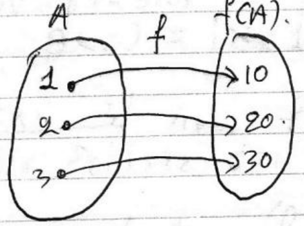
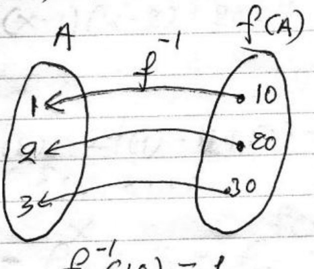
ΜΑΘΗΜΑ 14.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

Αν μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A και σύνολο τιμών το $f(A)$. είναι 1-1. Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με π.ορ. το $f(A)$ και σύνολο τιμών το A





$f(1) = 10$ $\quad$ $f^{-1}(10) = 1$

$f(2) = 20$ $\quad$ $f^{-1}(20) = 2$

$f(3) = 30$ $\quad$ $f^{-1}(30) = 3$

Παρατηρήσεις.

1) $f(\alpha) = \beta \iff f^{-1}(\beta) = \alpha$.
2) $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
3) $f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha$
4) $f(f^{-1}(\beta)) = \beta$.
5) Αν το σημείο $A(\alpha,\beta) \in C_f$ τότε το $B(\beta,\alpha) \in C_{f^{-1}}$
6) οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$
7) Αν η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα σημείο $M(\alpha,\alpha)$ στο ίδιο την τέμνει και η $C_{f^{-1}}$
8) Αν θέλω να βρω τα σημεία τομής των C_f, $C_{f^{-1}}$

ι) Αν γνωρίζω τον τύπους και των δύο. λύνω το σύστημα.
$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} f(x)=f^{-1}(x) \\ y=f(x) \end{array}\right\}$ κτλ.

ιι) Αν δεν γνωρίζω τον τύπο της f^{-1} τότε. Λύνω την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f(1-1)}{\Leftrightarrow} f(f(x))=f(f^{-1}(x))$
$\Leftrightarrow f(f(x))=x$ βρίσκω τις τιμές του x και στη συνέχεια αντικαθιστώ στην $y=f(x)$ και βρίσκω τις τιμές του y.

ιιι) Αν η f είναι $\nearrow$ τότε αρκεί να βρω που τέμνει η C_f την ευθεία $y=x$ τότε. στα ίδια σημεία τέμνει και την $C_{f^{-1}}$ άρα λύνω το σύστημα. $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=x \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f(x)=x \\ y=x \end{array}\right\}$ κτλ.

9) Για να βρω τον τύπο της αντίστροφης θέτω $y=f(x)$ και λύνω την εξίσωση ως προς x κάνοντας τους απαραίτητους περιορισμούς για τα x και y. οπότε προκύπτει $x=f^{-1}(y)$ ο τύπος της αντίστροφης.

10) Αν η f είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ f^{-1} είναι 1-1.

11) Αν η $f \nearrow$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1} \nearrow$ (απόδειξη με άτοπο)

12) Αν η $f \searrow$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1} \searrow$ (" " ")

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1] $f(x)=\frac{5x}{x-2}$ Να βρεθεί η f^{-1}

Λυση Η f εχει π.ορ.: $A=R-\{2\}$

Η f είναι 1-1 (εύκολο) εστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dots x_1=x_2$

Εστω $y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{5x}{x-2} \Leftrightarrow yx-2y=5x \Leftrightarrow$

$yx-5x=2y \Leftrightarrow x(y-5)=2y \Leftrightarrow x=\frac{2y}{y-5}, y\neq 5$

αρα $f^{-1}(y)=\frac{2y}{y-5}$ με π.ορ. $B=R-\{5\}$

ή $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-5}$ με π.ορ $B=R-\{5\}$

Ασκηση 2] $f(x)=\frac{3^x}{3^x+4}$ Να βρεθεί η f^{-1}

Λύση Η f εχει π.ορ: $A=R$

Η f είναι (1-1) (εύκολο)

Εστω $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dots x_1=x_2$

Εστω $y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{3^x}{3^x+4} \Leftrightarrow$

$y\cdot 3^x+4y=3^x \Leftrightarrow y\cdot 3^x-3^x=-4y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x(y-1)=-4y \Leftrightarrow 3^x=\frac{-4y}{y-1}$ με $\frac{-4y}{y-1}>0$

$\ln 3^x=\ln\left(\frac{-4y}{y-1}\right)$ με $\frac{-4y}{y-1}>0$

$x\ln 3=\ln\left(\frac{-4y}{y-1}\right)$ με

y		0		1	
$\frac{-4y}{y-1}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

$x=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln\left(\frac{-4y}{y-1}\right)$ με $y\in(0,1)$

αρα $f^{-1}(y)=\frac{1}{\ln 3}\ln\left(\frac{-4y}{y-1}\right)$ με $y\in(0,1)$

ή $f^{-1}(x)=\frac{1}{\ln 3}\ln\left(\frac{-4x}{x-1}\right)$ με π.ορ. $B=(0,1)$

Άσκηση 3 $f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$. Να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση

Π.ορ της f είναι $A = [2, +\infty)$

Η f είναι 1-1 (εύκολο) έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cdots x_1 = x_2$

άρα η f έχει αντίστροφη.

Έστω $y = 5 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow y - 5 = \sqrt{x-2}$, $(y \geq 5)$

$(y-5)^2 = x - 2 \Leftrightarrow x = (y-5)^2 + 2$, $y \geq 5$

άρα $f^{-1}(y) = (y-5)^2 + 2$ με $y \geq 5$

ή $f^{-1}(x) = (x-5)^2 + 2$ με Π.ορ. $B = [5, +\infty)$.

Άσκηση 4 $f(x) = 2 + \ln(x-1)$ Να βρεθεί η f^{-1}

Λύση

Π.ορ της f: $A = (1, +\infty)$

Η f είναι 1-1 (εύκολο) έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cdots x_1 = x_2$

άρα έχει αντίστροφη.

Έστω $y = 2 + \ln(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = \ln(x-1) \Leftrightarrow$

$\ln e^{y-2} = \ln(x-1) \Leftrightarrow e^{y-2} = x - 1 \Leftrightarrow$

$x = 1 + e^{y-2}$, $y \in R$ άρα $f^{-1}(y) = 1 + e^{y-2}$, $y \in R$

ή $f^{-1}(x) = 1 + e^{x-2}$ με Π.ορ $B = R$.

Άσκηση 5 Αν $f^3(x) = 3f(x) + 2x - 4$, $x \in R$.

Να βρεθεί η αντίστροφη.

Λύση: Η εξ. γράφεται $f^3(x) - 3f(x) = 2x - 4$

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -3f(x_1) = -3f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$ $\Big\} \Rightarrow$

$f^3(x_1) - 3f(x_1) = f^3(x_2) - 3f(x_2)$ άρα

$2x_1 - 4 = 2x_2 - 4 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα η f είναι 1-1 άρα έχει αντίστροφη

Έστω $y = f(x)$ τότε $y^3 - 3y = 2x - 4 \Leftrightarrow$

$\frac{y^3 - 3y + 4}{2} = x$ άρα $f^{-1}(y) = \frac{y^3 - 3y + 4}{2}$, $y \in R$.

ή $f^{-1}(x) = \frac{x^3 - 3x + 4}{2}$ με Π.ορ $B = R$.

Άσκηση 6/ Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$, $B(3,2)$ και είναι γνησίως μονότονη.

α) Να δείξετε ότι η f ↘

β) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x^2-3)=3$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(5x-6)<1$.

Λύση.

α) Είναι $f(1)=4$
και $f(3)=2$

Αφού $1<3$ και $f(1)>f(3)$ } η f είναι ↘ άρα και 1-1, και η f γνησίως μονότονη.

β) Αφού η f είναι γνησίως μονότονη είναι και 1-1

γ) Αφού $f(1)=4 \Leftrightarrow f^{-1}(4)=1$.
και $f(3)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=3$.

Η εξίσωση γίνεται $f^{-1}(x^2-3)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2-3)=f^{-1}(2)$, και αφού η f^{-1} (1-1) τότε $x^2-3=2 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

δ) $f^{-1}(5x-6)<1 \Leftrightarrow f^{-1}(5x-6)<f^{-1}(4) \overset{f^{-1}\searrow}{\Leftrightarrow}$
$5x-6>4 \Leftrightarrow 5x>10 \Leftrightarrow x>2$

Άσκηση 7/ $f(x)=x^3+x-1$, $x\in\mathbb{R}$

1) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

2) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f και της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$.

3) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, $C_{f^{-1}}$

Λύση.

Π.ορ. της f: $A=\mathbb{R}$

Έστω $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$ (1)
και $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-1<x_2-1$. (2)

(1)+(2) $\Rightarrow x_1^3+x_1-1<x_2^3+x_2-1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα η f είναι ↗ άρα και 1-1.

2) $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=x \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} y=x^3+x-1 \\ y=x \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x^3+x-1=x \\ y=x \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x^3=1 \\ y=x \end{array}\right\}$.

$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right\}$ άρα η C_f τέμνει την ευθ. $y=x$ στο $A(1,1)$

Στο ίδιο σημείο τέμνει και η $C_{f^{-1}}$ την $y=x$

3) Αφού η $f \nearrow$ τότε όλα τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στω $y=x$. Άρα τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$.

Άσκηση 8 $f(x)=\frac{5x}{x-2}$, $x\neq 2$

i) Να βρεθεί η f^{-1}.

ii) Να βρεθούν τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$.

Λύση

i) (Άσκηση 1) βρίσκω $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-5}$, $x\neq 5$

ii) $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=\frac{5x}{x-2} \\ y=\frac{2x}{x-5} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \frac{5x}{x-2}=\frac{2x}{x-5} \\ y=\frac{2x}{x-5} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 5x^2-25x=2x^2-4x \\ y=\frac{2x}{x-5}. \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} 3x^2-21x=0 \\ y=\frac{2x}{x-5} \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} 3x(x-7)=0 \\ y=\frac{2x}{x-5} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$ ή $\begin{array}{l} x=7 \\ y=7. \end{array}$

Άρα τέμνονται στα σημεία $A(0,0)$, $B(7,7)$.

Άσκηση 9 $f(x)=-x^3$.

i) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

ii) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

Λύση

Π.ορ: $A=\mathbb{R}$. Η f είναι 1-1 αφού αν $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow -x_1^3=-x_2^3 \Leftrightarrow x_1=x_2$. άρα έχει αντίστροφη.

ii) Θα βρώ τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ χωρίς να υπολογίσω την f^{-1}.

$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=f(y) \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=f(f(x)) \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=-(-x^3)^3 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} y=-x^3 \\ x=+x^9 \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} y=-x^3 \\ x^9-x=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y=-x^3 \\ x(x^8-1)=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y=0,\ y=-1,\ y=1 \\ x=0,\ x=1,\ x=-1 \end{array}$

Αρα τέμνονται στα. $A(0,0)$, $B(1,-1)$, $\Gamma(-1,1)$

α)

Ασκήσεις για λύση.

Ασκηση 1| Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση των συναρτήσεων

i) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$ ii) $f(x) = 5 + \ln(x-3)$

iii) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

Ασκηση 2| Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει

$2f^3(x) = x + 4f(x) - 2$.

i) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη.

ii) Να βρεθεί η αντίστροφη.

Ασκηση 3| Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο R και ισχύει $(f(1)-4)^2 + (f(4)-2)^2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $\downarrow$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1}

γ) Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $f(2x+4) = 4$ ii) $f^{-1}(3x+1) = 4$.

δ) Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $f(5x-6) < 2$ και $f^{-1}(x^2-7) < 4$.

Ασκηση 4|

Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο R. και η γραφ. παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,4)$, $B(3,1)$

α) Να δείξετε ότι η f ~~έχει~~ αντίστροφη

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(3+f(x)) = 2$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(1+f^{-1}(x)) < 1$.

Ασκηση 5| $f(x) = \frac{2x}{x-4}$.

α) Να βρεθεί η f^{-1}

β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$.

Ασκηση 6| $f(x) = x^5 + x - 32$.

1) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

2) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$

Άσκηση 7) Αν $f(x) = -x^5$
i) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη
ii) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$

Άσκηση 8) Αν $f(x) = 1+(x-1)^2,\ x \geq 1$
i) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη
ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ με την ευθεία με εξίσωση $y=x$
iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(2^x) = f^{-1}(2^x)$

Άσκηση 9) Αν $f(x) = 2+\sqrt{x-2}$.
i) Να δείξετε ότι η f είναι $\nearrow$ στο $[2,+\infty)$
ii) Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρεθεί
iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$
iv) Να λυθεί η εξίσωση $f(2^x-1) = f^{-1}(2^x-1)$
v) Να λυθούν οι ανισώσεις
$f(2x-4) < 4$ και $f^{-1}(4x-2) < 6$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ.

ΘΕΜΑ 1/ Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις Σωστό, Λάθος.

ι) $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$.

ιι) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$.

ιιι) ισχύει πάντα $f^{-1}(A) = f^{-1}(B) \Leftrightarrow A = B$.

ιv) ισχύει $(f \circ g) = g \circ f$.

ΘΕΜΑ 2/ Να δείξετε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A τότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

ΘΕΜΑ 3/ $(f \circ g)(x) = e^{x-3} + x - 4$.

$g(x) = x - 3$.

① Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + x - 1$

② Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

③ Να βρείτε τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ πάνω στην ευθεία $y = x$.

④ Να λυθεί η εξίσωση $\frac{1-x}{e^x} = 1$.

⑤ Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) = f^{-1}(\ln(1-x))$