχόμενα:

(1) $\beta + \gamma \geq \mathbf{0}$. Τότε $\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot ([\beta + \gamma] + |\beta|) = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot |\beta|$ άρα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

(2) $\beta + \gamma \leq \mathbf{0}$. Τότε $\alpha \cdot |\beta| = \alpha \cdot (|\beta + \gamma| + \gamma) = \alpha \cdot |\beta + \gamma| + \alpha \cdot \gamma$ άρα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -(\alpha \cdot |\beta + \gamma|) = -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Η συγκεκριμένη ενότητα ήταν μάλλον κουραστική και κάποιες φορές ανιαρή μέσα στην αυστηρότητά της. Όμως δείχνει με τρόπο ξεκάθαρο τη δύναμη που έχει ο κατάλληλος ορισμός στο να απαλλάσσει τα μαθηματικά από τη χρήση αξιωμάτων. Με αυτό δεν υποστηρίζουμε ότι όλα τα μαθηματικά πρέπει να ακολουθούν αυτή την οδό. Αυτό που αποτελεί συμπέρασμα είναι το ότι ασφαλώς χρειάζεται αυστηρή θεμελίωση κάθε έννοιας και αυτή επιτυγχάνεται μέσω των ορισμών. Αν δεν υπάρχουν κατάλληλοι ορισμοί, τότε, όπως και ο Αριστοτέλης θεωρεί, οφείλουμε να επισυνάψουμε στη θεωρία μας τα κατάλληλα αιτήματα – αξιώματα που θα μας επιτρέψουν τη σωστή και πλήρη θεμελίωση. Όμως δεν πρέπει να μας ξεγελά η ανεμπόδιστη παραγωγή μαθηματικών αποτελεσμάτων. Δεν πρέπει να ξεχνάμε τις ρίζες των μαθηματικών μας και πάντα πρέπει να έχουμε το βλέμμα και το πνεύμα μας στραμμένο σε αυτές, αναζητώντας να τις «καθαρίσουμε» και να τις «φωτίσουμε» όσο το δυνατόν περισσότερο. Άλλωστε τα μαθηματικά οφείλουν να είναι η προσπάθεια του ανθρώπου να αντιληφθεί και να επικοινωνήσει το Όν.

3.3. Άλλα παραδείγματα

Το όριο (και γενικά οι οριακές καταστάσεις) αποτελούσε μια πολύ σκοτεινή έννοια ακόμα από την αρχαιότητα. Αν θυμηθούμε τα παράδοξα που διατύπωσε ο Ζήνωνας, αντιλαμβανόμαστε πως κάθε προσπάθεια κατανόησης του απείρως μικρού σκόνταφτε σε σοβαρά επιστημολογικά εμπόδια. Το σημαντικότερο από αυτά ήταν η γεωμετρική θεώρηση των μαθηματικών. Ας δούμε από λίγο πιο κοντά ένα από τα παράδοξα αυτά, το παράδοξο του Αχιλλέα, σύμφωνα με το οποίο: «Ο Αχιλλέας και μια χελώνα πρόκειται να αγωνιστούν σε αγώνα ταχύτητας. Η χελώνα ξεκινάει τον αγώνα 100 μέτρα πιο μπροστά από τον Αχιλλέα, ο οποίος τρέχει 100 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Όταν ο Αχιλλέας θα έχει φτάσει στη θέση που αρχικά βρίσκεται η χελώνα, τότε η χελώνα θα έχει προχωρήσει κατά ένα μέτρο. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στη νέα θέση της χελώνας, τότε εκείνη θα βρίσκεται 1 εκατοστόμετρο πιο μπροστά. Τελικά, όταν ο Αχιλλέας φτάνει στη θέση της χελώνας εκείνη έχει προχωρήσει κατά το 1/100 της προηγούμενης απόστασής τους και επομένως ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ τη χελώνα». Ένα παρόμοιο παράδοξο είναι αυτό με το δρομέα που πρέπει να καλύψει μια απόσταση ενός; σταδίου και κάθε φορά διανύει τη μισή απόσταση από αυτή που υπολείπεται, οπότε δεν φτάνει ποτέ στο τέρμα.

Ο Ζήνωνας με αυτά τα παράδοξα δεν ισχυρίζεται ότι πραγματικά ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ τη χελώνα ή ότι ο δρομέας δεν θα φτάσει ποτέ στο τέρμα. Απλά προσπαθούσε να αντικρούσει την άποψη που διατύπωναν οι Πυθαγόρειοι, ότι τα αισθητά πράγματα ταυτίζονται με τα νοητά. Η πραγματική κίνηση του Αχιλλέα τον φέρνει γρήγορα μπροστά από τη χελώνα και φέρνει τον δρομέα στο τέρμα μέσα σε πεπερασμένο χρόνο. Αντίθετα, η κίνηση που περιγράφει ο Ζήνωνας, η οποία είναι νοητή, διαφοροποιεί το αποτέλεσμα.

Ουσιαστικά η διαμάχη βρισκόταν στο κατά πόσο μια ευθεία αποτελείται από άπειρα σημεία, διακριτά μεταξύ τους, τέτοια ώστε η θέση του δρομέα ή του Αχιλλέα να μπορεί να είναι οποιοδήποτε από αυτά και ταυτόχρονα όλα μαζί. Δηλαδή στη γεωμετρική αναπαράσταση του προβλήματος.

Κατά τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα, με την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, η έννοια του απειροστού απέκτησε κεντρική θέση και ταυτόχρονα οδήγησε με τη χρήση του σε μεγάλα προβλήματα και ασάφειες. Κατά τη διαδικασία της αλγεβροποίησης του απειροστικού λογισμού εισάγονται οι έννοιες της μεταβλητής και της συνάρτησης με τον Euler το 1755 να δίνει έναν γενικότερο ορισμό.

«*Αν μέγεθος εξαρτάται από άλλα, κατά τέτοιο τρόπο ώστε,*
αν τα τελευταία μεταβληθούν και τα πρώτα να υφίστανται μια μεταβολή,
τότε τα πρώτα ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων».

Στη συνέχεια ο Cauchy ήταν αυτός που εισήγαγε πολλούς σημαντικούς ορισμούς, που έγιναν αποδεκτοί σχεδόν αμέσως από τη μαθηματική κοινότητα και προκάλεσαν μια μεγάλη αλλαγή στον απειροστικό λογισμό. Συγκεκριμένα επέλεξε τις έννοιες του ορίου, της σύγκλισης, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος και θεώρησε ως βασική έννοια την έννοια του ορίου, πάνω στην οποία βάσισε όλες τις υπόλοιπες έννοιες.

Αρχικά μελέτησε την έννοια του ορίου καθαρά αριθμητικά, εφόσον θεώρησε απαραίτητο να την απαλλάξει από κάθε γεωμετρική αναπαράσταση. Το 1821, στο έργο του «Cours d’ analyse» έδωσε τον δικό του ορισμό για το όριο. Πρώτα όρισε την μεταβλητή ως «*μια ποσότητα που θεωρείται ως διαδοχή πολλών τιμών, διαφορετικών μεταξύ τους*». Στη συνέχεια ακολούθησε ο ορισμός της συνάρτησης: «*Όταν οι μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε, όταν δίνεται η τιμή της μιας, κάποιος να μπορεί να ορίσει τις τιμές των άλλων, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι διάφορες ποσότητες μπορούν να εκφραστούν μέσω μιας από αυτές, η οποία παίρνει το όνομα της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι εκείνες που ονομάζονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής*». Τέλος ήταν έτοιμος να δώσει τον ορισμό του ορίου: «*Όταν οι τιμές που δίνονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή πλησιάζουν διαρκώς μια σταθερή τιμή από την οποία διαφέρουν τόσο λίγο, οσοδήποτε θα επιθυμούσε κανείς, αυτή η σταθερή τιμή καλείται όριο όλων των άλλων*». Στη συνέχεια έδωσε τον ορισμό του απειροστού και του απείρου.

Όταν το τελικά ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί από τον Dedekind, ο Weierstrass έδωσε τον (αλγεβρικό) ορισμό του ορίου. Ο ορισμός αυτός ήταν ένας «στατικός» ορισμός σε αντίθεση με τον ορισμό του Cauchy που ήταν διαισθητικός και «κινηματικός» (η τιμή της μεταβλητής «πλησιάζει» το όριο). Ήταν ένας ορισμός που χρησιμοποιείται και σήμερα αλλά πάνω απ’ όλα φαίνεται ότι ήταν ο «κατάλληλος» ορισμός στα πρότυπα του Αριστοτέλη:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \iff \textit{Για κάθε } \varepsilon > 0 \textit{ υπάρχει } \delta > 0,$$

ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της f με

$0 < |x - x_0| < \delta$ ❾ $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

Με αυτό τον τρόπο ο Weierstrass απομάκρυνε τα απειροστά από τον λογισμό. Με την εισαγωγή γενικότερα των ε – δ διαδικασιών, έπαψαν πλέον να υπάρχουν ασαφείς εκφράσεις και όλες οι βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού διατυπώθηκαν πλέον με προσοχή και σαφήνεια, βασισμένες στους πραγματικούς αριθμούς και τις θεμελιώδεις πράξεις και σχέσεις που τους διέπουν. Για μια ακόμη φορά, η διατύπωση του κατάλληλου ορισμού οδήγησε τα μαθηματικά στο να ξεκαθαρίσουν και να αποδείξουν αυτά που φαίνονται προφανή στην αντίληψη ή στη νόηση αλλά που δεν ήταν δυνατόν να αποδειχθούν νωρίτερα.

Μπορούμε να αναφέρουμε και άλλες τέτοιες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Η έννοια του φανταστικού αριθμού εμφανίστηκε για πρώτη φορά από την ανάγκη επίλυσης της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Κατά τη λύση μιας τέτοιας εξίσωσης που έχει τρεις πραγματικές λύσεις, χρειάστηκε να υπολογιστεί η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού. Αυτό όμως δεν μπορούσε να είναι ένας πραγματικός αριθμός και έτσι προέκυψε η ιδέα του φανταστικού αριθμού και στη συνέχεια του μιγαδικού αριθμού. Η ιδέα αυτή προήλθε από τους Ιταλούς μαθηματικούς N Fontana, τον επονομαζόμενο Tartaglia, τον G. Gardano και τον R. Bombelli. Στη συνέχεια η ιδέα του μιγαδικού αριθμού προωθήθηκε από τον Euler και τον Gauss. Ειδικά ο δεύτερος έδωσε γεωμετρική ερμηνεία στην έννοια του μιγαδικού αριθμού και θεωρούσε ότι μεταξύ των μιγαδικών αριθμών και του συνόλου των σημείων του επιπέδου υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα. Μάλιστα ο Wessel σε μια εργασία του παρέστησε κάθε μιγαδικό αριθμό με ένα διάνυσμα του επιπέδου και οι πράξεις των μιγαδικών αριθμών ορίζονταν όπως οι πράξεις των διανυσμάτων.

Το 1937, ο William Hamilton όρισε τους μιγαδικούς αριθμούς ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, χωρίς τη χρήση ειδικού συμβόλου ($\sqrt{-1}$ ή i) και έτσι αυτοί αποδεσμεύτηκαν από τη γεωμετρία και μπόρεσε να γίνει πλήρως κατανοητή η δομή τους.

Ορισμός: Ένας μιγαδικός αριθμός είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο πραγματικών αριθμών.

z = (α , β) , με α ♏ ☼ και β ♏ ☼

Οι μιγαδικοί αριθμοί υπάρχουν αφού υπάρχουν οι πραγματικοί αριθμοί και είναι γνωστός ο ορισμός της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών 👍, το οποίο μάλιστα περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς ως στοιχεία του (ένας πραγματικός αριθμός α ταυτίζεται με τον μιγαδικό αριθμό (α,0)).

Οι πράξεις που ορίζονται στο σύνολο 👍 είναι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών, τις οποίες για λόγους απλότητας συμβολίζουμε όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Είναι:

$$(\alpha , \beta) + (\gamma , \delta) = (\alpha + \gamma , \beta + \delta)$$

$$(\alpha , \beta) \cdot (\gamma , \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta , \alpha\delta + \beta\gamma)$$

4. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η αξιωματική θεμελίωση μιας μαθηματικής θεωρίας υπήρξε κατάκτηση του αρχαιοελληνικού πνεύματος και ως τέτοια αποτέλεσε κληρονομιά του επιστημονικού κόσμου. Όταν ο διαφωτισμός ανέσυρε αυτή την κληρονομιά από τη λήθη του Μεσαίωνα, οι ψηφίδες της ερμηνεύτηκαν υπό το πρίσμα της εποχής. Το πνεύμα της λαμπρής εποχής αλλοιώθηκε και, όπως ακριβώς έγινε και με την προφορά της γλώσσας, χάθηκε στις δαιδαλώδεις γραφές και αναπαραγωγές κειμένων και ερμηνειών. Νέα προβλήματα και νέες οπτικές σε συνδυασμό με τη χριστιανική παράδοση περί αυθεντίας, οδήγησαν σε μια νέα οριοθέτηση της αξιωματικοποίησης των μαθηματικών. Όπως πριν από δύο χιλιετίες η ανακάλυψη των αρρήτων οδήγησε ουσιαστικά στη θεμελίωση των μαθηματικών έτσι και τώρα η ανάδειξη των δομικών προβλημάτων (απειροστά, παράδοξα, κ.ά.) οδήγησε σε μια νέα θεμελίωση, η οποία όμως μόνο κατ' όνομα είναι η ίδια με του παρελθόντος. Στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά η θεμελίωση πραγματοποιείται μέσα στο νου με τη χρήση της λογικής αλλά και της ενόρασης. Το ζητούμενο ήταν να κατανοηθεί αυτό που υπάρχει και να περιγραφούν οι δομές και οι λειτουργίες του. Τώρα, το πραγματικό αντικείμενο υποβιβάζεται ή και εξοστρακίζεται και ζητούμενο αποτελούν μόνο οι σχέσεις και οι καταστάσεις.

Παρόλα αυτά, σε ένα σημείο οφείλει να συμφωνεί η μαθηματική κοινότητα, ανεξάρτητα εποχής. Η ανακάλυψη της απόδειξης οριστικοποίησε την έννοια των μαθηματικών. Πριν την ανακάλυψη αυτή τα «μαθηματικά», παρά τις προόδους που έκαναν στον τομέα της γενίκευσης και της πρακτικής εφαρμογής, δεν ήταν μαθηματικά. Είχαν ένα λογιστικό, εμπειρικό χαρακτήρα. Η απόδειξη, ως τρόπος μετάβασης από μία ή περισσότερες προτάσεις σε μια τελική πρόταση, αποτελεί τη σίγουρη μέθοδο για την ανακάλυψη νέων μαθηματικών προτάσεων, στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας. Αν τα αξιώματα της θεωρίας είναι αληθή, στο πλαίσιο μιας δομής ή ερμηνείας της γλώσσας της θεωρίας, τότε και οι προτάσεις που προκύπτουν από αυτά είναι αληθείς στα πλαίσια της ίδιας δομής. Με ποιο τρόπο όμως καθορίζεται μια μαθηματική θεωρία;

Για κάθε σωστό Πλατωνιστή, η ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων είναι ένα αντικειμενικό γεγονός, εντελώς ανεξάρτητο από τη γνώση μας γι αυτό. Φυσικά, αυτά τα αντικείμενα δεν είναι υλικά. Υπάρχουν έξω από το χωροχρόνο της φυσικής ύπαρξης. Είναι αμετάβλητα, δε δημιουργήθηκαν και δεν πρόκειται να αλλάξουν ή να εξαφανιστούν. Κάθε λογική ερώτηση σχετικά με ένα μαθηματικό αντικείμενο έχει μια συγκεκριμένη απάντηση, ανεξάρτητα από το αν τη γνωρίζουμε ή όχι. Για παράδειγμα, για έναν Πλατωνιστή, η ύπαρξη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών δεν αμφισβητείται. Υπήρχαν πάντα και περίμεναν για να τα ανακαλύψουμε.

Από την άλλη μεριά, για τον φορμαλιστή, δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα ως αυθύπαρκτες οντότητες. Τα μαθηματικά αποτελούνται απλώς από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα – με άλλα λόγια από τύπους. Υπάρχουν κανόνες με τους οποίους φθάνουμε από τον έναν τύπο στον άλλο, αλλά οι τύποι αυτοί δεν αφορούν τίποτε. Πιο σωστά θα λέγαμε ότι ο φορμαλιστής δεν ενδιαφέρεται για το αν αυτοί οι τύποι σημαίνουν κάτι. Εκεί εντοπίζεται και η πραγματική διαφορά της σημερινής αντιμετώπισης μιας αξιωματικής θεωρίας.

Μια μαθηματική δομή αποτελείται από ένα σύνολο αντικειμένων Σ, που μπορεί να θεωρηθεί ο φορέας της δομής, ένα σύνολο λειτουργιών ή σχέσεων που ορίζονται πάνω στο φορέα και ένα σύνολο διακεκριμένων στοιχείων του φορέα, ας πούμε 0, 1 κτλ. Αυτά τα βασικά συστατικά αποτελούν την **υπογραφή** της δομής. Όταν μια υπογραφή υπόκειται σε ένα σύνολο αξιωμάτων που θέτουν κάποια προαπαιτούμενα πάνω στα στοιχεία του, τότε εμφανίζεται μια **μαθηματική δομή**. Προφανώς δεν είναι απαραίτητο για έναν μαθηματικό να γνωρίζει το τι είναι ή δεν είναι τα μαθηματικά αντικείμενα μιας θεωρίας με την οποία έρχεται σε επαφή. Όμως, αν μια μαθηματική δομή χρησιμοποιείται συχνά για μια μεγάλη χρονική περίοδο και πάνω σε αυτή δομείται ένα δίκτυο εμπειριών και ενόρασης, τότε αυτή μπορεί να θεωρηθεί (ή και να γίνει) ένα μαθηματικό αντικείμενο. Τότε είναι πιθανό να κατανοηθεί το πραγματικό νόημα του μαθηματικού αντικειμένου και έτσι να προκύψει ένας ορισμός γι αυτό. Ο ορισμός αυτός με τη σειρά του, κατά το αρχαιοελληνικό πρότυπο, αν είναι ο κατάλληλος θα οδηγήσει στην απαλλαγή της δομής από την αναγκαιότητα των αξιωμάτων και θα καταστήσει προφανή τόσο τα στοιχεία του Σ όσο και την ίδια τη μαθηματική δομή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Δ. Αναπολιτάνος: *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 1985

[2] Δ. Αναπολιτάνος (επιμέλεια): *Στιγμές και Διάρκειες*, εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 2009

[3] Αριστοτέλης: *Όργανον 1 (Κατηγορίαι – Περί Ερμηνείας),* Άπαντα τόμος 23, Σειρά «Οι Έλληνες – 212», εκδόσεις Κάκτος, Αθήνα 1994

[4] Αριστοτέλης: *Όργανον 2 (Τοπικά Α – Ε),* Άπαντα τόμος 24, Σειρά «Οι Έλληνες – 213», εκδόσεις Κάκτος, Αθήνα 1994

[5] H. Butterfield: *Η Καταγωγή της Σύγχρονης Επιστήμης (1300 – 1800)*, εκδόσεις Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα 2005

[6] Ε. Μ. Γιαννακούλιας: *Απειροστικός Λογισμός (η Ιστορική του Εξέλιξη)*, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2007

[7] P.S. Davis και R. Hersh: *Η Μαθηματική Εμπειρία*, εκδόσεις Τροχαλία

[8] Ευκλείδης : *Στοιχεία, τόμοι Ι, ΙΙ, ΙΙΙ*, εκδόσεις Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα 2001

[9] V. Farrington: *Η Επιστήμη στην Αρχαία Ελλάδα*, εκδόσεις Κάλβος, Αθήνα 1969

[10] D.Hilbert: *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα 1995

[11] T. L. Heath: *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών Τόμος Ι (από το Θαλή στον Ευκλείδη)*, Εκδόσεις Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα 2001

[12] Χ. Κηπουρός: *Ήρωνος Αλεξανδρέως Ονόματα Γεωμετρικών Όρων – Γεωμετρικά,* εκδόσεις Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα 1995

[13] T. S. Kuhn: *Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων*, εκδόσεις Σύγχρονα θέματα, Θεσσαλονίκη 1987

[14] O. Neugebauer: *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα,* εκδόσεις Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα 2003

[15] Πρόκλος : *Εις Πρώτον Ευκλείδου Στοιχείων,* Άπαντα τόμος 32, Σειρά «Οι Έλληνες – 652», εκδόσεις Κάκτος, Αθήνα 2007

[16] L. Russo: *Η Λησμονημένη Επανάσταση*, εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 2006

[17] Γ. Ρουσόπουλος: *Επιστημολογία των Μαθηματικών*, εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα 1991

[18] Χ. Στράντζαλος: *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών,* εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα 1987

[19] R. L. Wilder: *Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών*, εκδόσεις Κουτσουμπός Α.Ε., Αθήνα 1986

[20] Thesaurus Linguae Graecae: University of California, CD ROM, 2009