Ισότητα συναρτήσεων

Λέμε ότι $f=g$ αν και μόνο αν
Ίδιο πεδίο ορισμού D
$f(x)=g(x)$ για όλα τα $x\in D$

Παρατήρηση

Αν ισχύει $f(x)=g(x)$ για $x\in \Gamma \subseteq D$
τότε λέμε ότι οι f, g
γίνονται ίσες στο Γ

Πράξεις με συναρτήσεις

Αν f ορισμένη στο A
g ορισμένη στο B

Τότε ορίζονται $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$
αν και μόνο αν $A\cap B\neq\emptyset$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$

$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ $f_2(x)=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ $f_3(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$ $f_4(x)=x\left(\frac{1}{x}+1\right)$ $f_5(x)=\ln e^{x+1}$ $f_6(x)=e^{\ln(x+1)}$

Βρείτε (αν υπάρχει) το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο οι συναρτήσειςνα είναι όλες ίσες

$D_{f_1}: \mathbb{R}-\{1\}$

$D_{f_2}: \mathbb{R}$ (αφού $\Delta=-3<0$)

$D_{f_3}: [-1,+\infty)$ $(x+1\geq 0)$

$D_{f_4}: \mathbb{R}-\{0\}$

$D_{f_5}: \mathbb{R}$ (αφού $e^{x+1}>0$)

$D_{f_6}: (-1,+\infty)$ (αφού $x+1>0$)

$f_1(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$

$f_2(x)=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1$

$f_3(x)=|x+1| \overset{x>-1}{=} x+1$

$f_4(x)=1+x$

$f_5(x)=(x+1)\ln e=x+1$

$f_6(x)=x+1$ $\left(e^{\ln A}=A\right)$

Κοινό πεδίο ορισμού

$(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

τότε

$f_1=f_2=f_3=f_4=f_5=f_6$

$f(x)=\dfrac{2\lambda x^2-2x-\lambda^2+3\lambda}{x^2-\lambda x+1}$ και $g(x)=2$, $\lambda\in R$. Βρείτε το λ ώστε να είναι f=g

Επειδη $D_g=\mathbb{R}$, για εχω $f=g$ πρεπει $D_f=\mathbb{R}$

Αρα $x^2-\lambda x+1\neq 0$ για ολα τα $x\in\mathbb{R} \iff \Delta<0 \iff \lambda^2-4\lambda<0$

$\iff \lambda\in(0,4)$

Επιπλεον πρεπει $f(x)=g(x)$ για ολα τα $x\in\mathbb{R}$

$$2\lambda x^2-2x-\lambda^2+3\lambda=2x^2-2\lambda x+2 \iff \begin{cases}2\lambda=2\\ -2=-2\lambda\\ -\lambda^2+3\lambda=2\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=1\\ \lambda=1 \text{ ή } \lambda=2\end{cases}$$

Αρα $\lambda=1$

$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ \sqrt{x}, & x>2\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<3\\ -2x+3, & x\ge 3\end{cases}$ Να βρείτε την συνάρτηση $f+g$

$D_f=\mathbb{R}$, $D_g=(0,+\infty)$ Κοινο πεδιο ορισμου $D=(0,+\infty)$

Οριζεται η $f+g$ στο $(0,+\infty)$

0 2 3

Τυπος

$$(f+g)(x)=\begin{cases}2x+1+\ln x & x\in(0,2]\\ \sqrt{x}+\ln x & x\in(2,3)\\ \sqrt{x}-2x+3 & x\in[3,+\infty)\end{cases}$$

$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \ge 3 \end{cases}$ Να βρείτε την συνάρτηση $\frac{f}{g}$

Παρατηρηση: για την πραξη $\frac{f}{g}$ πρεπει επιπλεον $g(x) \neq 0$

Πεδιο ορισμου: $g(x) \neq 0 \iff \begin{cases} \overset{x<2}{} \ \ln x \neq 0 \iff x \neq 1 \\ \cancel{x \geq 2} \ -2x+3 \neq 0 \text{ ισχυει} \end{cases}$

Αρα $D_{\frac{f}{g}} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{\ln x} & x \in (0,2] \quad x \neq 1, \ x \neq \frac{3}{2} \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} & x \in (2,3) \\ \dfrac{\sqrt{x}}{-2x+3} & x \in [3,+\infty) \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^2(x) + g^2(x) \le 2f(x)g(x)$ τότε $f=g$

Θα αποδειξω οτι $f(x) = g(x)$ για ολα τα $x \in \mathbb{R}$

Ειναι $f^2(x) + g^2(x) - 2f(x) \cdot g(x) \le 0$

$\iff [f(x) - g(x)]^2 \le 0$

$\iff f(x) - g(x) = 0$

$\iff f(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Αρα $f = g$

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}{(x-1)^2} \qquad g(x)=\frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$x \geq 0$ (1)

$x \neq 1$ (2)

$x \neq 1$

$x \geq 0$

$\sqrt{x}+1 \neq 0$ ισχυει

Κοινο πεδιο ορισμου $[0,1)\cup(1,+\infty)$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}(x+1)-1(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}(\sqrt{x}+1)}=\frac{x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=g(x)$$

Αρα $f(x)=g(x)$ για $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

Αρα $f=g$

$$f(x)=\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

$$g(x)=\frac{2}{\eta\mu^2 x}$$

Πεδιο ορισμου f

Πρεπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 1 \iff x \neq 2\kappa\pi \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x \neq -1 \iff x \neq 2\kappa\pi+\pi \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

Πεδιο ορισμου g

Πρεπει $\eta\mu x \neq 0 \iff x \neq 2\kappa\pi$

και

$x \neq 2\kappa\pi+\pi \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

$$f(x)=\frac{(1+\cancel{\sigma\upsilon\nu x})+(1-\cancel{\sigma\upsilon\nu x})}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

$$=\frac{2}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{2}{\eta\mu^2 x}$$