

ΚΕΦ 1^ο**Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης****A. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**• **Ορισμός – Πεδίο Ορισμού – Σύνολο τιμών – Γραφική παράσταση**

Π1. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 Ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Αν δηλώσουν συμμετοχή x άτομα:

α) Βρείτε την συνάρτηση g που δίνει το αντίτιμο ανά άτομο.

β) Βρείτε την συνάρτηση f που δίνει τα συνολικά έσοδα.

γ) Βρείτε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

δ) Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή ώστε να έχουμε μηδενικά έσοδα;

ε) Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα μέγιστα έσοδα;

Επιβεβαιώστε τα παραπάνω μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Π2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{|x - 2| - 1} + \frac{1}{|3x - 8| - |x|}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$$

$$\gamma) f(x) = \ln \frac{x+2}{x-2} + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\delta) f(x) = \frac{\varepsilon\varphi 2x}{\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1}$$

Π3. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x^2)$$

$$\beta) f(x - 4)$$

$$\gamma) f(\ln x)$$

Π4. Να βρείτε το σύνολο τιμών σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\alpha) f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

$$\delta) f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \ln \frac{3-x}{x-1}$$

Π5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \eta\mu\alpha$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο \mathbb{R}

για οποιαδήποτε τιμή του $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Π6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+4} - 2$ και $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

β) Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής των C_f, C_g καθώς και τα διαστήματα στα

οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

β) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$

ζ) $f(x) = \log(x^2+x-2) + \log \frac{x+3}{3-x}$

η) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{3x-1}} + \sqrt{9-x^2}$

α) $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x + 1}{1 - \sin x}}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3|x| + 4}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A=[-1,1). Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

α) $\Phi(x) = f(2x-3)$ β) $G(x) = f(x^2+1)$ γ) $H(x) = f(\ln x+1)$ δ) $R(x) = f(e^x)$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το f(2).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρείτε το σύνολο τιμών σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = \frac{4x-1}{2x-6}$ [Απ. : $R - \{-2\}$]

β) $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$ $x \in [-1,0]$ [Απ. : [2,3]]

γ) $f(x) = \sqrt{x+4}$ $x \in [0,5]$ [Απ. : [2,3]]

δ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$ [Απ. : $[0, +\infty)$]

ε) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+1}}$ [Απ. : [-1, 1]]

στ) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-3}}$ [Απ. : $[0, 1]$]

ζ) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ [Απ. : $[-3, +\infty)$]

η) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ [Απ. : $[2, +\infty)$]

θ) $f(x) = \frac{3x^2+4x}{x^2+1}$ [Απ. : [-1, 4]]

ι) $f(x) = 2 - \sqrt{x^2+9}$ [Απ. : $(-\infty, -1]$]

ια) $f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e^x}$ [Απ. : $(-\infty, 0)$]

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x+1}}$

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{1 - \sqrt{x+1}} = \sin \omega$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση για όλες τις τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$.

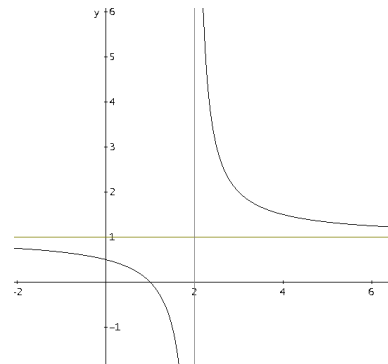
ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f . Να συμπληρώσετε σωστά κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις



- α) Η C_f είναι μετατόπιση της $g(x) = \frac{1}{x}$ δύο μονάδες _____ και μία μονάδα _____
- β) Ο τύπος για την f είναι $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$
- γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
- δ) Το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- ε) Η f είναι θετική στο $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = 1 - \sqrt{3} \cos x$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - 4$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f, g

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$

και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της

ΑΣΚΗΣΗ 12

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3e^{\frac{\ln x}{x^3}}$

- α) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

