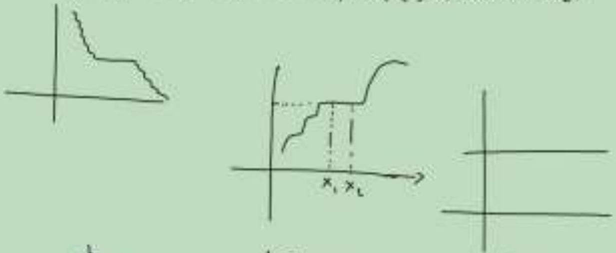
Μονοτονία συνάρτησης

$f$ ορισμένη στο $\Delta$. Θα λέμε ότι:

* $f \uparrow$ (γν. αύξουσα στο $\Delta$) αν και μόνο αν ισχύει
$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$
* $f \downarrow$ (γν. φθίνουσα στο $\Delta$) αν και μόνο αν
$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$
* $f$ σταθερή στο $\Delta$ αν και μόνο αν
$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)}$$

για όλα τα $x_1, x_2$ στο $\Delta$

1) • $f$ αύξουσα στο $\Delta$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
• $f$ φθίνουσα στο $\Delta$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$




Φθίνουσα  Αύξουσα  Σταθερή

2) Η μονοτονία ελέγχεται σε διαστήματα του Π.Ο.

3) Ο λόγος μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\lambda > 0$ : $f \uparrow$

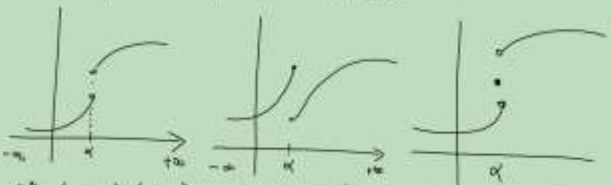
$\lambda < 0$ : $f \downarrow$

$\lambda \geq 0$ $f \uparrow$

$\lambda \leq 0$ $f \downarrow$

$\lambda = 0$ $f$ σταθερή

4)* Πολλές φορές έχω το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα.
Για να έχω το ίδιο είδος μονοτονίας στην ΕΝΩΣΗ πρέπει να προηγηθεί έλεγχος




$f \uparrow$ $(-\infty, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$

$f \uparrow$ στο $(-\infty, \alpha)$, $f \uparrow$ στο $(\alpha, +\infty)$ ?

$f \uparrow$ στο $(-\infty, \alpha]$, $f \uparrow$ στο $[\alpha, +\infty)$

$f(x) = x^2 - 4x + 10 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6 = (x-2)^2 + 6$

Μελέτη μονοτονίας

Με ορισμό:

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ με $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$
$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$
$\Leftrightarrow (x_1-2)^2 + 6 > (x_2-2)^2 + 6$
$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$
$(x_1 - 2) < x_2 - 2 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 2)^2 + 6 < (x_2 - 2)^2 + 6 \Leftrightarrow$
$f(x_1) < f(x_2)$

$f \uparrow$ στο $[2, +\infty)$  $f \downarrow$ στο $(-\infty, 2]$

2ος τρόπος
$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 - 4x_2 + \cancel{10}) - (x_1^2 - 4x_1 + \cancel{10})}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2 + x_1 - 4)}{\cancel{x_2 - x_1}}$$
$$= x_1 + x_2 - 4$$

Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ τότε $\lambda < 0 \Leftrightarrow f \downarrow$ στο $(-\infty, 2]$

Αν $x_1 > x_2 \in [2, +\infty)$ τότε $\lambda > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[2, +\infty)$

$f(x) = \dfrac{5x}{2 + |x|}$  Για $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\frac{5x_2}{2+|x_2|} - \frac{5x_1}{2+|x_1|}}{x_2 - x_1}$
$$= \frac{5x_2(2+|x_1|) - 5x_1(2+|x_2|)}{(x_2-x_1)(2+|x_2|)(2+|x_1|)} = \frac{10x_2 - 10x_1 + 5x_2|x_1| - 5x_1|x_2|}{(x_2-x_1)(2+|x_2|)(2+|x_1|)}$$

Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] \Rightarrow \lambda = \dfrac{10(x_2 - x_1) - \cancel{5x_2x_1} + \cancel{5x_2x_1}}{(x_2-x_1)(2+|x_2|)(2+|x_1|)} = \dfrac{10}{(2+|x_2|)(2+|x_1|)} > 0$

Αν $x_1, x_2 \in [0, +\infty) \Rightarrow \lambda = \dfrac{10(x_2 - x_1) + \cancel{5x_2x_1} - \cancel{5x_1x_2}}{(x_2-x_1)(2+|x_2|)(2+|x_1|)} = \dfrac{10}{(2+|x_1|)(2+|x_2|)} > 0$

Άρα $f \uparrow$ στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$

Άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Μελετώ την μονοτονία στην ένωση

$x_1 < 0 < x_2$

$f(x_1) = \dfrac{5x_1}{2 + |x_1|} < 0$

$f(x_2) = \dfrac{5x_2}{2 + |x_2|} > 0$

Άρα $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < 0 < f(x_2)$

Άρα ισχύει $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1, x_2 \in [0, +\infty)$
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 \in (-\infty, 0)$ $x_2 \in (0, +\infty)$
$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

Ορισμός: Αν για την συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $A$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για όλα τα $x \in A$ τότε λέμε ότι $f$ παρουσιάζει ΜΕΓΙΣΤΟ (ολικό) στο $x_0$ με μέγιστη τιμή $f(x_0)$

Π1 $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x^3}}$

α) Π.Ο. $= [0, 2]$

Μελέτη μονοτονίας

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$
$\Leftrightarrow 16 - 2x_1^3 > 16 - 2x_2^3$
$\Leftrightarrow \sqrt{\phantom{x}} > \sqrt{\phantom{x}}$
$\Leftrightarrow \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x_1^3}} < \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x_2^3}}$

$f(x_1) < f(x_2)$ Άρα $f \uparrow$ στο $[0, 2]$

Αν $x < 2$ τότε $f(x) < f(2)$
Για $x = 2$ έχω μέγιστο
όμως χαρ ισχύς
$f(x) \leq f(2)$
(λόγω μονοτονίας)
Ομοίως
$f(x) \geq f(0)$
για όλα τα $x$
Άρα $x = 0$ θέση ελαχίστου

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2+2}{2-\sqrt{x}}$ $\quad x\geq 0,\ x\neq 4 \quad [0,4)\cup(4,+\infty)$

Έστω $=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}=-1+\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}$

- Αν $x_1,x_2\in[0,4)$
- Αν $x_1,x_2\in(4,+\infty)$

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1}>-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{x_1}>2-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2-\sqrt{x_1}}<\dfrac{1}{2-\sqrt{x_2}}$

$\Leftrightarrow -1+\dfrac{2}{2-\sqrt{x_1}}<-1+\dfrac{2}{2-\sqrt{x_2}}$

$f(x_1)<f(x_2)$

- Αν $x_1<4<x_2$ Τότε $f(x_1)>f(x_2)$

$f$

$f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$

$x_1\neq x_2$: $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$\lambda=\dfrac{\dfrac{2x_2^3}{x_2^2+1}-\dfrac{2x_1^3}{x_1^2+1}}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$

$\lambda=\dfrac{\dfrac{2x_2^3x_1^2+2x_2^3-2x_1^3x_2^2-2x_1^3}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}}{x_2-x_1}$

$\lambda=\dfrac{2x_1^2x_2^2(x_2-x_1)-2(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}{(x_2-x_1)(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$

$\lambda=\dfrac{(x_2^2+x_1x_2+x_1^2+2x_1^2x_2^2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$

Αν $x_1,x_2\in(-\infty,0]$

$x_1\cdot x_2\geq 0$

και $\lambda>0$

Αν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ τότε $x_1x_2\geq 0$

$\lambda>0$

Βασική // $f,g,h$ έχουν ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$ (Γνησίως φθίνουσα). Μελετήστε την μονοτονία της $f\circ g\circ h$

$x_1<x_2 \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x_1)>h(x_2)$

$\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(h(x_1))<g(h(x_2))$

$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(g(h(x_1)))>f(g(h(x_2)))$

$f\circ g\circ h \downarrow$

$f$ περιττή $f\uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$ / $f\uparrow$ στο $[-\beta,-\alpha]$

$x_1,x_2 \quad -x_1,-x_2$

$-\beta \quad -\alpha \quad \alpha \quad \beta$

Έστω $x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2)$

$x_1\in[-\beta,-\alpha]$

$x_2\in[-\beta,-\alpha]$

$-x_1\in[\alpha,\beta]$

$-x_2\in[\alpha,\beta]$

$\Leftrightarrow -f(x_1)>-f(x_2)$

$\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

16/ $f(x)=\ln x+\sqrt{e^x}+x^2$

α) Μονοτονία (Συνάρτηση) $\uparrow$

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$ (1)

$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow \sqrt{e^{x_1}}<\sqrt{e^{x_2}}$ (2)

$x_1<x_2 \overset{x>0}{\Rightarrow} x_1^2<x_2^2$ (3)

Προσθέτω $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$

β) $x^2+\sqrt{e^x}+\ln x-1<\sqrt{e} \Leftrightarrow x^2+\sqrt{e^x}+\ln x<\sqrt{e}+1$

$\Leftrightarrow f(x)<f(1)$

$\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<1$

$x\in(0,1)$

Επίλυση ανίσωσης

1) Δίνεται $A<B$

2) Μετατρέπω $f(\ \ )<f(\ \ )$

3) Δίνουμε την $f$ και αλλάζω ή όχι φορά ανάλογα με είδος μονοτονίας

Βασική άσκηση: Αν $f$ είναι γνησίως μονότονη στο $\Delta$ τότε έχει το πολύ μία ρίζα στο $\Delta$

Απαγωγή

Αν υποθέσω ότι έχει περισσότερες ρίζες

$\rho_1<\rho_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\rho_1)<f(\rho_2)$ άτοπο $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

$\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\rho_1)>f(\rho_2)$ άτοπο

Χρήσιμο στην επίλυση εξισώσεων

Π5. Να λύσετε την εξίσωση

$3^{1-x}+5=8\cdot 2^x$

Για $x=0$: $3^1+5=8\cdot 2^0$ αληθές

$3^{1-x}+5-8\cdot 2^x=0$

Θεωρώ $f(x)=3^{1-x}+5-8\cdot 2^x$ $\quad x\in\mathbb{R}$

(Εύκολα προκύπτει $f\downarrow$, με ορισμό)

Άρα η προφανής ρίζα $\rho=0$ $(f(0)=0)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

Μετατρέπω την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(\rho)$ όπου $\rho$ είναι μια προφανής ρίζα

Αποδεικνύω ότι $f$ είναι γν. μονότονη

$x=\rho$ μοναδική λύση

$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sigma\upsilon\nu x \quad x\in[0,\pi]$ $\quad f\downarrow$

Απόδ. $\dfrac{\pi}{2\epsilon}>\dfrac{\sigma\upsilon\nu\epsilon}{\sigma\upsilon\nu\epsilon-1} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(\sigma\upsilon\nu\epsilon-1)>\epsilon\sigma\upsilon\nu\epsilon$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\epsilon-\frac{\pi}{2}>\epsilon\sigma\upsilon\nu\epsilon$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\epsilon-\epsilon\sigma\upsilon\nu\epsilon>\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\epsilon\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon\right)>\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\sigma\upsilon\nu 0$

$\Leftrightarrow f(\epsilon)>f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \epsilon>0$ ισχύει

$f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{\pi-2x}}\,\varepsilon\varphi x \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$f\uparrow$ $\quad x_1<x_2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2$ (α)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -2x_1>-2x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi-2x_1>\pi-2x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\pi-2x_1}<\dfrac{1}{\pi-2x_2}$ (1)

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\varepsilon\varphi x>0$

$\sigma\upsilon\nu x>0$

$2x_1<2x_2$ (2)

Από (1), (2), (α) $\sqrt{\dfrac{2x_1}{\pi-2x_1}}<\sqrt{\dfrac{2x_2}{\pi-2x_2}}$

$\sqrt{\dfrac{\alpha(\pi-2\beta)}{\beta(\pi-2\alpha)}}<\dfrac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}$ $\quad 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi-2\alpha}}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi-2\beta}{\beta}}<\dfrac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}$

$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi-2\alpha}}\,\varepsilon\varphi\alpha<\sqrt{\dfrac{\beta}{\pi-2\beta}}\cdot\varepsilon\varphi\beta$

$4\sqrt{\quad}\ \varepsilon\varphi\alpha<4\sqrt{\quad}\ \varepsilon\varphi\beta$

$f(\alpha)<f(\beta) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta$

Ισχύει για όλα τα $\alpha<\beta$