Ενότητα 2 : Σύνολο Τιμών Συνάρτησης

Σύνολο Τιμών Συνάρτησης

Ορισμός

Είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει η εξαρτημένη μεταβλητή y

Δηλαδή $f(A) = \{ y \in R$ ώστε $y = f(x)$ για κάποιο $x \in A \}$

Προσδιορισμός Συνόλου Τιμών

1. Περιορισμοί για το $y \in R$ ώστε η εξίσωση $y=f(x)$ να έχει λύση ως προς x με $x \in A$
2. Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης (Προβολή των σημείων στον κατακόρυφο άξονα)
3. Μέσω μονοτονίας και βασικών θεωρημάτων συνέχειας (Προσεχώς)

Χρήση του συνόλου τιμών :

Ο αριθμός κ ανήκει στο σύνολο τιμών f(A) της f

$\Updownarrow$

Η εξίσωση $f(x) = κ$ έχει μία τουλάχιστον λύση (στο πεδίο ορισμού της f)

$f(A) = (0, +\infty)$

$\Updownarrow$

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$

Να βρείτε το σύνολο τιμών σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = ημ^2x + συν^2x$ **β)** $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ **γ)** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Λύση

β)

$$ψ = \sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow ψ^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 - ψ^2$$

Πρέπει $ψ \geq 0$ (1)

Επειδή $x^2 \geq 0$ πρέπει $25 - ψ^2 \geq 0 \Leftrightarrow [-5, 5] \ni ψ$ (2)

Από (1),(2) : $ψ \in [0, 5]$

Να βρείτε το σύνολο τιμών σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = ημ^2x + συν^2x$ **β)** $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ **γ)** $f(x)= \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Λύση

β) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

Πρέπει $25-x^2 \geq 0$

$x \in [-5, 5]$

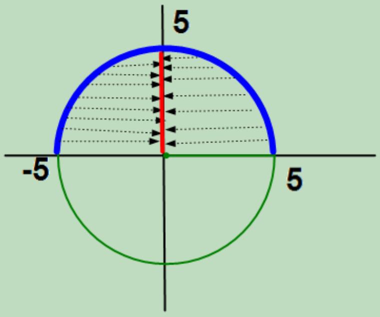
Σύνολο Τιμών

$f: [-5,5] \longrightarrow [0,5]$

$\psi = \sqrt{25-x^2}$

$\psi^2 = 25-x^2$

$x^2+\psi^2 = 25$



Να βρείτε το σύνολο τιμών σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = ημ^2x + συν^2x$ **β)** $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ **γ)** $f(x)= \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Λύση

γ) $\psi = \dfrac{e^x-1}{e^x+1} \iff \psi \cdot e^x + \psi = e^x - 1 \iff \psi e^x - e^x = -1-\psi \iff$

$e^x(\psi-1) = -1-\psi$ Πρέπει $\psi - 1 \neq 0 \iff \psi \neq 1$ οπότε:

$\boxed{e^x = \dfrac{-1-\psi}{\psi-1}}$ Επειδή $e^x > 0$ πρέπει:

$\dfrac{1-\psi}{\psi-1} > 0 \iff (1-\psi)(\psi-1) > 0 \iff \psi \in (-1, 1)$

$-1 \quad 1$

$- \quad + \quad -$

Τελικά σύνολο τιμών $(-1,1)$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ = ημα έχει μία τουλάχιστον λύση στο R

για οποιαδήποτε τιμή του $α \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

Αν $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Πεδιο ορισμου $\mathbb{R}$

Συνολο τιμων $(-1, 1)$ (απο προηγουμενη)

Επειδη ημα $\in (-1, 1)$

Η εξισωση εχει τουλαχιστον μια λυση ως προς $x \in \mathbb{R}$