ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΆΛΓΕΒΡΑ   ΤΑΞΗ : Α΄ Λυκείου

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ με α,β ≥ 0 **Μονάδες 10**

Θεωρία σχ.βιβλίο σελ 71

Α2. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α .
Μονάδες 5

Θεωρία Σχ. Βιβλίο σελ 31

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)** , κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις

1. $\sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$ **Σωστό**
2. $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$ για α,β $\in$R **Σωστό**
3. Ισχύει $\sqrt{x^2} = x$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$ **Λάθος**
4. Ισχύει $x^{2013} = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[2013]{2}$ **Σωστό**
5. Η εξίσωση $x^2 + Sx + P = 0$ με $S = x_1+ x_2$ και $P = x_1\cdot x_2$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς x_1 , x_2 **Λάθος**

Μονάδες 2x5=10

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + \lambda - 1 = 0$ **(1)** με λ$\in$R

Β1. Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ ώστε η εξίσωση **(1)** να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
Μονάδες 15

Ενδεικτική Λύση

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4(\lambda - 1) = 9 - 4\lambda + 4 = 13 - 4\lambda$
Για να έχει η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει και αρκεί $\Delta>0 \Leftrightarrow 13 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow - 4\lambda > - 13 \Leftrightarrow \lambda < \frac{13}{4}$

Β2. Αν λ=3 αποδείξτε ότι η εξίσωση **(1)** έχει δύο πραγματικές ρίζες τις οποίες να προσδιορίσετε
Μονάδες 10

Ενδεικτική Λύση

Επειδή $\lambda = 3 < \frac{13}{4}$, από το ερώτημα Β1 προκύπτει ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες . Για λ = 3 είναι Δ=1 και οι λύσεις της εξίσωσης είναι :
$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow \chi_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \chi_1 = 1$ ή $\chi_2 = 2$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|\chi-1|+2}{3} - \frac{|\chi-1|+1}{5} \geq 1 + \frac{|1-\chi|-6}{15}$

Μονάδες 10

Ενδεικτική Λύση

$\frac{|\chi-1|+2}{3} - \frac{|\chi-1|+1}{5} \geq 1 + \frac{|1-\chi|-6}{15} \Leftrightarrow$

$15\,\frac{|\chi-1|+2}{3} - 15\,\frac{|\chi-1|+1}{5} \geq 15 + 15\,\frac{|1-\chi|-6}{15} \Leftrightarrow$

$5\,(|\chi-1|+2) - 3(|\chi-1|+1) \geq 15 + |1-\chi| - 6 \Leftrightarrow$

$5\,|\chi-1| + 10 - 3|\chi-1| - 3 \geq 15 + |\chi - 1| - 6 \Leftrightarrow$ (αφού $|\chi - 1| = |1 - \chi|$)

$5\,|\chi-1| - 3|\chi - 1| - |\chi - 1| \geq 15 - 6 + 3 - 10 \Leftrightarrow$

$|\chi - 1| \geq 2 \Leftrightarrow$

$\chi -1 \leq - 2$ ή $\chi -1 \geq 2 \Leftrightarrow \chi \leq - 1$ ή $\chi \geq 3$

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $|2\chi - 3| \leq 5$

Μονάδες 10

Ενδεικτική Λύση

$|2\chi - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2\chi - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -5 +3 \leq 2\chi \leq 5 + 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2\chi \leq 8 \Leftrightarrow$

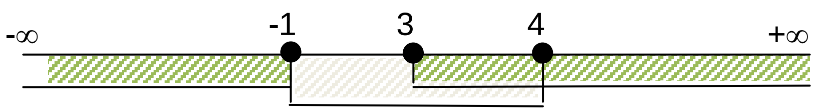
$-1 \leq \chi \leq 4$

Γ3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των προηγουμένων ανισώσεων

Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

Οι κοινές λύσεις των προηγουμένων ανισώσεων είναι οι πραγματικοί αριθμοί χ για τους οποίους ισχύει $\chi \in (-\infty , -1] \cup [3 , + \infty)$ **και** $\chi \in [-1 , 4]$ Συναληθεύοντας τις προηγούμενες λύσεις έχουμε :



Κοινές λύσεις $\chi= -1$ ή $3 \leq \chi \leq 4$.

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda+2)\cdot\chi^2 - 2\lambda\cdot\chi + 3\lambda$, $\lambda \neq -2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τη Διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση Δ<0

Μονάδες 10

Ενδεικτική Λύση

$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda(\lambda+2) = 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda = -4\lambda(\lambda+3)$, $\lambda \neq -2$.
Είναι
$\Delta<0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0$. Η Διακρίνουσα Δ μηδενίζεται όταν $\lambda = -3$ ή $\lambda = 0$.
(με την χρήση πίνακα προσήμου τριωνύμου , εκτός των ριζών $\rho_1 = -3$ και $\rho_2 = 0$)
προκύπτει $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

Δ2. Να βρείτε τις τιμές για την παράμετρο λ ώστε η ανίσωση

$$(\lambda+2)\cdot\chi^2 - 2\lambda\cdot\chi + 3\lambda < 0$$

να αληθεύει για κάθε $x \in R$

Μονάδες 15

Ενδεικτική Λύση

Κατ αρχάς πρέπει το τριώνυμο να διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε τιμή του $\chi \in R$, επομένως πρέπει να ισχύει $\Delta < 0$ (1)
Επιπλέον πρέπει και ο συντελεστής του x^2 να είναι αρνητικός ώστε το σταθερό πρόσημο του τριωνύμου να είναι αρνητικό .
Επομένως πρέπει επιπλέον $(\lambda+2) < 0$ (2)
Από το προηγούμενο ερώτημα η (1) ισοδυναμεί με $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$
Επίσης έχουμε : $(\lambda+2) < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -2)$

Συναληθεύοντας τις παραπάνω ανισώσεις έχουμε τελικά $\lambda \in (-\infty, -3)$.

Καματερό 10 Ιουνίου 2013

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

1. Βλάχος Σπύρος
2. Ιωαννίδης Νικόλαος
3. Ρέγκλης Δημήτριος