ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ-ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO .

.Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]

.Και f(α).f(β)<0

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$

ΠΡΟΣΟΧΗ 1 Αν επί πλέον η ***συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο [α,β] τότε υπάρχει ένα μοναδικό $\chi_0 \in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$***

ΠΡΟΣΟΧΗ 2

.Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]

.Και f(α).f(β)≤0

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$

ΠΡΟΣΟΧΗ 3

.Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ (όχι ένωση διαστημάτων.)

.Και f(x)≠0 για κάθε $\chi\in\Delta$

Τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ

ΠΡΟΣΟΧΗ 4

.Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ (όχι ένωση διαστημάτων.)

.Και f(x)≠0 για κάθε $\chi\in\Delta$

.και υπάρχει ένα ***$\alpha\in\Delta$ τέτοιο ώστε f(α)>0***

Τότε Και f(x)>0 για κάθε $\chi\in\Delta$

ΠΡΟΣΟΧΗ 5

.Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ (όχι ένωση διαστημάτων.)

.Και f(x)≠0 για κάθε $\chi\in\Delta$

.και υπάρχει ένα ***$\alpha\in\Delta$ τέτοιο ώστε f(α)<0***

Τότε και f(x)<0 για κάθε $\chi\in\Delta$

ΠΡΟΣΟΧΗ 6 ***Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ (όχι ένωση διαστημάτων.) Τότε η f διατηρεί πρόσημο σε κάθε διάστημα στο οποίο χωρίζεται το Δ από τις ρίζες της f***

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

1 ΜΟΡΦΗ

Αν έχω μια συνάρτηση f και θέλω να δείξω ότι

Α) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$ ή

Β) η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) ή

Γ) η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) ή

Δ) η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα χ΄χ σε ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(\alpha,\beta)$

Τότε κάνω ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

ΑΣΚΗΣΗ1 **Έστω $f(x)=4\chi^2$-ημπχ-3 .Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)**

ΛΥΣΗ

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [0,1]

f(0).f(1)=-3.1=-3<0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$

<u>2 ΜΟΡΦΗ</u>

Αν έχω μια εξίσωση Α(χ)=Β(χ) και θέλω να δείξω ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τότε αρκεί να δείξω ότι η ισοδύναμη εξίσωση Α(χ)-Β(χ)=0 $\Leftrightarrow$ f(x)=0 όπου f(x)= Α(χ)-Β(χ) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

<u>ΑΣΚΗΣΗ2</u> **Να δείξετε ότι η εξίσωση $5\chi^5 = 2e^x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται **$5\chi^5 - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ f(x)=0 αν θέσω f(x)= $5\chi^5 - 2e^x + 1$ οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)**

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [0,1]

f(0)=-1, **f(1)**=6-2e **f(0).f(1) <0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$**

<u>ΑΣΚΗΣΗ3</u> **Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2+4}{x-1}+\frac{x^4+2}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση για x≠1και x≠2 ισοδύναμα γίνεται $(x^2+4)(x-2)+(x^4+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow$ f(x)=0 αν θέσω f(x)=$(x^2+4)(x-2)+(x^4+2)(x-1)$ οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [1,2]

f(1)=-5, f(2)=20 άρα f(1).f(2) <0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$

<u>3 ΜΟΡΦΗ</u> Αν έχω μια εξίσωση f(x)=0 και θέλω να δείξω ότι έχει μια *<u>ακριβώς</u>* ρίζα στο (α,β) τότε αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο <u>[α,β]</u> και ότι ισχύει το θεώρημα BOLZANO

<u>ΑΣΚΗΣΗ4</u> **Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 5-5\chi$ έχει μια *<u>ακριβώς</u>* ρίζα στο (0,1)**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $e^x = 5-5\chi \Leftrightarrow e^x - 5 + 5\chi = 0 \Leftrightarrow$ f(x)=0

αν θέσω f(x)= $e^x - 5 + 5\chi$ οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση f(x)=0 έχει μια *<u>ακριβώς</u>* ρίζα στο (0,1)

Η f **είναι γνησίως αύξουσα στο R (εύκολο)**

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [0,1]

f(0)=-4, **f(1)**=e , **f(0).f(1) <0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO και αφού** η f **είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει ένα *<u>ακριβώς</u>* $\chi_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$**

<u>4 ΜΟΡΦΗ</u> Αν έχω μια εξίσωση f(x)=0 και θέλω να δείξω ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β) τότε χωρίζω το διάστημα (α,β) σε δύο υποδιαστήματα (α,γ) και (γ,β) και κάνω το θεώρημα BOLZANO και στα δύο

<u>ΑΣΚΗΣΗ5</u> **Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3=6\chi^2-1$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $\chi^3-6\chi^2+1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=\chi^3-6\chi^2+1$ οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [-1,0]
f(-1)=-6, f(0)=1 άρα f(-1).f(0) <0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_1 \in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_1)=0$

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [0,1]
f(1)=-4, f(0)=1 άρα f(1).f(0) <0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_2 \in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_2)=0$
Αρα τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> **Όταν δίνεται μια ισότητα που περιέχει μια συνεχή συνάρτηση f είναι διαφορετικές οι προτάσεις**
Η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)
Η εξίσωση ολόκληρη έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

<u>5 ΜΟΡΦΗ</u>
<u>ΑΣΚΗΣΗ6</u> **Αν η f συνεχής στο R και $f^3(x)+f(x)=4x-1$ για κάθε $\chi\in$ R .Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)**

ΛΥΣΗ

Είναι **$f^3(x)+f(x)=4x-1 \Leftrightarrow f(x).(f^2(x)+1)=4x-1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{4x-1}{f^2(x)+1}$ αφού $f^2(x)+1>0$**

Η f συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [0,1]
$f(0)=\frac{-1}{f^2(0)+1}<0$, $f(1)=\frac{3}{f^2(1)+1}>0$ άρα f(1).f(0) <0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$

<u>6 ΜΟΡΦΗ</u>
<u>ΑΣΚΗΣΗ 7</u> **Αν η f συνεχής στο R και -1< f(x)<0 Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)=2f(x)+3x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $f^2(x)=2f(x)+3x \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)-3x=0$

$\Leftrightarrow g(x)=0$ αν θέσω $g(x)=f^2(x)-2f(x)-3x$

οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

Η g **συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [0,1]**

.g(0)= **f^2 (0)-2f(0)= f(0) .(f(0) -2)>0 αφού είναι -1< f(0)<0** ,

g(1)= **f^2 (1)-2f(1)-3 =(f(1) -3)·(f(1) +1)<0 αφού είναι -1< f(1)<0**

άρα g(0). g(1)<0 **άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in$(0,1) τέτοιο ώστεg (χ_0)=0**

<u>ΑΣΚΗΣΗ8</u> **Αν η f συνεχής στο R να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=** $\frac{4-2x}{x^2-2x+3}$ **έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)**

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση για x≠1και x≠2 ισοδύναμα γίνεται f(x).(x^2 -2χ+3)=4-2χ ⇔ f(x).(x^2 -2χ+3)-4+2χ =0 ⇔g(x)=0 αν θέσω g(x)= f(x).(x^2 -2χ+3)-4+2χ οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)

Η g **συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [1,2]**

.g(1)=-2 , g(2)=2 άρα g(1). g(2)<0 **άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in$(1,2) τέτοιο ώστεg (χ_0)=0**

7 <u>ΜΟΡΦΗ</u> Για να δείξω <u>οτι</u> η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο <u>κλειστό [α,β[</u> τότε πρέπει να προσέξω να είναι <u>f(α).f(β)≤0</u>

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u> **Αν η f συνεχής στο [0,1] και 3 f(0+f(1) =0 να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο <u>κλειστό [0,1[</u>**

ΛΥΣΗ

Είναι f(1) =-3 f(0)

Η f συνεχής στο [0,1]

f(0).f(1)= f(0)[-3 f(0)]=-3f^2 (0)$\leq$0 άρα f(0).f(1)<0 ή f(0)=0 ή **f(1)=0 οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in$(0,1) τέτοιο ώστε f(χ_0)=0 ή f(0)**=0 ή **f(1)=0**

Αρα τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο <u>κλειστό [0,1</u>

8 <u>ΜΟΡΦΗ</u> Για να δείξω ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f,g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη *$\chi_0 \in$(α,β)* αρκεί να δείξω η εξίσωση f(x)= g(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10</u> **Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=lnx και g(x)=** $\frac{1}{x}$ **τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη**

$\chi_0 \in(\frac{1}{e}, e)$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω η εξίσωση f(x)= g(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται f(x)= g(x) $\Leftrightarrow$ f(x)- g(x)=0 $\Leftrightarrow$ lnx- $\frac{1}{x}$ =0

$\Leftrightarrow$ φ(χ)=0 αν θέσω φ(χ)= lnx- $\frac{1}{x}$ οπότε αρκεί να δείξω η εξίσωση φ(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{1}{e},e)$

Η φ συνεχής στο (0,∞) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $[\frac{1}{e},e]$

φ($\frac{1}{e}$)=-1- e<0, φ(e)=1-$\frac{1}{e}$ >0 άρα φ($\frac{1}{e}$)φ(e)<0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(\frac{1}{e},e)$ τέτοιο ώστε φ(χ_0)=0

9 <u>ΜΟΡΦΗ</u> Αν η f συνεχής στο ΑΝΟΙΧΤΟ διάστημα Δ και θέλω να δείξω ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ τότε βρίσκω με δοκιμή δυο τιμές α,β ∈Δ ώστε **f(α).f(β)<0 και κάνω θεώρημα BOLZANO στο (α,β)**

***<u>ΑΣΚΗΣΗ 11 Έστω</u>* f(x)=e^x -$\frac{1}{x}$, χ>0 να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,∞)**

ΛΥΣΗ

Είναι **f(1)=e-1>0, f($\frac{1}{2}$)<0 άρα f(1) f($\frac{1}{2}$)<0 και αφού η f συνεχής στο (0,∞) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $[1,\frac{1}{2}]$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in(1,2)\subseteq (0,\infty)$ τέτοιο ώστε f(χ_0)=0**

10 <u>ΜΟΡΦΗ</u> Αν η f συνεχής στο ΑΝΟΙΧΤΟ διάστημα (α,β) και θέλω να δείξω ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) και $\lim_{x\to a^+}$ f(x)<0 τότε και f(x)<0 κοντά στο α άρα υπάρχει ένας αριθμός γ∈ (α,β) ώστε f(γ)<0 και $\lim_{x\to \beta^-}$ f(x)>0 τότε και f(x)>0 κοντά στο β

Τότε **f(γ).f(δ)<0 και κάνω θεώρημα BOLZANO στο [γ,δ]**

***<u>ΑΣΚΗΣΗ 12 Έστω</u>* f(x)=$\frac{5x-6}{x^2-3x+2}$ να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)**

ΛΥΣΗ

Η f συνεχής στο ΑΝΟΙΧΤΟ διάστημα (1,2) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)= \lim_{x\to 1^+} \frac{5x-6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{x-1}\,\frac{5x-6}{x-2})=+\infty(1)=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to 2^-}$ **f(x)=** $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{5x-6}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\,\frac{5x-6}{x-1}\right)$=- ∞.4=-∞

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}$ **f(x)=** -∞ τότε **και f(x)<0 κοντά στο 1 άρα υπάρχει ένας αριθμός γ∈(1,2) ώστε f(γ)<0**

Αφού $\lim\limits_{x\to 2^-}$ **f(x)=** +∞ τότε **και f(x)>0 κοντά στο 2 άρα υπάρχει ένας αριθμός .**Τότε **f(γ).f(δ)<0 και αφού η f συνεχής στο διάστημα (1,2) τότε συνεχής και στο [γ,δ] ⊆(1,2) άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον** χ_0 **∈(γ,δ)⊆ (1,2) τέτοιο ώστε f(**χ_0**)=0**

11 <u>ΜΟΡΦΗ</u> Για να δείξω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον χ_0 **∈(α,β) τέτοιο ώστε Α(**χ_0**)=Β(**χ_0**) Τότε θεωρώ τη συνάρτηση f(x)= Α(χ)-Β(χ) και κάνω θεώρημα BOLZANO στο [α,β] οπότε σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον** χ_0 **∈(α,β) τέτοιο ώστε f (**χ_0**)=0** ⇔ **Α(**χ_0**)-Β(**χ_0**)** ⇔ **Α(**χ_0**)=Β(**χ_0**)**

***<u>ΑΣΚΗΣΗ 13</u>* Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον** χ_O **∈(1,e) τέτοιο ώστε** $\chi_O \cdot \ln \chi_O + \ln \chi_O = e$

ΛΥΣΗ

Έστω f(x)=χ.lnx+lnx-e

Η f συνεχής στο (0,∞) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα και στο [1,e] f(1)=-e , f(e)=1 άρα f(1).f(e)<0 άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον τουλάχιστον χ_O **∈(1,e) τέτοιο ώστε f (**χ_0**)=0** ⇔
$\chi_O \cdot \ln \chi_O + \ln \chi_O - e = 0 \Leftrightarrow \chi_O \cdot \ln \chi_O + \ln \chi_O = e$

***<u>ΑΣΚΗΣΗ 14 Αν η f</u>* συνεχής στο διάστημα [-3,3] και -3< f(x)<3 για κάθε χ∈ [-3,3] Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(-3,3) τέτοιο ώστε f(ξ)=ξ**

ΛΥΣΗ

Έστω g(x)= f(x)-χ

Η g **συνεχής στο διάστημα [-3,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων** .g(-3)=f(-3)+3>0 ,g(3)=f(3)-3<0 άρα g(-3). g(3)<0 **άρα σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO υπάρχει ένα τουλάχιστον τουλάχιστον ξ∈(-3,3) τέτοιο ώστε g(ξ)=0** ⇔ **f(ξ)-ξ=0** ⇔ **f(ξ)=ξ**