ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ.

ΘΕΜΑ 1| α) $f(x) = x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2$, $x \geq 2$

β) $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2) > 0$ για $x > 2$ άρα η $f \nearrow$ άρα 1-1 άρα έχει αντίστρ.

Έστω $y = (x-2)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-2)^2$ πρέπει $y - 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$ τότε,

$\sqrt{y-2} = x - 2 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y-2}$, $y \geq 2$ άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$

γ) $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow (x-2)^2 = \sqrt{x-2} \Rightarrow (x-2)^4 = x - 2 \Rightarrow$

$(x-2)^4 - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)^3 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $(x-2)^3 = 1 \Leftrightarrow$

$x = 2$ ή $x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$. για $x = 2$ είναι $y = f(2) = 2$.

για $x = 3$ είναι $y = f(3) = 3$ άρα τέμνονται στα $A(2,2)$ $B(3,3)$

δ) $f(e^x) = f^{-1}(e^x)$ θέτω $e^x = y$ τότε $f(y) = f^{-1}(y) \overset{y \geq 2}{\Leftrightarrow}$ από το α' ερώτημα $y = 2$ ή $y = 3$ άρα $e^x = 2$ ή $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 2$ ή $x = \ln 3$.

ε) $E = \int_2^3 f(x)\,dx$ αφού $f(x) \geq 0$ στο $[2,3]$ άρα $E = \int_2^3 (x^2 - 4x + 6)\,dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 6x\right]_2^3 = \ldots$

ΘΕΜΑ 2| για $x = 1$ είναι $2 \leq f(1) \leq 2$ άρα $f(1) = 2$.

Επίσης $\lim\limits_{x \to 1} 2x \leq \lim\limits_{x \to 1} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 1}(x^2+1) \Rightarrow 2 \leq \lim\limits_{x \to 1} f(x) \leq 2$ άρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

άρα η f συνεχής στο 1

β) $2x - 2 \leq f(x) - 2 \leq x^2 + 1 - 2 \Leftrightarrow 2(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq (x-1)(x+1)$.

για $x > 1$ είναι $2 \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq x + 1$ άρα $\lim\limits_{x \to 1^+} 2 \leq \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \lim\limits_{x \to 1^+}(x+1)$

$2 \leq \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq 2$ άρα $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ ομοίως για $x < 1$.

$2 \geq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq x + 1$ άρα $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ άρα $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$

άρα $f'(1) = 2$.

γ) $g(x) = f(x) - 2015x$ η g συν στο $[-1,1]$.

$g(-1) = f(-1) + 2015 > 0$ αφού για $x = -1$ από την αρχική είναι $-2 \leq f(-1) \leq 2$

$g(1) = f(1) - 2015 < 0$ αφού για $x = 1$ από την αρχική είναι $2 \leq f(1) \leq 2$

άρα $g(1) \cdot g(-1) < 0$ από Θ.Β υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ ώστε $f(x_0) = 0$

δ) Αφού $2x \leq f(x) \leq x^2 + 1$ και η f συνεχής τότε $\int_0^1 2x\,dx \leq \int_0^1 f(x) \leq \int_0^1 (x^2+1)\,dx$

άρα $1 \leq \int_0^1 f(x) \leq \frac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ 3| α) $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x f'(x) = 2f'(x) \cdot (f(x) - x) - 2f(x)$.

$= 2\frac{f(x)}{\cancel{f(x)-x}} \cdot (\cancel{f(x)-x}) - 2f(x) = 0$ άρα $g(x) = c$ σταθερή

β) $\left.\begin{array}{l} g(x) = c \\ g(x) = (f(x))^2 - 2x f(x) \end{array}\right\}$ $f^2(x) - 2x f(x) = c$. για $x = 0$ $c = 9$

άρα $f^2(x) - 2x f(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = x^2 + 9$.

$(f(x)-x)^2 = x^2+9 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+9$ αν θέσω $g(x)=f(x)-x$.

η g συνεχής στο R ως π.σ.σ και $g(x)\neq 0$ γιατί αν ήταν: $g(x)=0$ τότε $0^2=x^2+9$ άτοπο άρα η g διατηρεί πρόσημο στο R και $g(0)=f(0)-0=3>0$ άρα $g(x)>0$.

άρα $g(x)=\sqrt{x^2+9}$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+9}$ απορ.

άρα $f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in R$.

γ) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\right) \overset{x>0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{x}\sqrt{1+9/x^2}}{\cancel{x}}\right)=1+1=2$

άρα $\lambda=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+9}-x) = \lim \frac{(\sqrt{x^2+9}-x)(\sqrt{x^2+9}+x)}{\sqrt{x^2+9}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{\sqrt{x^2+9}+x}=0$. άρα $y=2x$ ασυμπ. στο $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\right) \overset{x<0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+9/x^2}}{\cancel{x}}\right)=0$

άρα $\lambda=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+9}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+9}+x)(\sqrt{x^2+9}-x)}{\sqrt{x^2+9}-x} \overset{x<0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{-x\sqrt{1+9/x^2}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-x}\cdot\frac{9}{\sqrt{1+9/x^2}+1}\right) = 0\cdot\frac{9}{2}=0$ άρα η ευθεία $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

δ) $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}=\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}>0$ άρα η f ↗ στο R=A άρα Σ. τιμών

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> α) f συνεχής, $f\neq 0$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0$ άρα η f διατηρεί πρόσημο. άρα $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$.

β) η g συν. στο $[\alpha,\beta]$ ως π.σ.σ.

$g(\alpha)=f^2(\alpha)-f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha)\cdot(f(\alpha)-f(\beta))$

$g(\beta)=f^2(\beta)-f(\alpha)f(\beta)=f(\beta)(f(\beta)-f(\alpha))=-f(\beta)(f(\alpha)-f(\beta))$

$g(\alpha)\cdot g(\beta)=-f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot(f(\alpha)-f(\beta))^2\le 0$.

άρα $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ ή $g(\alpha)\cdot g(\beta)=0$

Θ.B υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_0)=0$ ή $g(\alpha)=0$ ή $g(\beta)=0$

άρα τελικά υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $g(x_0)=0$

γ) Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία το πολύ ρίζα. Έστω $h(x)=f(x)-x$. Έστω η h έχει 2 ρίζες $\rho_1<\rho_2$ τότε $h(\rho_1)=h(\rho_2)=0$ και η h συν και παραγ. στο $[\rho_1,\rho_2]$ αφού στο R. υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $h'(\xi)=0$. όμως $h'(x)=f'(x)-1$ άρα $f'(\xi)-1=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$ άτοπο αφού $f'(x)\neq 1$ άρα η h έχει το πολύ μία ρίζα άρα και η αρχική εξίσωση $f(x)=x$.

ΘΕΜΑ 5| α) $f(2)=3$ και $f(1)=4$ άρα $1<2$ και $f(1)>f(2)$ και η f γνησ. μονοτ. άρα η $f\downarrow$ άρα η f 1-1 άρα έχει αντίστροφη έστω την f^{-1}

Έστω $y_1<y_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1))<f(f^{-1}(y_2)) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$ άρα η $f^{-1}\downarrow$.

β) $f(f^{-1}(|x|+1)-x)\geq f(2-x) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(|x|+1)-x\geq 2-x \Leftrightarrow f^{-1}(|x|+1)\geq 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f^{-1}(|x|+1)>f^{-1}(3) \overset{f^{-1}\downarrow}{\Leftrightarrow} |x|+1<3 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow 2<x<2$

γ) $f^{-1}(e^x+2015x+2)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(e^x+2015x+2)=f^{-1}(3) \overset{f^{-1}\,1-1}{\Leftrightarrow}$
$e^x+2015x+2=3 \Leftrightarrow e^x+2015x-1=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ αν θέσω
$g(x)=e^x+2015x-1$ είναι $g(0)=0$ και $g'(x)=e^x+2015>0$ η $g\nearrow$ άρα μοναδική ρίζα $x=0$.

δ) $f(x+1)+f(2x)-6<0 \Leftrightarrow h(x)<0$ αν θέσω $h(x)=f(x+1)+f(2x)-6$.
Είναι $h(1)=f(2)+f(2)-6=3+3-6=0$ και έστω $x_1,x_2\in R$ με

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1+1)>f(x_2+1) \\ x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(2x_1)>f(2x_2) \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} h(x_1)>h(x_2)$$

άρα η $h\downarrow$ στο R.
άρα το $x=1$ μοναδική ρίζα της h. άρα η ανίσωση γίνεται $h(x)<0 \Leftrightarrow h(x)<h(1) \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} x>1$.

ε) Έστω $\phi(x)=f(x+1)+f^{-1}(3x)-5$ τότε η εξίσωση γίνεται $\phi(x)=0$. όμως $\phi(1)=f(2)+f^{-1}(3)=3+2-5=0$ και η $\phi\downarrow$ όπως το προηγ. ερωτ. άρα μοναδική ρίζα το $x=1$.

ΘΕΜΑ 6| ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΟΤΙ Η f ΕΧΕΙ Σ. ΤΙΜΩΝ ΤΟ $f(A)=R$.

α) για $x=0$ είναι $f^3(0)+e^{f(0)}=1 \Leftrightarrow f^3(0)+e^{f(0)}-1=0 \Leftrightarrow$
$y^3+e^y-1=0 \Leftrightarrow g(y)=0$ η $g\nearrow$ και $g(0)=1$ άρα $y=0$.
άρα $f(0)=0$

β) $3f^2(x)f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x)+e^{f(x)})=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+e^{f(x)}}>0$
άρα η $f\nearrow$ στο R. άρα

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

γ) αφού $f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+e^{f(x)}}$ και το β' μέλος πράξεις παραγ. συναρτ. στο R τότε και η f' παραγ. στο R.

$$f''(x)=\frac{6f(x)\cdot f'(x)+e^{f(x)}\cdot f'(x)}{(3f^2(x)+e^{f(x)})^2}=\frac{f'(x)\cdot(6f(x)+e^{f(x)})}{(3f^2(x)+e^{f(x)})^2}$$

Το πρόσημο της f'' είναι ίδιο με της $\phi(x)=6f(x)+e^{f(x)}$ αφού $f'(x)>0$ και $(3f^2(x)+e^{f(x)})^2>0$

Επειδή η f έχει π. ορ. το $A=\mathbb{R}$ και Σ. τιμών $f(A)=\mathbb{R}$ και είναι $\nearrow$ τότε ΣΤ $f(A)=(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ άρα υποχρεωτικά $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

η $\phi(x)\nearrow$ ($x_1<x_2$ ..... $\phi(x_1)<\phi(x_2)$). άρα ΣΤ της ϕ είναι $\phi(A)=(\lim_{x\to-\infty}\phi(x), \lim_{x\to+\infty}\phi(x))=(-\infty,+\infty)$ το $0\in\phi(A)$ άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in A=\mathbb{R}$ ώστε $\phi(x_0)=0$ και

$$\begin{array}{c|ccc} x & & x_0 & \\ \hline \phi(x) & - & \phi & + \end{array}$$

άρα $f''(x_0)=0$ άρα η f'' έχει μία ακριβώς ρίζα το x_0 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0. άρα η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

δ) $f^3(x)+e^{f(x)}=x+1$ αφού $f'(x)\neq 0$ τότε και $f(x)>0$ στο $[0,1]$,
$f^3(x)\cdot f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=(x+1)f'(x)$ άρα $\int_0^1(f^3(x)f'(x)+f'(x)e^{f(x)})dx=\int_0^1(x+1)f'(x)dx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{f^4(x)}{4}+e^{f(x)}\right]_0^1=\left[(x+1)f(x)\right]_0^1-\int_0^1(x+1)'f(x)dx \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(1)}{4}+e^{f(1)}\right)-\left(f(0)+e^{f(0)}\right)=2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)dx$

$\frac{\alpha}{4}+e^{\alpha}-0-1=2\alpha-0-E \Leftrightarrow E=2\alpha-\frac{\alpha}{4}-e^{\alpha}+1.$

ΘΕΜΑ 7 α) Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=2$

τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f(x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x}{x+1}\right)=1+1\cdot1=2$

και $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f(x+1)-x-x-1+1)=$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)-x)+(f(x+1)-(x+1))+1\right]=2+2+1=5$

άρα $y=2x+5$ ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

β) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,3]$ άρα η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[1,3]$ έστω $\varepsilon=f(x_1)$ το ελάχιστο και $M=f(x_2)$ το μέγιστο τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)\le f(1)\le f(x_2) \\ f(x_1)\le f(2)\le f(x_2) \\ f(x_1)\le f(3)\le f(x_2) \end{array}\right\} f(x_1)\le\frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}\le f(x_2)$$

από Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0\in[x_1,x_2]\subseteq[1,3]$ ώστε $f(x_0)=\frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}\Leftrightarrow$

$3f(x_0)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$

γ) Έστω $h(x) = g(x) - f(x) = f(x) + f(x+1) - f(x) = f(x+1) > 0$

$E = \int_1^3 h(x)dx = \int_1^3 f(x+1)dx \xrightarrow[du=dx]{u=x+1} \int_2^4 f(u)dx = 2015$.

ΘΕΜΑ 8 α) $f'(x) = -e^{-x}\cdot e^{-f(x)} \Rightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} = -e^{-x} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (e^{-x})'$

$e^{f(x)} = e^{-x}+c \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^{-x}+c)$. όμως $f(0) = \ln(e+1) \Rightarrow c = e$.

άρα $f(x) = \ln(e^{-x}+e)$

β) $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+e} < 0$ η $f \searrow$ και $f''(x) = \frac{e^{-x}\cdot e}{(e^{-x}+e)^2} > 0$ η f κυρτή και η $f' \nearrow$

γ) ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$, $[\alpha+1,\beta+1]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$, $\xi_2 \in (\alpha+1,\beta+1)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta+1)-f(\alpha+1)}{\beta+1-\alpha-1}$

αφού $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha) < f(\beta+1)-f(\alpha+1) \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$

$f(\alpha)-f(\beta) > f(\alpha+1)-f(\beta+1)$.

δ) Αρκεί $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x)) = 0$ είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(e^{-x}+e)+\ln e^{x}\right) =$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\ln((e^{-x}+e)e^{x})\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln(1+e^{x+1})\right) = 0$.

ΘΕΜΑ 9 α) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ για $x \neq 0$ και αφού η f συνεχής τότε

$f(0) = \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0}\frac{e^x}{1} = 1$ άρα

$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

β) για $x \neq 0$ $f'(x) = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ όπου $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = e^x x + e^x - e^x = e^x x$.

x		0	
$g(x)$	$-$	0	$+$

ολ. ελάχ. το $g(0) = 0$.

άρα $g(x) \geq 0$ άρα

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

άρα η $f \nearrow$ στο $A = \mathbb{R}$ άρα 1-1. άρα έχει αντίστροφη

ΣΤ της f. $f(A) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (0, +\infty)$

γ) $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ αφού

$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{2x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}$

δ) αφού η f κυρτή η εφαπτομένη είναι κάτω άρα $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1$ το ίσον ισχύει μόνο για το σημείο επαφής.

$\Leftrightarrow 2f(x) \geq x + 2$. η ισότητα ισχύει μόνο για το σημείο επαφής

άρα η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

ε) $\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x \cdot \frac{e^x-1}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0$ αφού $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ και

$\lim_{x\to0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$

ΘΕΜΑ ΙΔ $e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x f''(x)$. $A_f = (0,+\infty)$

$(f'(x)e^x - e^x)' = (xf'(x))'$ άρα $f'(x)e^x - e^x = xf'(x) + c$.

Για $x=0$ είναι $c=-1$ άρα $f'(x)e^x - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1$

$f'(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ αφού $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. γιατί αν $g(x) = e^x - x$

$g'(x) = e^x - 1$

x		0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

η g έχει ολ. ελάχ. το $g(0) = 1$ άρα $g(x) \geq 1 > 0$

$e^x - x > 0$

Είναι $f'(x) = (\ln(e^x - x))'$ άρα $f(x) = \ln(e^x - x) + c$. για $x=0 \Rightarrow c=0$

άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$. αφού $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $f'(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

ΟΕ το $f(0) = 0$

γ) $f''(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + e^x + e^x - 1}{(e^x-x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x-x)^2} = \frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$,

η $f''(x)$ έχει ίδιες ρίζες με την $h(x)$ και ίδιο πρόσημο.

Είναι $h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1-x)$.

x		1	
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	ΟΜ	$\searrow$

ΟΜ το $h(1) = e-1$

Για $x \in A_1 = (-\infty, 1]$ η $h \nearrow$ ΣΤ $h(A_1) = (\lim_{x\to-\infty} h(x), h(1)] = (-1, e-1]$

αφού $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - 1 - xe^x) = 0 - 1 - 0 = -1$

αφού $\lim_{x\to-\infty}(xe^x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$.

Για $x \in A_2 = [1, +\infty)$ η $h \searrow$ άρα ΣΤ $h(A_2) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} h(x)) = [-1, +\infty)$.

Το $0 \in h(A_1)$ άρα υπάρχει που $x_1 \in A_1$ ώστε $h(x_1) = 0$ η $h \nearrow$ στο A_1

για $x < x_1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0$, για $x > x_1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0$

Το $0 \in h(A_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$ ώστε $h(x_2) = 0$

και για $x < x_2 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_2) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

για $x > x_2 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x) < 0$ άρα

x		x_1		1		x_2	
$h(x)$, $f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		ΣΚ				ΣΚ	

άρα η f έχει ακριβώς 2 Σ.Κ.

ΘΕΜΑ 11 | α) Π.ορ. $A=(0,+\infty)$.

Κατακόρυφη: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ άρα η $x=0$ κατακόρ. ασύμπτωτη

οριζόντια: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ δεν έχει οριζόντια.

πλάγια: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)\ln x+x-3}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x+\frac{x-2}{x}+1\right]=+\infty$.

δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη

β) $f'(x)=\ln x+2-\frac{2}{x}$ προφανής ρίζα το 1.

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0$ άρα η $f'\nearrow$ άρα το 1 μοναδική ρίζα. άρα

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

για $x\in(-\infty,1]$ η $f\searrow$ ΣΤ $f(A_1)=[f(1),\lim_{x\to 0}f(x))=[-2,+\infty)$

για $x\in[1,+\infty)$ η $f\nearrow$ ΣΤ $f(A_2)=[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x))=[-2,+\infty)$

ΟΕ το $f(1)=-2$

Το $0\in f(A_1)$ άρα υπάρχει μοναδ. $x_1\in A_1$ ώστε $f(x_1)=0$ και.
Το $0\in f(A_2)$ άρα υπάρχει μοναδ. $x_2\in A_2$ ώστε $f(x_2)=0$
άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $xf'(x)-f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα. η εξίσωση γίνεται [illegible] $x+1+2\ln x=0$.

$g(x)=0$ αν θέσω $g(x)=x+1+2\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

$g'(x)=1+\frac{2}{x}>0$ η $g\nearrow$ ΣΤ $=(-\infty,+\infty)$ το $0\in$ ΣΤ.

άρα η $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα. άρα και η αρχ. εξίσωση.

δ) Εξ. εφαπτ. $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. για να διέρχ. από το $O(0,0)$ πρέπει $x=0$, $y=0$ άρα $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ που ισχύει από το γ.

ΘΕΜΑ 12 | α) $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ άρα η f ΟΕ για $x=0$. και αφού είναι εσωτ. σημείο. από Θ.F $\Rightarrow f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha-1=0$
$\Leftrightarrow \ln\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=e$.

β) $f(x)=e^x-\ln(x+1)$ $A_f=(-1,+\infty)$ $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$.

$f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$ η f κυρτή η $f'\nearrow$ στο A

$f'(0)=0$ για $x<0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0$, για $x>0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$

άρα

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

ΟΕ το $f(0)=1$ άρα $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in A$.

γ) Η εξίσωση για $x\neq 1$, $x\neq 2$ γίνεται $(x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1)=0$

$g(x)=0$ αν θέσω $g(x)=(x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1)$

$g(1)=-(f(\beta)-1)<0$ αφού $f(x)>1$ άρα $f(\beta)>1$. και $f(\gamma)>1$.

$g(2)=f(\gamma)-1>0$ από ΘΒ η εξίσωση $g(x)=0$ έχει

η f συν στο $[1,2]$ μία τουλ. ρίζα στο $(1,2)$.

ΘΕΜΑ 13| α) $f(x)=\ln\left(\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left[\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right]\right)$ θέτω $y=\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}$ τότε

$y \to \lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2} = \lim \frac{(\lambda+1)x^2}{x} = \pm\infty$ αν $\lambda\neq 1$. άτοπο.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ αν $\lambda=-1$ δεκτό.

τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 1}(\ln y) = 0$.

β) $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ π.ορ. $A=(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{\cancel{x+2}}{x+1}\cdot\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}>0$.

άρα η $f \nearrow$ στο $(-\infty,-2)$ και η $f\nearrow$ στο $(-1,+\infty)$.

Για $x\in A_1=(-\infty,-2)$ η $f\nearrow$ και συνεχής τότε ΣΤ

$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to-2^-}f(x)\right)=(1,+\infty)$; Για $x\in(-1,+\infty)$ η $f\nearrow$ και συνεχής ΣΤ $f(A_2)=\left(\lim_{x\to-1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$

ΣΤ $f(A)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

ιιι) $f(x)=-\alpha^2<0$ το $-\alpha^2\in f(A_2)$. άρα η εξίσωση $f(x)=-\alpha^2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο A_2.

ΘΕΜΑ 14| $A=[0,+\infty)$

α) $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$

β) για $x>0$ $f'(x)=\ln x+1$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1/e$

x	0		$1/e$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

ΟΕ το $f(1/e)=\frac{1}{e}\ln(e^{-1})=-1/e$

Για $x\in(0,1/e]$ η $f\searrow$ ΣΤ $f(A_1)=\left[f(1/e),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=$
$=[-1/e,0)$.

Για $x\in[1/e,+\infty)$ η $f\nearrow$ ΣΤ $f(A_2)=[-1/e,+\infty)$

Άρα ΣΤ $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(0,+\infty)$.

γ) $x=e^{\alpha/x} \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\alpha/x}\Leftrightarrow \ln x=\alpha/x \Leftrightarrow x\ln x=\alpha$.
$\Leftrightarrow f(x)=\alpha$. $-1/e$ 0

ι) αν $\alpha<-1/e$ τότε καμία ρίζα αφού $\alpha\notin f(A_1), f(A_2)$

ιι) αν $\alpha\in(-1/e,0)$ τότε δύο ρίζες αφού $\alpha\in f(A_1), f(A_2)$

ιιι) αν $\alpha>-1/e$ τότε μία ρίζα αφού $\alpha\in f(A_2)$

ιv) αν $\alpha=-1/e$ τότε μία ρίζα την $1/e$.

δ) ΘΜΤ στο $[x,x+1]$ υπάρχει $\xi\in[x,x+1]$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{\cancel{x+1-x}}$

αφού $x<\xi<x+1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow$

$f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

(15) $A=(0,+\infty)$ $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\lambda}{x^2}$ η f συνεχής στο $A=(0,+\infty)$

α) αφού $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(1)$ το $f(1)$ είναι ελάχιστο και αφού το 1 εσωτερ. σημείο λόγω ΘF $\Rightarrow f'(1)=0 \Leftrightarrow 1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

β) $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$, $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

ΟΕ το $f(1)=0$ άρα $f(x)\geq 0$

γ) Για $x\in(0,1]=A_1$ η $f\searrow$ άρα $f(A_1)=[f(1),\lim_{x\to0^+}f(x))=[0,+\infty)$

αφού $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\ln x+\frac{1}{x}-1)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}[x\ln x+1-x]=+\infty(0+1-0)=+\infty$

γιατί $\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{ΔΛΗ}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$

Για $x\in A_2=[1,+\infty)$ η $f\nearrow$ άρα $f(A_2)=[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x))=[0,+\infty)$.

Άρα αν $\alpha<0$ το $\alpha\notin f(A_1), f(A_2)$ άρα η $f(x)=\alpha$ δεν έχει ρίζες

αν $\alpha=0$ τότε έχει ρίζα το 1

αν $\alpha>0$ τότε $\alpha\in f(A_1)$ και $f(A_2)$ άρα δύο ρίζες.

δ) $\ln(2y^2+1)+\frac{1}{2y^2+1}-1>\ln(y^2+2)+\frac{1}{y^2+2}-1 \Leftrightarrow$

$f(2y^2+1)>f(y^2+2)$ και αφού $2y^2+1, y^2+2\in(1,+\infty)$ στο οποίο η $f\nearrow$ τότε $\Leftrightarrow 2y^2+1>y^2+2 \Leftrightarrow y^2>1 \Leftrightarrow y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(16) α) $A=(0,+\infty)$.

α) $f(x)=\left[t+\frac{1}{t}+2\frac{\ln t}{t}\right]_1^x=x+\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}-2$ $x>0$

β) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}+2\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+2-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-2\ln x+1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

η f' έχει το ίδιο πρόσημο με την $g(x)=x^2-2\ln x+1$, $x>0$.

$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

ΟΕ το $g(1)=2>0$ άρα $g(x)>0$

άρα και $f'(x)>0$ άρα η $f\nearrow$ στο A

γ) Αφού $f'(x)>0$ δεν υπάρχει τιμή x_0 ώστε $f'(x_0)=0$.
άρα η f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

δ) Σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$
άρα το $\alpha\in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει πάντα μια ρίζα στο $A=(0,+\infty)$ δηλαδή θετική ρίζα.

ε) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot ημ\frac{\pi}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot\frac{\pi}{x}\cdot\frac{ημ\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right]=\pi\cdot1=\pi$.

$(+\infty)\cdot ημ 0$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{ημ\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\lim_{y\to0}\frac{ημ y}{y}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\pi+\frac{1}{x^2}+\frac{2\pi\ln x}{x}-\frac{2\pi}{x}\right)=\pi+0+0-0=\pi$.

(17) α) $f(x) = \left[e^{t} - \frac{t^3}{6} - t\right]_0^x = \left[e^x - \frac{x^3}{6} - x\right] - e^0 = e^x - \frac{x^3}{6} - x - 1$

β) $A = \mathbb{R}$. η f συν και παρ στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$.

$f''(x) = e^x - x$, $f'''(x) = e^x - 1$ άρα

x		0	
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	↘	ΟΕ	↗

η f'' έχει ολ. ελαχ το $f''(0) = 1 > 0$.

άρα $f''(x) > 0$ άρα η f' ↗ και έχει προφανή ρίζα το 0,

οπότε: για $x < 0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

για $x > 0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

άρα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	ΟΕ	↗

η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.
άρα $f(x) \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

γ) αφού $f''(x) > 0$ η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Για $x \in (-\infty, 0]$ η f ↘ και συνεχής άρα ΣΤ.
$f(A_1) = [f(0), \lim_{x \to -\infty} f(x)) = [0, +\infty)$.
Για $x \in [0, +\infty)$ η f ↗ και συνεχής άρα ΣΤ
$f(A_2) = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)) = [0, +\infty)$.
άρα ΣΤ. $f(A) = [0, +\infty)$

ε) i) αν $\alpha^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in$ τότε το $\alpha^2 - 1$ δεν ανήκει στο $f(A_1)$, $f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 - 1$ δεν έχει ρίζες

ii) αν $\alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. τότε το $\alpha^2 - 1$ ανήκει και στο $f(A_1)$ και στο $f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 - 1$ έχει 2 ρίζες

iii) αν $\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$ τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $x = 0$ αφού $f(0) = 0$

ΘΕΜΑ 18. $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ $A = \mathbb{R}$.

$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0$ άρα η h ↗ στο $\mathbb{R}$.

β) $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) \Leftrightarrow$

$h(2h'(x)) = h(1) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} 2h'(x) = 1 \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) = h'(1)$.

$\overset{h'\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$. αφού $h''(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$ η h' ↘ άρα και 1-1

γ) $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \ln(e^x + 1)\right] = \lim \left[\ln e^x - \ln(e^x + 1)\right] =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)\right] = \lim_{y \to 1} (\ln y) = 0$ άρα $y = 0$ οριζ. ασύμπ. στο $+\infty$.

θέτω $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ τότε $y \to 1$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+1)\right] = 1-0\cdot 0=1.$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x] = \lim_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)] = 0$

άρα η $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ) $\phi(x) = e^x(h(x)+\ln 2) = e^x(\ln e^x - \ln(e^x+1)+\ln 2) =$
$= e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)$. Είναι $\phi(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
και $\phi(x)>0 \Leftrightarrow \dots\; x>0$.
άρα $\phi(x)\geq 0$ στο $[0,1]$ άρα $E=\int_0^1\phi(x)\,dx = \cdot$ (θέτω $u=e^x$)
και κατά παράγοντες $\dots = e\ln\frac{2e}{e+1} - \ln\frac{e+1}{2}$.

ΘΕΜΑ 19 α) $h(x)>g(x) \Leftrightarrow h(x)-g(x)>0$ τότε $\int_\alpha^\beta(h(x)-g(x))\,dx>0$
$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)\,dx - \int_\alpha^\beta g(x)\,dx>0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

β) $A=\mathbb{R}$ η f παραγ. στο $\mathbb{R}$ άρα:
$f'(x)+e^{-f(x)}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{f(x)}}} = \frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}$.
$f'(x)>0$ άρα η $f\nearrow$ στο $A=\mathbb{R}$.

γ) η f συνεχής και παραγ. στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,x]$.
Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$
αφού $0<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$.
(Είναι $f''(x)>0$ άρα η $f'\nearrow$ στο $A=\mathbb{R}$.)

δ) αφού $x/2 < f(x) < xf'(x)$ τότε $\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 xf'(x)\,dx$.
για $x\in[0,1]$ είναι $f(x)\geq 0$ αφού
για $x\geq 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$. άρα $E=\int_0^1 f(x)\,dx$.
άρα $\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$

$\frac{1}{4} < E < f(1) - E$: $\frac{1}{4}<E$; $E<f(1)-E \Leftrightarrow 2E<f(1) \Leftrightarrow E<\frac{f(1)}{2}$

άρα $\frac{1}{4}<E<\frac{f(1)}{2}$.

ΘΕΜΑ 2ο/ Π.Ορ $A=\mathbb{R}$.

α) Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^2}$ οπότε $\lim_{x\to 0} g(x)=2005$ και $f(x)=x^2g(x)+x$ άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2g(x)+x)=0$.
Και αφού η f συνεχής στο 0 οπότε $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)+x}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}[xg(x)+1]=0+1=1.$$

β) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=\lim\left(\frac{1+\lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}\right)=\frac{1+\lambda\cdot 1}{2+1}=\frac{\lambda+1}{3}.$$

Πρέπει $\frac{\lambda+1}{3}=3 \Leftrightarrow \lambda=8$.

γ) i) αφού $f'(x)>f(x)$ οπότε $\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$
$[f(x)]_0^1>\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow f(1)>\int_0^1 f(x)dx$.

ii) $f'(x)>f(x) \Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}>0 \Leftrightarrow$
$(f(x)e^{-x})'>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$ αν θέσω $g(x)=f(x)e^{-x}$
άρα η $g\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.
για $x>0$ είναι $g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x}>0 \Leftrightarrow$
$xf(x)e^{-x}>0 \Leftrightarrow xf(x)>0$.
για $x<0$ είναι $g(x)<g(0) \Leftrightarrow g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x}<0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow}$
$xf(x)e^{-x}>0 \Leftrightarrow xf(x)>0$.
άρα $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.