

• **Ένα προς Ένα - Αντίστροφη**

- Εύρεση αντίστροφης
- Μονοτονία και ένα προς ένα
- Αντίστροφη και σύνθεση . $f^{-1}(f(x))=x$, $f(f^{-1}(x))=x$
- Αντίστροφες και συμμετρία
- Εξισώσεις και αντίστροφη

Π1. (Εύρεση αντίστροφης με γνωστό τύπο)
 Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις αντιστρέφονται και να προσδιορίσετε την αντίστροφή τους. **i)** $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{6 - x}}$ **ii)** $f(x) = 2x^3 - 1$

Π2. (Μονοτονία και αντίστροφη- Συνάρτηση με κλάδους)
 Αν $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$, να μελετήσετε την μονοτονία της και να προσδιορίσετε (αν ορίζεται) την συνάρτηση f^{-1}

Π3. (Αντίστροφη και σύνθεση-Πράξεις)
 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x+3$ και $g(x)=3x-5$
i) $g \circ f$ **ii)** $g^{-1} \circ f^{-1}$ **iii)** $(f \circ g)^{-1}$
 Τι παρατηρείτε ; Μπορείτε να αποδείξετε την παρατήρησή σας για όλες τις συναρτήσεις f, g που ορίζονται στο \mathbb{R} ;

Π4. (Κοινά σημεία γραφικών παραστάσεων $f, f^{-1}, \psi=x$)
 Αν $f(x)=2x^3+x+16$, αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

Π5. (Επίλυση εξισώσεων)
 Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και το σύνολο τιμών της είναι το \mathbb{R} .
 Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-1,3)$:
α) Δείξτε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}
β) Λύστε την εξίσωση $f^{-1}(2 + f^{-1}(e^{x-1})) = -1$

ΑΣΚΗΣΗ 1. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} σε όσες από τις παρακάτω συναρτήσεις f υπάρχει

- | | |
|--|---|
| α) $f(x) = \sqrt{x-1}$. | [Απ.: x^2+1 στο \mathbb{R}] |
| β) $f(x) = 2 + \ln(x-2)$ | [Απ.: $2+e^{x-2}$ στο \mathbb{R}] |
| γ) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ | [Απ.: $\frac{2x^2}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$] |
| δ) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ | [Απ.: $\frac{e^x}{1+e^x}$ στο \mathbb{R}] |

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις :

- i)** $f : [-2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2 + \sqrt{x+2}$
- ii)** $g : [1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε την f^{-1} .

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι “1-1” να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $F(x) = (f(x))^3 + 2f(x) - 3$ είναι επίσης “1-1”.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Να αποδείξετε ότι $(f \circ g)^{-1} = f \circ g$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \frac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού

το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

- A. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $f \circ g = h$.
β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi \circ f = h$.
B. α) Να βρείτε τις f^{-1} , g^{-1} , h^{-1} (αντίστροφες των f , g , h).
β) Να βρείτε τις $f^{-1} \circ g^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$.
γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1} \circ f^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, ώστε να ισχύει $f = f^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \alpha}$ ορισμένη στο $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$ με $\gamma \neq 0$, $\beta\gamma - \alpha^2 \neq 0$,

Να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$.

- α) Δείξτε ότι αντιστρέφεται
β) Βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln x - 1$.

- α) Δείξτε ότι αντιστρέφεται
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-3} + 5x - 16$

- α) Να δείξετε ότι αντιστρέφεται
β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(\ln x) > 1$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x+1)) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Αν για την συναρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} και με σύνολο τιμών το \mathbb{R} , ισχύει

$$e^{f(x)}(f^2(x) - 3f(x) + 5) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ τότε:}$$

- α) Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln(2+e^x) + x^3 + 1) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς:

- Α. την ευθεία $\psi=x$ Β. τον άξονα $x x'$ Γ. την ευθεία $\psi=-x$
 Δ. τον άξονα $\psi \psi'$ Ε. την αρχή των αξόνων

ΑΣΚΗΣΗ 15

Από τις παρακάτω συναρτήσεις **ΔΕΝ** έχει αντίστροφη η συνάρτηση :

Α. $f(x) = x^3 - 1$ Β. $f(x) = \sin x$ Γ. $f(x) = \ln(2x-1)$

Δ. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $x \in [0, +\infty)$ Ε. $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ έχει ως αντίστροφη την συνάρτηση :

Α. $f^{-1}(x) = e^{-x}$ Β. $f^{-1}(x) = e^x$ Γ. $f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Δ. $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x}$ Ε. $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^{2x}}$

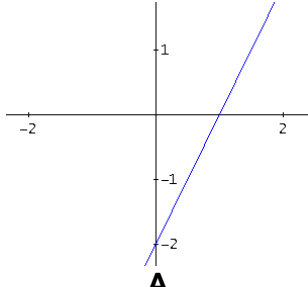
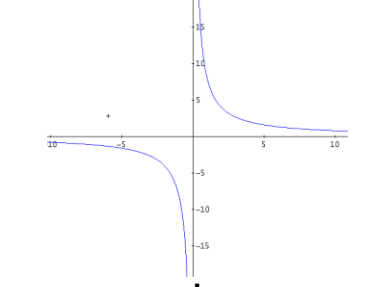
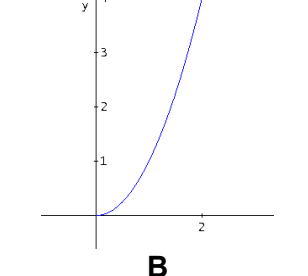
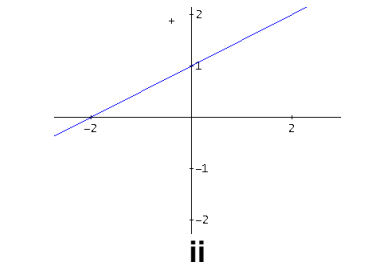
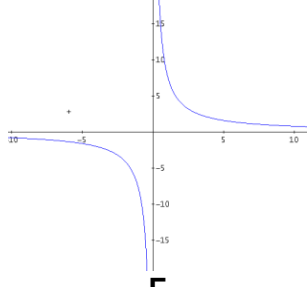
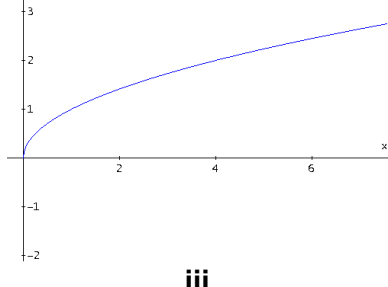
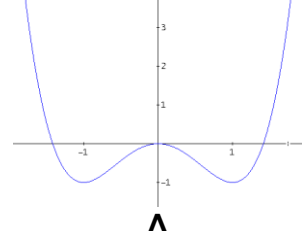
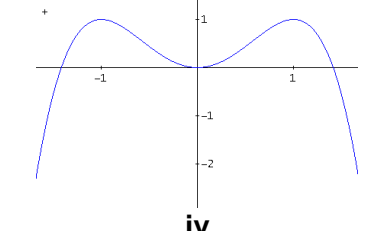
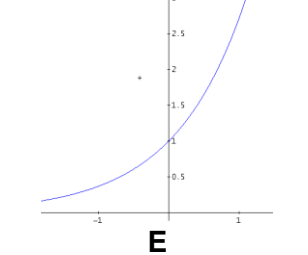
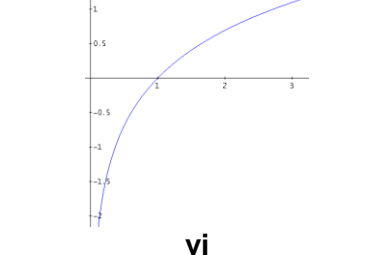
ΑΣΚΗΣΗ 17

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**).
 (Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας)

- α) Αν η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα, οι συναρτήσεις g , h έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις g , h είναι ίσες **Σ** **Λ**
- β) Αν μία συνάρτηση είναι περιττή τότε είναι και "1-1" **Σ** **Λ**
- γ) Κάθε "1-1" συνάρτηση είναι άρτια συνάρτηση **Σ** **Λ**
- δ) Αν η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα τότε ισχύουν
 i) $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x στο σύνολο τιμών της **Σ** **Λ**
 ii) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της **Σ** **Λ**
- ε) Τα κοινά σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι επί της ευθείας $\psi=x$ **Σ** **Λ**
- στ) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι "1-1" στο \mathbb{R} τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι "1-1" στο \mathbb{R} **Σ** **Λ**
- ζ) Αν μία συνάρτηση είναι άρτια τότε υπάρχει και η αντίστροφή της **Σ** **Λ**

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης f που παρουσιάζεται στη **ΣΤΗΛΗ Α**, την γραφική παράσταση της f^{-1} που παρουσιάζεται στη **ΣΤΗΛΗ Β**.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
 <p style="text-align: center;">A</p>	 <p style="text-align: center;">i</p>
 <p style="text-align: center;">B</p>	 <p style="text-align: center;">ii</p>
 <p style="text-align: center;">Γ</p>	 <p style="text-align: center;">iii</p>
 <p style="text-align: center;">Δ</p>	 <p style="text-align: center;">iv</p>
	<p>Δεν ορίζεται αντίστροφη v</p>
 <p style="text-align: center;">E</p>	 <p style="text-align: center;">vi</p>