Αποδείξεις στα Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ Λυκείου

• Όριο – συνέχεια συνάρτησης

1. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0} P(x_0)$

Απόδειξη :

Έστω το πολυώνυμο P(x)= $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\\ &= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_0\\ &= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_0\\ &= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}\, x_0^{\nu-1} + \cdots + a_0 = P(x_0)\end{aligned}$$

2. Να αποδειχθεί ότι : $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu x = 0 \ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$

Απόδειξη :

- Σύμφωνα με την ανισότητα |ημx|≤ $|x|$ έχω -|x|≤ημ$x \le |x|$

Και επειδή : $\lim\limits_{x\to 0}$(-|x|)=$\lim\limits_{x\to 0}$(|x|)=0 από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι :

$\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu x = 0$

- Γνωρίζουμε ότι : $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$ οπότε συνx=$\sqrt{1-\eta\mu^2 x}$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ επομένως $\lim\limits_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-\eta\mu^2 x} =$

$\sqrt{1 - \lim\limits_{x\to 0} \eta\mu^2 x} = \sqrt{1-0}$=1

3. Να διατυπωθεί το θεώρημα Bolzano και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία

Απάντηση:

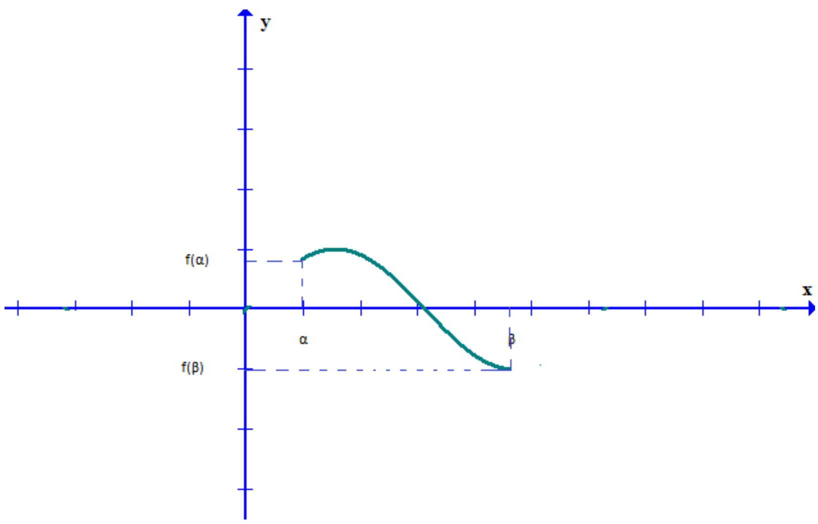
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] η οποία :

- Η f είναι συνεχής στο [α,β]
- f (α) f(β)<0

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

<u>δηλαδή</u> : υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο ανοιχτό διάστημα (α,β)

<u>γεωμετρική ερμηνεία:</u>



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης . επειδή τα σημεία Α(α,f(α)) και Β(β,f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο

4. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το <u>*θεώρημα ενδιάμεσων τιμών*</u>

<u>***Διατύπωση:***</u> έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] . Αν :

- Η f είναι συνεχής στο [α,β]
- f (α)$\neq$ f(β)

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$

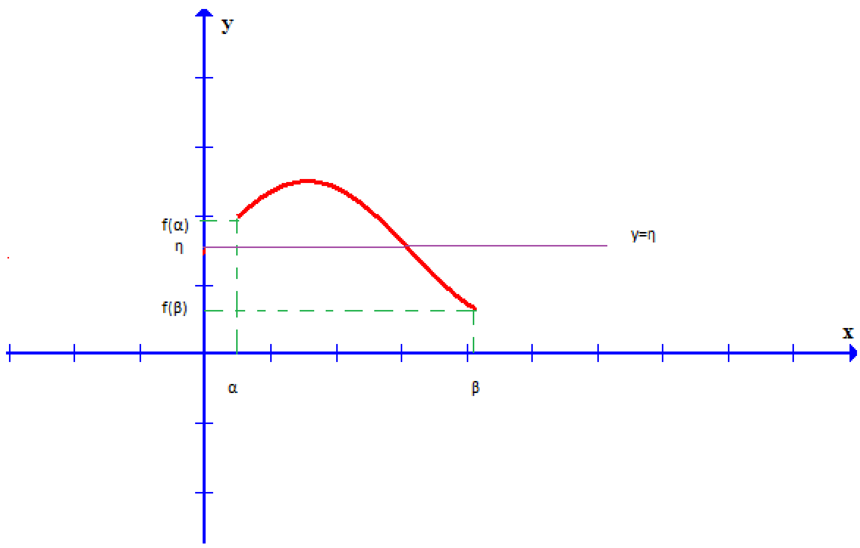
<u>***Απόδειξη:***</u>

Υποθέτουμε ότι f(α)<f(β) τότε θα ισχύει f(α)<η<f(β) αν θεωρήσουμε την συνάρτηση g(x)=f(x)-η , x∈[α,β], παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο [α,β] και
- g(α)=f(α)-η<0 και

g(β)=f(β)-η>0

επομένως σύμφωνα με το <u>*θεώρημα του Bolzano*</u> , υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$



- # Διαφορικός λογισμός – παράγωγος συνάρτησης

5. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Το αντίστροφο ισχύει; Να δοθεί αντιπαράδειγμα

Απόδειξη :

Για x≠ x_0 έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Οπότε

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right]$$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Επομένως : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει!! *Δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη .*

Αντιπαράδειγμα: είναι η $f(x) = |x|$ η οποία είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη

Απόδειξη:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $χ_0$ τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0

6. Να αποδειχθεί ότι άν f(x)=c τότε f΄(x)=0

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Άρα (c)΄=0

7. Να αποδειχθεί ότι άν f(x)=x τότε f΄(x)=1

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$ τότε για $χ \neq χ_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Επομένως :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Άρα (χ)΄=1

8. Έστω η συνάρτηση f(x)=x^{ν} , ν∈ $\mathbb{N}-\{0,1\}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f΄(x)=ν$x^{\nu-1}$

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$ τότε για x≠ x_0 ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{\chi-\chi_0}$$
$$=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$$

Οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}$$
$$=\nu x_0^{\nu-1}$$

Άρα (x^{ν})΄= ν$x^{\nu-1}$, x∈ $\mathbb{R}$

9. Έστω η συνάρτηση f(x)=$\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο(0,+∞) και ισχύει f΄(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του (0,+∞) τότε για x≠ x_0 ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$

Οπότε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Άρα : $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. Η συνάρτηση f(x)=ημx είναι παραγωγίσιμη με f΄(x)=συνx

(χωρίς απόδειξη)

11. Η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη με f΄(x)= - ημx

(Χωρίς Απόδειξη)

12. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη :

Για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f Και g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0 έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

13. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει :

$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

(χωρίς απόδειξη)

14. Να αποδείξετε ότι $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, x>0

Απόδειξη:

Πράγματι , αν $x^{a} = e^{a \ln x}$ και θέσουμε u=αlnx τότε έχουμε

$$(x^{\alpha})' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{a} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

15. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \ln\alpha$

Απόδειξη:

Πράγματι , αν $a^{x} = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = xln\alpha$ τότε έχουμε

$$(a^{x})' = \left(e^{x \ln a}\right)' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^{x} \cdot \ln a$$

16. Να αποδείξετε ότι : $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, x$\in \mathbb{R}^{*}$

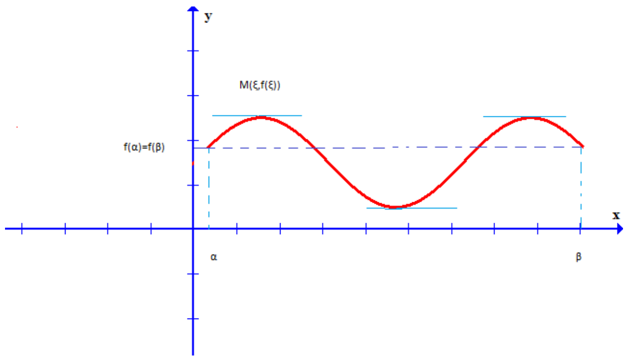
Απόδειξη:

Πράγματι

- Αν x>o , τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{\chi}$, ενώ
- Αν x<o ,τότε ln|x|=ln(-x), οπότε αν θέσουμε y=ln(-x) και

u=-x έχουμε y=lnu. Επομένως : $y' = [\ln u]' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

17. Να διατυπωθεί και να ερμηνευθεί γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle



Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι :

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)
- f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (α,β) τέτοιο ώστε :

f΄(ξ)=0

γεωμετρική ερμηνεία :

γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (α,β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ

18. Να διατυπωθεί το Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ) και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι :

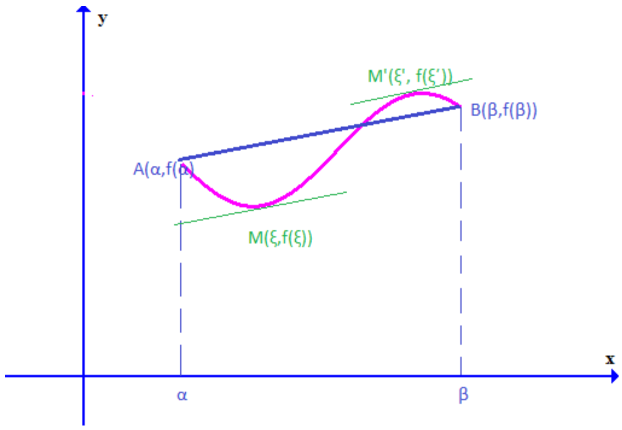
- Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (α,β) τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

<u>γεωμετρική ερμηνεία :</u>

γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας AB



19. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ

- **είναι συνεχής στο Δ και**
- **f΄(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ

(1η συνέπεια του Θ.Μ.Τ)

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $\chi_1,\chi_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$

Πράγματι :

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[\chi_1, \chi_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του

θεωρήματος μέσης τιμής επομένως υπάρχει ξ∈ (χ_1, χ_2) τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\chi_2-\chi_1}$ (1)

Επειδή είναι εσωτερικό σημείο του Δ ,ισχύει f΄(ξ)=0 οπότε λόγω της (1) είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1>x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$

20. Έστω δυο συναρτήσεις f και g ορισμένες σε ένα διάστημα αν

- **Οι f , g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **f΄(x)=g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ**

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x∈Δ να ισχύει : f(x)=g(x)+c

Απόδειξη :

Η συνάρτηση f-g είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x ∈Δ ισχύει

(f-g)΄(x)=f΄(x)-g΄(x)=0

Επομένως σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα , η συνάρτηση f-g είναι σταθερή στο Δ . άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x∈Δ να ισχύει f(x)-g(x)=c οπότε f(x)=g(x)+c

21. έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ να αποδείξετε ότι

- **Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ**
- **Αν f΄(x)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ**

Απόδειξη:

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που f΄(x)>0

Έστω x_1,x_2∈Δ με $x_1<x_2$ θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$

Πράγματι στο διάστημα $[\chi_1,\chi_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ .

Επομένως υπάρχει ξ $\in(\chi_1,\chi_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\chi_2-\chi_1}$

Οπότε έχουμε : $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\,(x_2-x_1)$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$,έχουμε ότι $f(x_2)-f(x_1)>0$

οπότε $f(x_2)>f(x_1)$

ομοίως αποδεικνύεται και στην περίπτωση που $f'(x)<0$

22. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδειχθεί ότι : Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε :

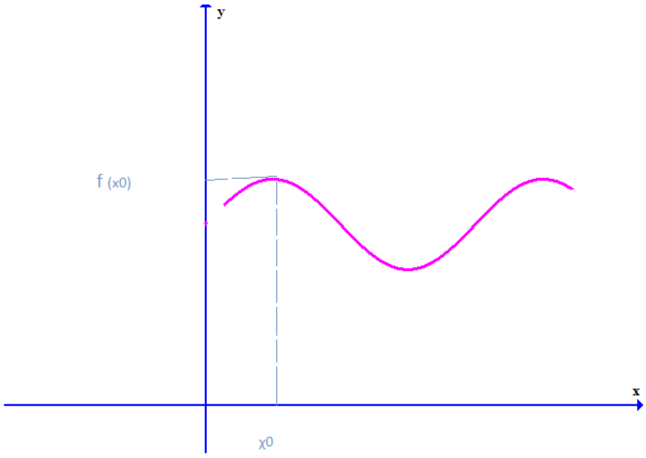
$f'(x_0)=0$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό μέγιστο

Επειδή το χ_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε

Αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$



Και $f(x) \leq f(x_0)\ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (1)

Επειδή επιπλέον , η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

-αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $τότε\ λόγω\ της\ (1) θα\ είναι \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (2)

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $τότε\ λόγω\ της\ (1) θα\ είναι \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι : $f'(x_0)$=0

23. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $χ_0$, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής . να αποδειχθούν τα παρακάτω: Αν f΄(x)>0 στο (α,x_0) και f΄(x)<0 στο ($χ_0$,β) τότε το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f

i)Αν f΄(x)<0 στο (α,x_0) και f΄(x)>0 στο (x_0,β) τότε το f(x_0) είναι τοπικό ελάχιστο της f

ii)Αν η f΄(x) διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0,\ \beta)$ τότε το f(x_0) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Απόδειξη :

i)Επειδή f΄(x)>0 για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,$χ_0$] έτσι θα έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x$\in (\alpha, x_0]$ (1)

Επειδή f ‘ (x)<0 για κάθε x$\in (x_0,\ \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [$χ_0$,β) έτσι θα έχουμε $f(x) \leq\ f(x_0)$ για κάθε x$\in [\,x_0, \beta)$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι ισχύει $f(x) \leq\ f(x_0)$ για κάθε $x \in$ (α,β)

Που σημαίνει ότι το f(x_0) είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής

ii)Ομοίως

iii)Έστω ότι f΄(x)>0 για κάθε x$\in (\alpha, x_0) \cup (x_0,\ \beta)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $χ_0$ θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και [x_0,β) επομένως για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. άρα το f(x_0) δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β)

Πράγματι , έστω $x_1,x_2 \in$ (α,β) με $x_1<x_2$

-Αν $x_1,x_2 \in (\alpha, x_0]$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ θα ισχύει $f(x_1)< f(x_2)$

-Αν $x_1,x_2 \in [x_0,β)$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,β)$ θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

-Αν $x_1<x_0<x_2$ τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$

οπότε σε όλες τις περιπτώσεις $f(x_1)<f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β)

• Ολοκληρωτικός λογισμός

24. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ να αποδείξετε ότι :

- **Όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x)+c , c∈ $\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή**

G(x)=F(x)+c

Απόδειξη:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x)=F(x)+c όπου c∈ $\mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

G΄(x)=(F(x)+c)΄= F΄(x)=f(x) για κάθε x ∈Δ

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. τότε για κάθε x ∈Δ ισχύουν : F΄(x)=f(x) και G΄(x)= f(x) ,

οπότε F΄(x)= G΄(x) για κάθε χ∈Δ

άρα σύμφωνα με το πόρισμα της 2.6 υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε G(x)=F(x)+c για κάθε x ∈Δ

25. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β] . Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

(Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Απόδειξη:

Σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα η συνάρτηση

F(x)=$\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] . επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] θα υπάρχει c∈ $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε G(x)=F(x)+c (1)

Από την (1) για χ=α έχουμε G(α)=F(α)+c=$\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$ άρα G(α)= c επομένως G(x)=F(x)+ G(α)

Από την (1) για χ=β έχουμε : G(β)=F(β)+c=$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ άρα

G(β)= $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ δηλαδή :

$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$= G(β) - $G(\alpha)$