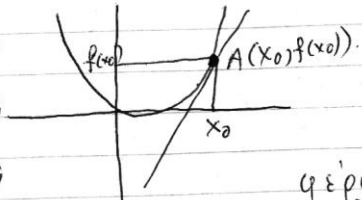
ΜΑΘΗΜΑ 33 - ΜΑΘΗΜΑ 34

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ



Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ μπορώ να φέρω μια εφαπτομένη στη γραφ. παράσταση της f που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$ και εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Είδη ασκήσεων:

① είδος ΟΤΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $A(x_0, f(x_0))$

Άσκηση 1 Αν $f(x) = 2x^3 - 4x - \frac{1}{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$

Λύση

Π. ορ. της f: $A = R^*$ η f παραγωγίσιμη στο R^* με

$f'(x) = 6x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}$. Είναι $f(1) = -3$, $f'(1) = 3$.

Άρα εξίσωση εφαπτομένης $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow$

$y + 3 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x - 6$.

Άσκηση 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{αν } x < 0 \\ 1 + \eta\mu x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Είναι $f(0) = 1 + \eta\mu 0 = 1$.

Βρίσκω την παράγωγο της f στο 0:

• $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{1+\eta\mu x - 1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$,

• $\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{1-x} = 1$

άρα $f'(0) = 1$. Άρα εξίσωση εφαπτομένης

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = 1(x-0) \Rightarrow y = x+1$

59.

2ο ΕΙΔΟΣ/ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΩ ΤΟΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ

Και δεν δίνεται το σημείο επαφής τότε θεωρώ $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και το υπολογίζω από τον συντελεστή διεύθυνσης αφού $\lambda = f'(x_0)$ ανάλογα με τα δεδομένα. Και

i) Αν γνωρίζω ότι η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον xx' τότε $\lambda = 0$ άρα $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ldots$ υπολογ. το x_0.

ii) Αν γνωρίζω ότι η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$ τότε $\lambda = \alpha \Leftrightarrow f'(x_0) = \alpha \Leftrightarrow$ υπολογ. το x_0

iii) Αν γνωρίζω ότι η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y = \alpha x + \beta$ τότε $\lambda = -\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow f'(x_0) = \alpha \Leftrightarrow$ υπολ. το x_0.

iv) Αν γνωρίζω ότι η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία ω^0 με τον άξονα xx' τότε $\lambda = \varepsilon\varphi\omega^0 \Leftrightarrow \lambda = \varepsilon\varphi\omega^0 \Leftrightarrow$ υπολ. το x_0.

Άσκηση 3/ Έστω $f(x) = x^2 - 4x - 3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

i) Που είναι παράλληλη στον xx'

ii) Που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 6$.

iii) Που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2$.

iv) Που σχηματίζει γωνία 45^0 με τον άξονα xx'

ΛΥΣΗ Είναι $f'(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in R$.

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε.

i) πρέπει $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Άρα σημείο επαφής $A(2, f(2))$ ή $A(2, -7)$

άρα εξ. εφαπτομένης $y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y + 7 = 0 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = -7$.

ii) Πρέπει $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 3$.

άρα σημείο επαφής $A(3, f(3))$ ή $A(3, -6)$

Άρα εξ. εφαπτομένης $y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+6 = 2(x-3) \Leftrightarrow y = 2x-12$

(iii) Πρέπει $f'(x_0) = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 4$

Άρα σημείο επαφής $A(4, f(4))$ ή $A(4,-3)$

Άρα εξίσωση εφαπτομένης $y - f(4) = f'(4)(x-4)$

$y+3 = 4(x-4)$

$y = 4x - 19$

(v) Πρέπει $f'(x_0) = εφ45^\circ \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{5}{2}$

Άρα σημείο επαφής $A(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ ή $A(\frac{5}{2}, -\frac{47}{4})$

Άρα εξ. εφαπτ. $y - f(\frac{5}{2}) = f'(\frac{5}{2})(x - \frac{5}{2}) \Leftrightarrow$

$y + \frac{47}{4} = 1(x - \frac{5}{2}) \Leftrightarrow$

$y = x - \frac{57}{4}$.

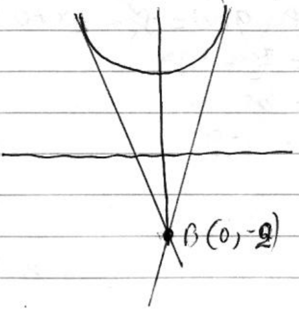
3ο είδος / ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΩ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΑΠΟ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΑΠΟ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ έστω $B(x_1, y_1)$

Τότε Αν $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής
και $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτομ. αφού διερχ. από το B θα την επαληθεύει άρα

$y_1 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow$ .. υπολογ. το x_0.

Άσκηση 4/

Έστω $f(x) = x^2 + 2$ Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων που φέρνουμε από το σημείο $B(0,-2)$ προς την γραφική παράσταση της f.



Λύση Είναι $f'(x) = 2x$

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε η εξ. εφαπτομ. είναι
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και αφού διέρχεται από το $B(0,-2)$ θα την επαληθεύει άρα $x=0$, $y=-2$

άρα $-2 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow$

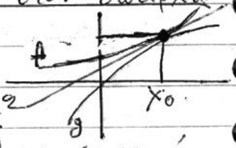
$-2-(x_0^2+2) = 2x_0(-x_0) \Leftrightarrow -2-x_0^2-2 = -2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x_0 = \pm 2$ Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες.

$\varepsilon_1 : y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-6 = 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x-2$

$\varepsilon_2 : y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Leftrightarrow y-6 = -4(x+2) \Leftrightarrow y = -4x-2$

<u>4ο ΕΙΔΟΣ/</u> ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ f, g ΕΧΟΥΝ ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΕΝΑ ΚΟΙΝΟ ΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟ Α όταν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$.



<u>Άσκηση 5/</u> Έστω $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$

Να βρεθεί η κοινή τους εφαπτόμενη σε κοινό σημείο.

Λύση

Είναι $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$ για κάθε $x \in R$.

Για να έχουν κοινή εφαπτόμενη πρέπει να υπάρχει x_0 ώστε

$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$ $\begin{cases} x_0^3 = x_0^2 \\ 3x_0^2 = 2x_0 \end{cases}$ $x_0 = 0$.

Άρα έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $O(0,0)$ την ευθεία $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0$.

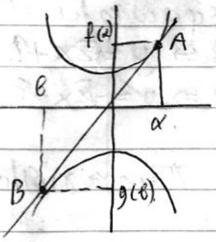
<u>Άσκηση 6/</u> Έστω $f(x) = x^2 - \beta x + 4$, $g(x) = \frac{\alpha}{x}$.

Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτόμενη σε ένα κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$

<u>Λύση</u>. Είναι $f'(x) = 2x - \beta$ για κάθε $x \in R$ και $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^2}$, $x \neq 0$

Πρέπει $\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - \beta + 4 = \alpha \\ 2 - \beta = -\alpha \end{cases}$ $\begin{array}{l} \beta = 7/2 \\ \alpha = 3/2 \end{array}$

5ο ΕΙΔΟΣ/ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ f, g έχουν κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία όταν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε



$$f'(\alpha) = g'(\beta) \quad (1)$$

και η εφαπτομένη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ που είναι η $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ να διέρχεται από το $B(\beta, g(\beta))$ δηλαδή

$$g(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\beta - \alpha) \quad (2)$$

και λύνω το σύστημα (1), (2).

και αν $\alpha \neq \beta$ τότε έχουν κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία

αν $\alpha = \beta$ τότε έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο.

και αν το σύστημα (1), (2) είναι αδύνατο τότε δεν έχουν κοινή εφαπτομένη

Άσκηση 7/ $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -x^2 - 2$.

α) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g δεν έχουν κοινά σημεία

β) Να βρεθούν οι κοινές τους εφαπτόμενες

Λύση

α) έστω $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2 = -x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 = -4$ αδύνατο

άρα οι C_f, C_g δεν έχουν κοινά σημεία

β) Είναι $f'(x) = 2x$, $g'(x) = -2x$.

Πρέπει να υπάρχουν αριθμοί α, β ώστε

$f'(\alpha) = g'(\beta)$ (1) και η εφαπτομένη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ που είναι η $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ να διέρχεται από το $B(\beta, g(\beta))$ δηλαδή

$$g(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\beta - \alpha) \quad (2)$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\left\{ \begin{array}{l} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ g(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\beta - \alpha) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\alpha = -2\beta \\ -\beta^2 - 2 - \alpha^2 - 2 = 2\alpha(\beta - \alpha) \end{array} \Bigg\}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\alpha \\ -\alpha^2-2-\alpha^2-2 &= 2\alpha(-\alpha-\alpha) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \beta &= \mp\sqrt{2} \\ \alpha &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \beta &= \mp\sqrt{2} \\ \alpha &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}\right\}$$

Αρα υπάρχουν δύο κοινές εφαπτομένες

η ε_1: $y - f(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \Leftrightarrow y - 4 = \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x + 2$

η ε_2: $y - f(-\sqrt{2}) = f'(-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \Leftrightarrow y - 4 = -\sqrt{2}(x+\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x + 2$

<u>Άσκηση 8</u>/ Αν f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f'(1) = 1$ και

$g(x) = f(3x^2+x+1) - 1$

α) Να βρεθεί η εξ. της εφαπτ. της C_f στο $A(1, f(1))$

β) Να δείξετε ότι η C_g έχει στο $B(0, g(0))$ την ίδια εφαπτομένη με την C_f στο $A(1, f(1))$.

Λύση

Αφού η f παραγ. στο R και η g είναι παραγ. στο R ως πράξεις παραγ. συναρτήσεων με

$g'(x) = f'(3x^2+x+1)\cdot(6x+1)$

α) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - f(1) = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x + f(1) - 1$

β) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $B(0, g(0))$ είναι

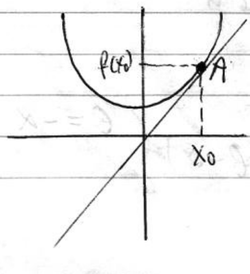
$y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - (f(1)-1) = f'(1)(x-0)$

$\Leftrightarrow y = x + f(1) - 1$

Αρα έχουν την ίδια εφαπτομένη.

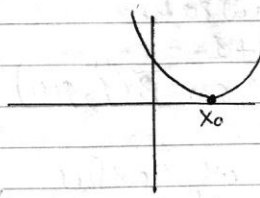
<u>6ο ΕΙΔΟΣ</u>/ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ $y = \alpha x + \beta$ ΕΙΝΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΗ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f όταν υπάρχει x_0 ώστε

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \alpha \\ \text{και} \quad f(x_0) &= y(x_0) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \alpha \\ f(x_0) &= \alpha x_0 + \beta \end{aligned}\right\}$$



Ειδική περίπτωση: Μια συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που εφάπτεται στο xx'

όταν $\left.\begin{aligned} f'(x_0)&=0 \\ \text{και } f(x_0)&=0 \end{aligned}\right\}$.



Άσκηση 9/ Έστω $f(x)=x^2-1$. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-2$ είναι εφαπτομένη της C_f.

Λύση

Είναι $f'(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για να είναι η (ε) εφαπτομένη της C_f πρέπει να υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0)&=2 \\ f(x_0)&=y(x_0) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} f'(x_0)&=2 \\ f(x_0)&=2x_0-2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x_0&=2 \\ x_0^2-1&=2x_0-2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x_0=1 \\ &0=0 \text{ ισχύει για } x_0=1. \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

Άσκηση 10/ Έστω $f(x)=x^2-2x+\beta$.

Να βρεθεί η τιμή του $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει εφαπτομένη την ευθεία $(\varepsilon): y=2x+3$

Λύση

Είναι $f'(x)=2x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρέπει $\left.\begin{aligned} f'(x_0)&=2 \\ \text{και } f(x_0)&=y(x_0) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} f'(x_0)&=2 \\ f(x_0)&=2x_0+3 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x_0-2&=2 \\ x_0^2-2x_0+\beta&=2x_0+3 \end{aligned}\right\}$

$\left.\begin{aligned} x_0&=2 \\ 4-4+\beta&=4+3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_0&=2 \\ \beta&=7. \end{aligned}$

Άσκηση 11/ Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R και $g(x) = f(x^2+2x-3)+2$ για κάθε $x \in R$. Αν η f έχει εφαπτομένη στο $A(0, f(0))$ την ευθεία $(\varepsilon): y = 4x+1$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο $B(1, g(1))$

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x^2+2x-3)(2x+2)$

Αφού η C_f έχει στο $A(0, f(0))$ εφαπτομένη την ευθεία $(\varepsilon): y = 4x+1$ θα είναι $\left.\begin{aligned} f'(0) &= 4 \\ \text{και } f(0) &= 4\cdot 0+1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} f'(0) &= 4 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$.

άρα $g(1) = f(0)+2 = 1+2 = 3$

$g'(1) = f'(0)\cdot 4 = 4\cdot 4 = 16$.

οπότε εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $B(1, g(1))$ είναι $y-g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-3 = 16(x-1) \Leftrightarrow$

$y = 16x-13$.

Άσκηση 12/ $f(x) = x^2+e^{-x}$ Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Λύση

Είναι $f'(x) = 2x-e^{-x}$ για κάθε $x \in R$.

Αρκεί να υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη που είναι η $y-f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ να διέρχεται από το $O(0,0)$ δηλαδή να ισχύει

$0-f(\xi) = f'(\xi)(0-\xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -f'(\xi)\cdot\xi \Leftrightarrow$

$f(\xi) = f'(\xi)\cdot\xi \Leftrightarrow f(\xi)-f'(\xi)\cdot\xi = 0 \Leftrightarrow$

$\xi^2+e^{-\xi}-(2\xi-e^{-\xi})\cdot\xi = 0 \Leftrightarrow \xi^2+e^{-\xi}-2\xi^2+e^{-\xi}\cdot\xi = 0$

$\Leftrightarrow \xi^2-e^{-\xi}-\xi e^{-\xi} = 0$

Έστω $g(x) = x^2 - e^{-x} - x e^{-x}$.

Η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτ. άρα και στο $[0,1]$.

. $g(0) = -1 < 0$
. $g(1) = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} > 0$

$\Big\}$ $g(0)\cdot g(1) < 0$ άρα ισχύει το Θ. Bolzano. άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$\xi^2 - e^{-\xi} - \xi e^{-\xi} = 0$.

Άσκηση 13/ Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ έχει στο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη την ευθεία $y = 3x - 1$. Να υπολογίσετε τα όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^3(x) + 2f(x) - 12}{f^2(x) - 4}$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 4}{x^2 - 1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2f(x) + x - 5}{x - 1}$

Λύση

Αφού η f έχει στο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη την $y = 3x - 1$. θα είναι $f'(1) = 3$. και $f(1) = y(1)$ $\Big\}$ $f'(1) = 3$, $f(1) = 3\cdot 1 - 1$ $\Big\}$ $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$.

Αφού η f παραγ. στο 1 είναι και συνεχής στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$

α) Θέτω $y = f(x)$ τότε $y \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. άρα

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^3(x) + 2f(x) - 12}{f^2(x) - 4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^3 + 2y - 12}{y^2 - 4} = \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+6)}{(y-2)(y+2)} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

β) $$\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \left[\frac{f(x) - 2}{x - 1} \cdot \frac{(f(x) + 2)}{x + 1} \right] \overset{*}{=} \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{f(x) + 2}{x + 1} = f'(1) \cdot \frac{f(1) + 2}{2} = 3 \cdot \frac{4}{2} = 6$$

(* αφού υπάρχουν τα όρια)

γ) αφού $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$ Θέτω

$g(x) = \dfrac{f(x) - 2}{x - 1}$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$ και $f(x) = (x-1)g(x) + 2$.

άρα $$\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) + x - 5}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)g(x) + 4 + x - 5}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)g(x) + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} [2g(x) + 1] = 2\cdot 3 + 1 = 7.$$

47

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1) $f(x) = 2\ln x + 2\sqrt{x} - x^2$
Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

2) $f(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομ. της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$

3) $f(x) = x^2 - x + 1$ Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f σε κάθε περίπτωση
i) που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 4$.
ii) που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{5}x + 3$.
iii) που είναι παράλληλη στον xx'
iv) που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx'

4) $f(x) = x^2 + 8$ Να βρεθούν οι εφαπτομένες της C_f που φέρνω από το σημείο $M(0, -8)$ προς την C_f.

5) $f(x) = x^x$ Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα xx'.

6) $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, $g(x) = x^3 + x^2 - 3$ Να βρεθούν τα α, β ώστε C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο η οποία να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$

7) $f(x) = x^2 + \beta x - 1$, $g(x) = \frac{\alpha + 1}{x}$
Να βρεθούν τα α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

8) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 - 1$.
Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g.

9) $f(x) = x^2 - 1 - \lambda x + \lambda$ Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να εφάπτεται στον xx'

10) $f(x) = x^3 - 4x^2 + \frac{\alpha}{x} - \beta \ln x$ Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η C_f να έχει στο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη την ευθεία $y = 2x + 2$.

Άσκηση 11

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R που έχει στο $A(1,f(1))$ εφαπτομένη την ευθεία $y=2x+1$, και $g(x) = f^3(x) - 2x f(x) + 5$.
Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο $B(1,g(1))$

Άσκηση 12

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R. που έχει στο $A(2,f(2))$ εφαπτομένη την ευθεία $y=2x-3$.
και $g(x) = f(x^2+2x-1) + f(2^x)$
Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο $B(1,g(1))$

Άσκηση 13/ Έστω $f(x) = x^2 - \ln x$
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\frac{1}{e}, e)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Άσκηση 14/ $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομ της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x-4$

Άσκηση 15/ Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει $f(2-x) - f(2+x) = 2\eta\mu x$ για κάθε $x \in R$ και $f(2) = 4$ Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(2, f(2))$.

Άσκηση 16/ $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2$.

Άσκηση 17/ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 2}{\eta\mu 2x} = 0$
και η συνάρτηση $h(x) = e^{-x} \cdot f(x)$
α) Να υπολογίσετε $f(0)$, $f'(0)$
β) Να βρεθούν οι εφαπτομένες των C_f, C_h στο σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ και να δείξετε ότι είναι παράλληλες μεταξύ τους

Άσκηση 18 Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι η $(\varepsilon): y = 4x - 2$.
Να υπολογίσετε τα όρια.

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x) - 3f(x) + 2}{f^3(x) - 8}$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^3(x) - 8}{x^2 - 1}$

γ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3f(x) + 2x - 8}{x - 1}$

Άσκηση 19 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 5x - 4$

α) Να βρεθεί το $f(1)$.

β) Να βρεθεί το $f'(1)$ αν $f'(1) < 0$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $g(x) = f^2(x) - 3f(x) + 4x^2$ στο $A(1, g(1))$.

Άσκηση 20 Έστω $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$, $x > 0$, $x \neq 1$

$g(x) = \ln x$, $h(x) = e^x$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $A(\alpha, g(\alpha))$ και

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο $B(\beta, h(\beta))$.

γ) Αν οι δύο εφαπτομένες που βρήκατε ταυτίζονται τότε να δείξετε ότι $f(\alpha) = 0$.