Ορισμός "1-1"

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

για κάθε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού

Ισοδύναμος ορισμός

(πιο βολικός για τις ασκήσεις)

Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

για κάθε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού

Παρατήρηση

f γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της $\Rightarrow$ f είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού της

Δεν ισχύει το πάντα το αντίστροφο

(Η αντίστροφη πρόταση προϋποθέτει την συνέχεια της συνάρτησης)

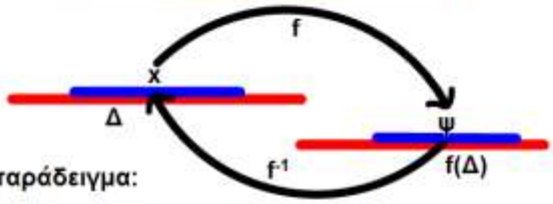
Ορισμός Αντίστροφης

Αν $f : \Delta \longrightarrow f(\Delta)$ είναι "1-1"

τότε $f^{-1} : f(\Delta) \longrightarrow \Delta$ ώστε

$f^{-1}(\psi)=x \Leftrightarrow \psi=f(x)$

$\psi \in f(\Delta)$, $x \in \Delta$



παράδειγμα:

$\boxed{f(x)=e^x}$ $\boxed{f^{-1}(x)=\ln x}$

$\psi=f(0)=e^0=1$ $x=f^{-1}(1)=\ln 1=0$

$\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$ $\boxed{f^{-1}(x)=x^2}$

$\sqrt{4}=2$ $2^2=4$

Παραδειγμα | $f(x)=\sqrt{5-\sqrt{6-x}}$ Αποδείξτε ότι είναι "1-1" και προσδιορίστε την αντίστροφη.

ΛΥΣΗ Η f ορίζεται στο A=[-19,6]

Βήμα 1: Πεδίο ορισμού
σύνολο τιμών της αντίστροφης

Για τυχαία x_1 , x_2 στο Α έχουμε:

Βήμα 2: Έλεγχος "1-1"
Με ορισμό ή με μονοτονία

$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 6-x_1 \neq 6-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{6-x_1} \neq \sqrt{6-x_2}$

$\Leftrightarrow 5-\sqrt{6-x_1} \neq 5-\sqrt{6-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{5-\sqrt{6-x_1}} \neq \sqrt{5-\sqrt{6-x_2}}$

$\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{5-\sqrt{6-x_1}} = \sqrt{5-\sqrt{6-x_2}}$

$\Leftrightarrow 5-\sqrt{6-x_1} = 5-\sqrt{6-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{6-x_1} = \sqrt{6-x_2}$

$\Leftrightarrow 6-x_1 = 6-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Η f είναι "1-1" στο Α

Παραδειγμα | $f(x)=\sqrt{5-\sqrt{6-x}}$ Αποδείξτε ότι είναι "1-1" και προσδιορίστε την αντίστροφη.

ΛΥΣΗ Η f ορίζεται στο A=[-19,6] Η f είναι "1-1" στο Α

Βήμα 1: Πεδίο ορισμού
σύνολο τιμών της αντίστροφης

Αν ψ=f(x) τότε :

$\psi=\sqrt{5-\sqrt{6-x}} \longrightarrow$ πρέπει $\psi \geq 0$ **(1)**

Βήμα 2: Έλεγχος "1-1"
Με ορισμό ή με μονοτονία

$\Leftrightarrow \psi^2 = 5-\sqrt{6-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6-x} = 5-\psi^2 \longrightarrow$ Πρέπει $5-\psi^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq \psi \leq \sqrt{5}$ **(2)**

$\Leftrightarrow 6-x = (5-\psi^2)^2$

$\Leftrightarrow x = 6-(5-\psi^2)^2$

Βήμα 3: ψ=f(x) , λύνω ως προς x
Οι περιορισμοί για το ψ δίνουν το σύνολο τιμών της f , άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης
Η λύση δίνει τον τύπο της αντίστροφης

Αρα $f^{-1}(\psi) = 6-(5-\psi^2)^2$ και απο (1) , (2) προκύπτει $\psi \in [0, \sqrt{5}]$

Δηλαδή $f^{-1} : [0, \sqrt{5}] \longrightarrow [-19,6]$ με $f^{-1}(x) = 6-(5-x^2)^2$

Παραδειγμα | $f(x)=2x^3-1$ Αποδείξτε ότι είναι "1-1" και προσδιορίστε την αντίστροφη.

ΛΥΣΗ Η f ορίζεται στο R. Για τυχαία x_1,x_2 στο R έχουμε :

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3-1<2x_2^3-1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Αρα η f είναι γνησίως αυξουσα στο R , και επομένως είναι "1-1" , άρα αντιστρέφεται.

Αν ψ=f(x) τότε : $\psi=2x^3-1 \Leftrightarrow 2x^3=\psi+1 \Leftrightarrow x^3=\frac{\psi+1}{2} \Leftrightarrow x=\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{\psi+1}{2}} & \text{αν } \psi \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-\frac{\psi+1}{2}} & \text{αν } \psi < -1 \end{cases}$

Δηλαδή $f^{-1} : R \longrightarrow R$

με $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} & \text{αν } x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x+1}{2}} & \text{αν } x < -1 \end{cases}$

Παραδειγμα | Αν $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν } x<1 \\ x^2+1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$, να μελετήσετε την μονοτονία της και να προσδιορίσετε (αν ορίζεται) την συνάρτηση f^{-1}

ΛΥΣΗ Πεδίο ορισμού R

Έλεγχος μονοτονίας:

$x_1,x_2 \in (-\infty,1)$: $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$x_1,x_2 \in [1,+\infty)$: $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$x_1<1$, $x_2 \geq 1$: $x_1<1 \leq x_2 \Rightarrow x_1+1<0<x_2^2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα για όλα τα $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ άρα f ↑ άρα "1-1"

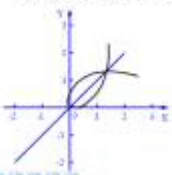
Αν $x<1$ $\psi=x+1 \Rightarrow x=\psi-1$ πρέπει $\psi-1<1 \Rightarrow \psi<2$

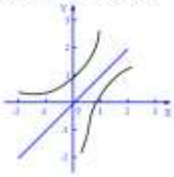
Αν $x \geq 1$ $\psi=x^2+1 \Rightarrow x^2=\psi-1 \Rightarrow x=\sqrt{\psi-1}$, $x \geq 1$ $\sqrt{\psi-1} \geq 1 \Rightarrow \psi \geq 2$

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1 & , x<2 \\ \sqrt{x-1} & , x \geq 2 \end{cases}$

Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 συνάρτηση τότε ισχύουν :

- **$f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x στο Σύνολο Τιμών της f**
- **$f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε x στο Πεδίο Ορισμού της f**
- **Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ως προς την ευθεία ψ=x (διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι θετικοί ημιάξονες)**





Ιδιότητες "1-1" Συνοπτικά

$f(f^{-1}(x)) = x$ $f^{-1}(f(x)) = x$

C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ως προς την ευθεία ψ=x → Χρήσιμο για τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}

Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας
(Πάντα με απόδειξη όταν το χρησιμοποιώ)

Ισχύει $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
(το αποδεικνύω όταν το χρησιμοποιώ)

Αν $f(x)=2x^3+x+16$, αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

ΛΥΣΗ

$x_1<x_2 \Rightarrow \dots\dots f(x_1)<f(x_2)$ άρα f είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη

Οι C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $\psi=x$ και $f \uparrow$. Άρα τα σημεία τομής C_f, $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην ευθεία $\psi=x$

Αρκεί να λύσω το σύστημα

$$\begin{cases}\psi=f(x)\\ \psi=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\psi=2x^3+x+16\\ \psi=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=x\\ 2x^3+\cancel{x}+16=\cancel{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\psi=x\\ x^3=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\psi=x\\ x=-2\end{cases}$$ Άρα $A(-2,-2)$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R και το σύνολο τιμών της είναι το R.
Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(-1,3) :
α) Δείξτε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο R
β) Λύστε την εξίσωση $f^{-1}(2+f^{-1}(e^{x-1}))=-1$ $\quad f(1)=2 \quad f(-1)=3$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή f γν. μονότονη και ισχύει
$-1<1 \Leftrightarrow f(-1)=3>f(1)=2$
έχω ότι f είναι γνησίως φθίνουσα

β) $f^{-1}\left(2+f^{-1}(e^{x-1})\right)=-1 \overset{f\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} 2+f^{-1}(e^{x-1})=f(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+f^{-1}(e^{x-1})=3 \Leftrightarrow f^{-1}(e^{x-1})=1$

$\Leftrightarrow e^{x-1}=f(1) \Leftrightarrow e^{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=\ln 2 \Leftrightarrow$

$\boxed{x=\ln 2+1}$

Άσκηση 13 $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^* \quad e^{f(x)}(f^2(x)-3f(x)+5)=e^x$ (1)

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1)=f^2(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -3f(x_1)=-3f(x_2)$

Άρα $\boxed{f^2(x_1)-3f(x_1)+5=f^2(x_2)-3f(x_2)+5}$ (I)

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \boxed{e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}}$ II

Άρα (I),(II) $\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα f 1-1.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^* \quad e^{f(x)}(f^2(x)-3f(x)+5)=e^x$ (1)

β) $\psi=f(x)$ άρα $e^{\psi}(\psi^2-3\psi+5)=e^x \Rightarrow$

$x=\ln\left[e^{\psi}(\psi^2-3\psi+5)\right]$ $\quad$ Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left[e^x(x^2-3x+5)\right]$

γ) $f\left(\ln(2+e^x)+x^3+1\right)=1 \Leftrightarrow$

$\ln(2+e^x)+x^3+1=f^{-1}(1)$

$\ln(2+e^x)+x^3+1=\ln(3e)$

$\ln(2+e^x)+\ln e^{x^3+1}=\ln(3e)$

$\cancel{\ln}\left[e^{x^3+1}\cdot(2+e^x)\right]=\cancel{\ln}(3e)$

$\Rightarrow e^{x^3+1}(2+e^x)=3e$

Παρατηρώ $x=0$ λύση

Αρκεί να δείξω ότι $g(x)=e^{x^3+1}(2+e^x)$ είναι 1-1.