f ορισμένη στο A
g ορισμένη στο B } Νέα συνάρτηση $f \circ g$ — Σύνθεση της g με f

"Στην f, όπου x βάζω την $g(x)$"

Παράδειγμα $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = ημx$ }

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{ημx}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = ημ f(x) = ημ\sqrt{x}$$

Παρατήρηση $f \circ g \neq g \circ f$

Για το Π.Ο της $f \circ g$ { Πρέπει $x \in A_g$, $g(x) \in A_f$ }

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-3}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Λύση

$A_f = [-5, 5]$ $A_g = [3, +\infty)$

$A_{f \circ g} = \{ \underline{x \in A_g}, \underline{g(x) \in A_f} \}$

$x \in A_g \Leftrightarrow x \geq 3$

$g(x) \in A_f \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \in [-5, 5]$
$\Leftrightarrow -5 \leq \sqrt{x-3} \leq 5$
$\Leftrightarrow x - 3 \leq 25 \Rightarrow x \leq 28$

Άρα $A_{f \circ g} = [3, 28]$

Τύπος: $f(g(x)) = \sqrt{25 - g^2(x)}$
$= \sqrt{25 - \sqrt{x-3}^{\,2}}$
$= \sqrt{28 - x}$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-3}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$.

Λύση

$\underline{g\circ f}$: $A_f : [-5,5]$

$A_g : [3,+\infty)$

Για την $g\circ f$ $\quad g(f(x))$

$x\in A_f \Rightarrow x\in[-5,5]$

$f(x)\in A_g \Rightarrow f(x)\geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{25-x^2}\geq 3 \Leftrightarrow 25-x^2\geq 9 \Leftrightarrow -x^2\geq -16$

$\Leftrightarrow x^2\leq 16 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-4,4]$

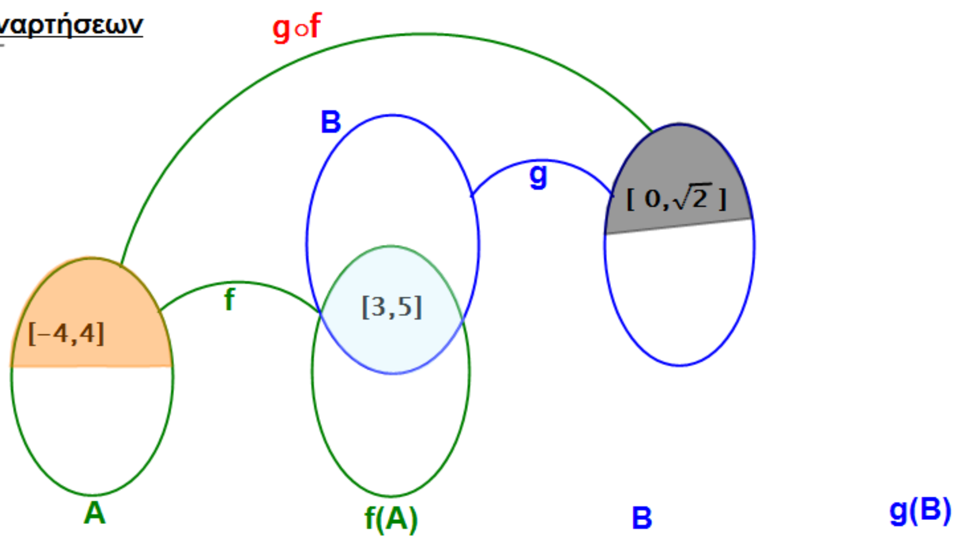
Τελικά $A_{g\circ f}=[-4,4]$

3

Σύνθεση συναρτήσεων

$f(x)=\sqrt{25-x^2}$

$g(x)=\sqrt{x-3}$



$f:\quad [-5,5] \longrightarrow [0,5] \qquad [3,+\infty \longrightarrow [0,+\infty)$

$$[-4,4] \xrightarrow{(g\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{25-x^2}-3}} [0,\sqrt{2}]$$

4

Να εκφράσετε την συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων.
α) $f(x)=\eta\mu(4x^2+1)$ **β)** $f(x)=2^{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$ **γ)** $f(x)=-4\varepsilon\varphi^2x+3\varepsilon\varphi x+2009$

Λύση

α) Αν $u=4x^2+1$ τοτε $\psi=\eta\mu u$

Αρα $f_1(x)=\eta\mu x$

$f_2(x)=4x^2+1$ $\qquad f=f_1\circ f_2$

2η επιλογη: $u=x^2$ $\qquad \eta\mu(4u+1)$

$f_1(x)=x^2$

$f_2(x)=\eta\mu(4x+1)$ $\qquad f_2\circ f_1$

Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων:
α) $f(x)=\eta\mu(x^2+1)$ β) $f(x)=2\eta\mu^2 3x+1$ γ) $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$

Λύση

$u=e^{2x}-1$

$f_1(x)=\ln x$

$f_2(x)=e^{2x}-1$ $\qquad$ Είναι $f(x)=f_1(f_2(x))$

Επιλεγουμε: $k=2x$, Η $f_2(x)$ γινεται e^k-1

$f_2(x)=f_3(f_4(x))$ $\qquad$ οπου $f_3(x)=e^x-1$

$f_4(x)=2x$

$f=f_1\circ f_3\circ f_4$

Αν $g(x)=x-1$, βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2+3x+1$

Λύση

Παρατηρηση: Οταν δινεται η "μεσα" συναρτηση :

$$f(g(x))=x^2+3x+1$$

$$g(x)=x-1 \Rightarrow u=x-1 \Rightarrow x=u+1$$

Εχω: $f(u)=(u+1)^2+3(u+1)+1$

$$f(u)=u^2+2u+1+3u+3+1$$

$$f(u)=u^2+5u+5$$

Αρα $f(x)=x^2+5x+5$

$$x^2+3x+1$$

$$x^2-2x+1+5x-5+5$$

$$(x-1)^2+5(x-1)+5$$

Αν $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$, βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $(g\circ f)(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Λύση

$$\longrightarrow g(f(x))=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \quad (1)$$

$g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ Αν στην θεση του x βαλω g(x) εχω:

$$\longrightarrow g(f(x))=\frac{f(x)}{f(x)+1} \quad (2)$$

Απο (1), (2) εχουμε:

$$\frac{f(x)}{f(x)+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

Για την συνάρτηση f ισχύει f(x-1) - 2f(3-x) = x² + 1 για κάθε x∈ℝ

α) Δείξτε ότι f(x) - 2f(2-x) = x² + 2x + 2

β) Δείξτε ότι f(2-x) - 2f(x) = x² - 6x + 10

γ) Βρείτε τον τύπο της f

α) $u = x-1$, $x = u+1$: $f(u) - 2f(3-u-1) = (u+1)^2+1 \iff f(u) - 2f(2-u) = u^2+2u+1+1$

Άρα $\boxed{f(x)-2f(2-x) = x^2+2x+2}$ (1)

β) $\begin{pmatrix} \psi = 2-x \\ x = 2-\psi \end{pmatrix}$, η (1) είναι $f(2-\psi) - 2f(\psi) = (2-\psi)^2 + 2(2-\psi)+2 \iff$

$\iff f(2-\psi) - 2f(\psi) = \psi^2 - 6\psi + 10$

$\iff \boxed{f(2-x)-2f(x) = x^2-6x+10}$ (2)

Λύνω σύστημα (1), (2)

$$\begin{cases} f(x)-2f(2-x) = x^2+2x+2 \\ -2f(x)+f(2-x) = x^2-6x+10 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x)-2f(2-x) = x^2+2x+2 \\ -4f(x)+2f(2-x) = 2x^2-12x+ \end{cases}$$

Πρόσθεση: $-3f(x) = 3x^2-10x+22 \Rightarrow f(x) = -x^2+\frac{10}{3}x-\frac{22}{3}$

26

$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot \ln x}$

$x>0$

$f_1(x) = e^x$

$f_2(x) = x\cdot \ln x$

$f = f_1 \circ f_2$

$f(x) = f_1(f_2(x)) = e^{f_2(x)}$

$= e^{x\cdot \ln x} = x^x$

Θυμάμαι

$\boxed{A = e^{\ln A}}$

$\psi = \ln x$

$e^\psi = e^{\ln x}$

$e^\psi = x$

$\boxed{e^{\ln x} = x}$

29

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

$u = x - 1$ τοτε $x = u + 1$

Επομενως $(u+1)^3 + 3(u+1)^2 + 4(u+1) + 2$

$$u^3 + 3u^2 + 3u + 1 + 3(u^2 + 2u + 1) + 4u + 4 + 2$$

$$u^3 + 6u^2 + 13u + 10$$

$$f_1(x) = x^3 + 6x^2 + 13x + 10$$

$$f_2(x) = x - 1$$

$$f(x) = f_1(f_2(x))$$

Μεθοδος

- Ονομαζω $u = \ldots\ldots$
- Λυνω ως προς x
- Αντικαθιστω στην $f(x)$
- Παιρνω την δευτερη συναρτηση