ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και f(α)≠f(β), τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=ξ$.

Μονάδες 25

Μονάδες 10

Β.*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Μια συνεχής συνάρτηση f βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2

β. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} g(x)$ τότε $f(x) \geq g(x)$ σε μία περιοχή του $+\infty$. Μονάδες 2

γ. Αν $f(x) \geq xe^x$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Μονάδες 2

δ. Αν για οποιαδήποτε $α,β \in A_f$ ισχύει $f(α) < f(β)$ και η $f:[γ,δ] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη σταθερή τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(γ), f(δ)]$. Μονάδες 2

ε. Αν $\lim_{x\to1} |f(x)-1| = 0$,τότε $\lim_{x\to1} |f(x)| = 1$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

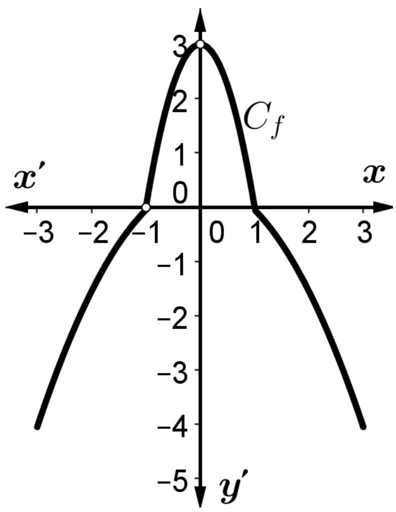
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν) και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

i) $\lim_{x\to-1} f(x)$

ii) $\lim_{x\to-1} \dfrac{1}{f(x)}$

iii) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

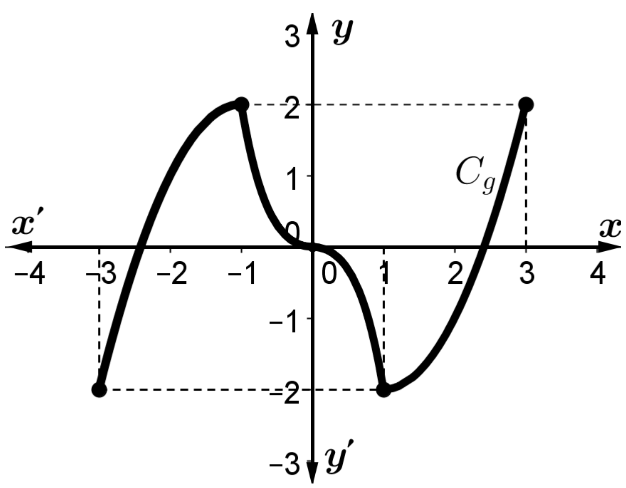


Αν g η συνάρτηση του διπλανού σχήματος :

γ) i) Να αποδείξετε ότι η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[-3,3]$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [-3,3]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = \dfrac{3}{2}$.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [-3,3]$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = \dfrac{g(-2) + 2g\left(\frac{3}{2}\right) + 3g\left(\frac{5}{2}\right)}{6}$.



δ) i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=(f+g)(x)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi\in(-3,-1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(x)+x\le\sqrt{x^2+1}\le xf\left(\frac{1}{x}\right)+1, x>0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-x, x>0\\ 1 \quad ,x=0\end{cases}$.

β) Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+4x}{2x+3}$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$.

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{ημ}x f(x)$.

γ) i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\theta>0$ τέτοιος ώστε $2f(\theta)=1$

Δίνεται η συνάρτηση h για την οποία ισχύει $h^2(x)-2e\cdot h(x)=f(x), x>0$.

δ) i) Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της h.

ii) Να βρείτε τον τύπο της h αν $h(0)=f(\theta)$ **.**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $f^3(x)+xf^2(x)+\text{ημ}^2x\cdot f(x)=2x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}$.
- $g^3(x)+2g^2(x)+3g(x)=x\ (*)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- το σύνολο τιμών της g είναι $g(A)=\mathbb{R}$

α) i) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f^3(x)+x\cdot f^2(x)+\text{ημ}^2x\cdot f(x)}{\text{συν}x-2}$

β) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο 0.

γ) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της g .

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=2x^2+5x-1$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης g^{-1} σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β.ΛΣΣΣΛ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$

$f(A)=(-\infty,3)$

β) **i)** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$.

ii) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ και $f(x)>0$.

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ και $f(x)<0$

οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{f(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

γ) **i)** Η g είναι συνεχής στο $[-3,3]$, $g(-3)=-2\neq g(3)=2$ οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[-3,3]$.

ii) $g(-3)<\dfrac{3}{2}<g(3)$ οπότε από το γ)i) υπάρχει $x_0\in[-3,3]$ τέτοιο

ώστε $g(x_0)=\dfrac{3}{2}$.

iii) $-2<g(-2)<2$ (1).

$-2<g\left(\dfrac{3}{2}\right)<2\Leftrightarrow -4<2g\left(\dfrac{3}{2}\right)<4$ (2).

$-2<g\left(\dfrac{5}{2}\right)<2\Leftrightarrow -6<3g\left(\dfrac{5}{2}\right)<6$ (3).

$$(1)+(2)+(3)\Rightarrow -12<g(-2)+2g\left(\frac{3}{2}\right)+6g\left(\frac{5}{2}\right)<12\Leftrightarrow -2<\frac{g(-2)+2g\left(\frac{3}{2}\right)+6g\left(\frac{5}{2}\right)}{6}<2 .$$

Ο αριθμός $\dfrac{g(-2)+2g\left(\frac{3}{2}\right)+3g\left(\frac{5}{2}\right)}{6}\in(-2,2)$ οπότε υπάρχει $x_1\in(-3,3)$ τέτοιο

ώστε $g(x_1)=\dfrac{g(-2)+2g\left(\frac{3}{2}\right)+3g\left(\frac{5}{2}\right)}{6}$.

δ) **i)** $A_h=A_f\cap A_g=[-3,-1)\cup(-1,0)\cup(0,3]$.

ii) Θεωρούμε το διάστημα $A_1=(-3,-1)$.

Έστω $x_1,x_2\in(-3,-1)$ με $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$ (4)

$$x_1 < x_2 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x_1) < g(x_2)\ (5)\ .$$

$(4)+(5) \Rightarrow f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2) \Leftrightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο A_1.

$h(A_1) \overset{h\nearrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to -3^+} h(x), \lim\limits_{x\to -1^-} h(x)\right) = (-\infty, 2)$ αφού

$\lim\limits_{x\to -3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \left(f(x)+g(x)\right) = -\infty - 2 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(f(x)+g(x)\right) = 0+2 = 2$

Το $0 \in h(A_1)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in A_1 = (-3,-1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.

Το ξ είναι μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

ΘΕΜΑ 3ο

$$f(x) + x \le \sqrt{x^2+1} \le x f\left(\frac{1}{x}\right) + 1, x > 0\ (1)$$

α) $(1) \Rightarrow f(x) + x \le \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) \le \sqrt{x^2+1} - x\ (2)$.

$(1) \Rightarrow x f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \ge \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x f\left(\frac{1}{x}\right) \ge \sqrt{x^2+1} - 1 \overset{\text{όπου x το } \frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x} \ge \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} - 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x) \ge x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - x \Leftrightarrow f(x) \ge \cancel{x}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\cancel{x}} - x \Leftrightarrow f(x) \ge \sqrt{x^2+1} - x\ (3)$.

$(2),(3) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, x > 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 1$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

β) i) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}} + 1} = 0$.

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)+4x}{2x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 3x}{2x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}} + 3}{2 + \overset{0}{\cancel{\frac{3}{x}}}} = \frac{4}{2} = 2$.

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ και

$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x \Leftrightarrow f(x) > |x| - x \ge 0$.

iv) $|\eta\mu x \cdot f(x)| \le |f(x)| = f(x) \Leftrightarrow -f(x) \le \eta\mu x \cdot f(x) \le f(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-f(x)\right) = 0 - \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to +\infty} \eta\mu x \cdot f(x) = 0$.

γ) i) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$x_1 < x_2\ (4) \overset{x_1, x_2 > 0}{\Leftrightarrow} x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}\ (5)$.

$$(4)+(5)\Rightarrow\sqrt{x_1^2+1}+x_1<\sqrt{x_2^2+1}+x_2 \overset{\sqrt{x_1^2+1}+x>\sqrt{x_1^2}+x=|x_1|+x_1\geq 0}{\underset{\sqrt{x_2^2+1}+x>\sqrt{x_2^2}+x=|x_2|+x_2\geq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1}>\frac{1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x_1^2+1}-x_1}{\cancel{x_1^2}+1-\cancel{x_1^2}}>\frac{\sqrt{x_2^2+1}-x_2}{\cancel{x_2^2}+1-\cancel{x_2^2}}\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+1}-x_1>\sqrt{x_2^2+1}-x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Θεωρούμε το διάστημα $A_1=(0,+\infty)$.

$$f(A_1)\overset{f\searrow}{=}\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=(0,1)$$

Το $\frac{1}{2}\in f(A_1)$ οπότε υπάρχει $\theta>0$ τέτοιος ώστε $f(\theta)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(\theta)=1$.

Το θ μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και 1-1.

.

δ) i) $h^2(x)-2e\cdot h(x)=f(x)\Leftrightarrow h^2(x)-2e\cdot h(x)+e^2=f(x)+e^2\Leftrightarrow$

$(h(x)-e)^2=f(x)+e^2>0$.

Η συνάρτηση $\alpha(x)=f(x)-e$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων, είναι διάφορη του μηδενός άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε

$$h(x)-e=\sqrt{f(x)+e^2}\Leftrightarrow h(x)=\sqrt{f(x)+e^2}+e\Leftrightarrow h(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x+e^2}+e \quad \text{ή}$$

$$h(x)-e=-\sqrt{f(x)+e^2}\Leftrightarrow h(x)=-\sqrt{f(x)+e^2}+e\Leftrightarrow h(x)=-\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x+e^2}+e$$

ii) $h(0)=f(\theta)=\frac{1}{2}>0$,οπότε $h(x)>0$ αφού διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Οπότε $h(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x+e^2}+e$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) i) $f^3(x)+xf^2(x)+\eta\mu^2x\cdot f(x)=2x^3\overset{x^3\neq0}{\Leftrightarrow}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\frac{\eta\mu^2x}{x^2}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=2\Rightarrow a^3+a^2+0\cdot a=2\Leftrightarrow$$

$$a^3+a^2-2=0\Leftrightarrow(a-1)\left(\underset{\text{αφού},\Delta=-4<0}{\underset{\neq0}{a^2+2a+2}}\right)=0\Leftrightarrow\alpha=1\ .$$

$$\left(\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\left|\frac{1}{x}\right|\overset{x>0}{=}\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{x}.\right.$$

$$\left.\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ \text{οπότε από κριτήριο παρεμβολής}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0\right)$$

ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2f^3(x)+x\cdot f^2(x)+\eta\mu^2x\cdot f(x)}{\sigma\upsilon\nu x-2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)+f^3(x)+x\cdot f^2(x)+\eta\mu^2x\cdot f(x)}{\sigma\upsilon\nu x-2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+f^3(x)}{\sigma\upsilon\nu x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}\frac{2+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\left[2+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3\right]\cdot\frac{1}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}}=2\cdot(-\infty)=-\infty .$$

$\left(\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-2\le -1<0\right.$ οπότε $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-2}{x^3}<0\Leftrightarrow\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}<0$ αφού $x\to+\infty\Rightarrow x>0$.

$\left(\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}\right|\le\left|\dfrac{1}{x^3}\right|\overset{x>0}{=}\dfrac{1}{x^3}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^3}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}\le\dfrac{1}{x^3}\right.$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\left.\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}=0\right)$.

β) $g^3(x)+2g^2(x)+3g(x)=x\Leftrightarrow g(x)\cdot\Big(\underbrace{g^2(x)+2g(x)+3}_{\neq 0\text{ αφού }\Delta=-8<0}\Big)=x\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x}{g^2(x)+2g(x)+3}$.

$g^2(x)+2g(x)+3=g^2(x)+2g(x)+1+2=\underbrace{\left(g(x)+1\right)^2}_{\ge 0}+2\ge 2\Leftrightarrow\dfrac{1}{g^2(x)+2g(x)+3}\le\dfrac{1}{2}$.

$|g(x)|=\left|\dfrac{x}{g^2(x)+2g(x)+3}\right|\le\dfrac{|x|}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{|x|}{2}\le g(x)\le\dfrac{|x|}{2}$ (1) .

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{|x|}{2}\right)=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{2}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}0\le g(0)\le 0\Leftrightarrow g(0)=0$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$ άρα η g είναι συνεχής στο 0.

γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g^3(x_1)=g^3(x_2)(3)$

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g^2(x_1)=g^2(x_2)\Leftrightarrow 2g^2(x_1)=2g^2(x_2)(4)$.

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow 3g(x_1)=3g(x_2)(5)$

$(3)+(4)+(5)\Rightarrow g^3(x_1)+2g^2(x_1)+3g(x_1)=g^3(x_2)+2g^2(x_2)+3g(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $g(x)=y$.

$(*)\Rightarrow y^3+2y^2+3y=x\Leftrightarrow g^{-1}(y)=y^3+2y^2+3y$ οπότε η αντίστροφη της g έχει τύπο

$g^{-1}(x)=x^3+2x^2+3x$ με $A_{g^{-1}}=g(A)=\mathbb{R}$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$a(x)=g^{-1}(x)-\varphi(x)=x^3+\cancel{2x^2}+3x-\cancel{2x^2}-5x+1=x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$.

Επειδή $\alpha(1)=0$ εξετάζουμε ύπαρξη ρίζας της συνάρτησης $\beta(x)=x^2+x-1$ στο διάστημα $(0,1)$.

Η συνάρτηση β είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$\beta(0)=-1<0$, $\beta(1)=1>0$ οπότε $\beta(0)\cdot\beta(1)<0$.

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει

$x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $\beta(x_0)=0\Leftrightarrow a(x_0)=0\Leftrightarrow g^{-1}(x_0)-\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow g^{-1}(x_0)=\varphi(x_0)$.

άρα οι γραφικές παραστάσεις των g^{-1} και φ τέμνονται σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.