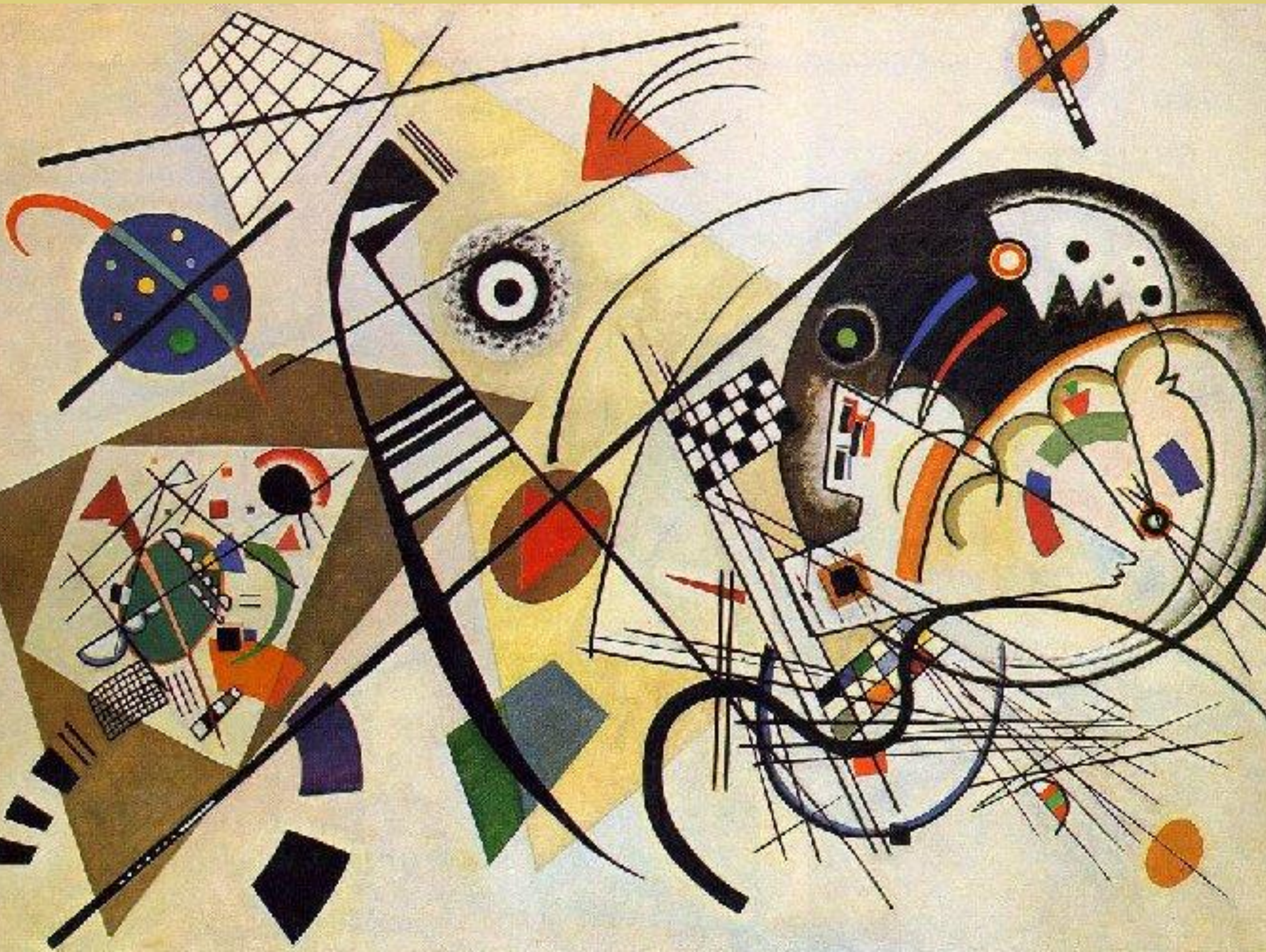
Συναρτήσεις

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Στέλιος Μιχαήλογλου



έκδοση 6η
20/4/2016

Επαναληπτικές Ασκήσεις στις Συναρτήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $0<\alpha<\beta$ ισχύει ότι $\ln\frac{\alpha}{\beta}<\beta-\alpha$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\ln x+x)+\ln x=1-x$.

2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $(-1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f^3(x)+f(x)=e^x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(f(x))+f(f(x))+1=0$.

3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $g(g(x))>f(f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την ανίσωση: $f(x^2)+f(x^4)>f(x)+f(x^3)$.

4. Δίνονται οι αντιστρέψιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $f^{-1}(g(x)+2)+x=4$ και $g^{-1}(8-2x-f(4-x))-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+1$ και $g(x)=3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση hΕxΓ Z JΕf ĕgΓΕxΓ, x ñ 1.

β) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της h.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της h βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda x}{x-2},\ x\neq 2,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=2$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\neq 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x+1))+f(x+1)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1$

δ) Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(2,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(g(x))+g(x)=e^x$ για κάθε $x>2$. Να δείξετε ότι

i. η g αντιστρέφεται.

ii. $g^{-1}(x)=2\ln x-\ln(x-2)$

6. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

γ) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να βρείτε συνάρτηση g ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(g(e^x))}+f(g(e^x))=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-2x+9$ και $g(x)=\sqrt{x-8}$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $h(x)=(gof)(x)$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x)=\sqrt{h(x)-1}$.

δ) Αν $F(x+2)=f(x)$, να βρείτε τη συνάρτηση F.

ε) Να βρείτε συνάρτηση t ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(t(x))=x$.

8. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(2,-1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f\left(f^{-1}(x^3)-3\right)<2$.

δ) Έστω ότι η f είναι περιττή. Να δείξετε ότι:

i. Η C_f διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,-2)$.

ii. $f(0)=0$.

iii. $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$ για κάθε $x\neq 0$.

9. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}+f(x)+x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=-e^x-x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(-e-1,1)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x-e^x-1)=x$.

ε) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha<\beta$ είναι $\dfrac{e^\beta-e^\alpha}{\alpha-\beta}<1$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(f(x))=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

β) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εκφράσετε την f^{-1} συναρτήσει της f.

γ) Αν γνωρίζετε ότι $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα α,β.

δ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f\circ f\circ g)(x)=4e^x+4x-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

11. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)+\ln f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x+\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)+\ln f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)<1$.

12. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(e^x\right)-1\right)=0$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

ε) Αν υπάρχει αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $\left(g^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ g^{-1}\right)(x)$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι η $g\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)-f(x)<x-x^2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g\left(g\left(4^x+x\right)\right)-g\left(f(18)+18\right)=0$.

14. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

β) η f είναι περιττή.

γ) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x<0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x+1+e^{x^3}\right)+f\left(x^3-1\right)=f(x+1)$$

15. Δίνεται περιττή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(A)=\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,-2)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)+f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g αντιστρέφονται και ισχύει: $f^{-1}(x)=g^{-1}(f(f(x))+x)$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(f(-2)))+f(-2)<g(g(x)-6)$.

16. Δίνεται αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)+y)=x+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

β) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)+e^x)=x+f(e-\ln x)$.

δ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ,να δείξετε ότι $f(x)=x$.

17. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

β) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, $x>0$.

γ) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

Έστω ότι επιπλέον για την f ισχύει ότι $f(x)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\ln x$ **για κάθε** $x>0$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$.

ε) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$.

18. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

β) $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$.

Έστω ότι επιπλέον για την f ισχύει ότι $f(2x)+e^{2x}=2e^x f(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $e^x+e^{x^3}>e^{x^2}+e^{x^4}$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)+f(2x-1)=2g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Έστω ότι για τη συνάρτηση f επιπλέον ισχύει: $2f(x)+f(-x)=x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=\frac{9}{2}x^3-6x^2+\frac{9}{2}x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $(x^3+x)^3+x^3+x-10=0$.

ε) Αν $h^3(x)-e^{3x}=e^x-h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $h(x)=e^x$.

20. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)>x_0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$.

γ) Έστω $g(x)=x-2\sqrt{x}+1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $(g\circ g)(x)=f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι $f\circ g=g\circ f$ για κάθε $x\geq 0$.

Λύσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $0<\alpha<\beta$ ισχύει ότι $\ln\frac{\alpha}{\beta}<\beta-\alpha$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\ln x+x)+\ln x=1-x$.

Λύση

α) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ (1), τότε: $\ln x_1<\ln x_2$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

$f(x)=f^{-1}(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x\Leftrightarrow \ln x+\cancel{x}=\cancel{x}\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x+1$. Κοινό σημείο το (1,1).

γ) $\ln\frac{\alpha}{\beta}<\beta-\alpha\Leftrightarrow \ln\alpha-\ln\beta<\beta-\alpha\Leftrightarrow \ln\alpha+\alpha<\ln\beta+\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και $0<\alpha<\beta$.

δ) Αρχικά πρέπει $x>0$ και $\ln x+x>0$ (3), τότε:

$\ln(\ln x+x)+\ln x=1-x\Leftrightarrow \ln(\ln x+x)+\ln x+x=1\Leftrightarrow$

$\ln f(x)+f(x)=1\Leftrightarrow f(f(x))=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Επειδή η (3) επαληθεύεται για $x=1$, η λύση αυτή γίνεται δεκτή.

2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $(-1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f^3(x)+f(x)=e^x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(f(x))+f(f(x))+1=0$.

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$ (1), τότε:

$f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$(2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow e^{x_1}-\cancel{2}\ge e^{x_2}-\cancel{2}\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f^3(x)+f(x)=e^x-2 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=e^x-2 \overset{f^2(x)+1>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\dfrac{e^x-2}{f^2(x)+1}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-2}{f^2(x)+1}=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-2}{f^2(x)+1}>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$ και αντίστοιχα $f(x)<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$

γ) $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ άρα η f αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow y^3+y=e^x-2 \Leftrightarrow e^x=y^3+y+2=(y+1)(y^2-y+2)$ (1).

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(y+1)(y^2-y+2)>0 \overset{y^2-y+2>0\ (\Delta<0)}{\Leftrightarrow} y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$.

Η (1) γίνεται: $x=\ln(y^3+y+2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln(y^3+y+2)$, $y>-1$ άρα

$f^{-1}(x)=\ln(x^3+x+2)$, $x>-1$.

δ) Επειδή η σχέση $f^3(x)+f(x)=e^x-2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$ προκύπτει: $f^3(f(x))+f(f(x))=e^{f(x)}-2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$f^3(f(x))+f(f(x))+1=0 \Rightarrow e^{f(x)}-2+1=0 \Leftrightarrow e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(\ln 2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$ $x=\ln 2$.

3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $g(g(x))>f(f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την ανίσωση: $f(x^2)+f(x^4)>f(x)+f(x^3)$.

Λύση

α) Επειδή $x\geq 0$ είναι $f(x)e^{f(x)}=x\geq 0$ και επειδή $e^{f(x)}>0$ για κάθε $x\geq 0$, είναι $f(x)\geq 0$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (1), τότε: $e^{f(x_1)}\geq e^{f(x_2)}$ (2) και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $f(x_1)e^{f(x_1)}\geq f(x_2)e^{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) $f \nearrow [0,+\infty) \Rightarrow 1-1$ άρα η f αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Rightarrow ye^y=x \Leftrightarrow f^{-1}(y)=ye^y$, $y\geq 0$ άρα $f^{-1}(x)=xe^x$, $x\geq 0$.

γ) $g(x)>f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(g(x))>f(f(x))$ (3)

Αν στη σχέση $g(x)>f(x)$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$ προκύπτει:

$g(g(x))>f(g(x))$ (4)

Από τις σχέσεις (3), (4) έχουμε: $g(g(x))>f(g(x))>f(f(x))$.

δ) Είναι $x^2-x=x(x-1)$ και $x^4-x^3=x^3(x-1)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $x^2-x=x(x-1)>0 \Leftrightarrow x^2>x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)>f(x)$ (5) και

$x^4-x^3=x^3(x-1)>0 \Leftrightarrow x^4>x^3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^4)>f(x^3)$ (6) και με πρόσθεση κατά μέλη των (5), (6) προκύπτει $f(x^2)+f(x^4)>f(x)+f(x^3)$. Προφανώς για κάθε $0<x<1$ είναι $f(x^2)+f(x^4)<f(x)+f(x^3)$, άρα η ανίσωση ισχύει για $x>1$.

4. Δίνονται οι αντιστρέψιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $f^{-1}(g(x)+2)+x=4$ και $g^{-1}(8-2x-f(4-x))-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+1$ και $g(x)=3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=-f(x)g(x),\ x\ge 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
γ) Να βρείτε τα ακρότατα της h.
δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της h βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

α) $f^{-1}(g(x)+2)+x=4 \Leftrightarrow f^{-1}(g(x)+2)=4-x \Leftrightarrow f(f^{-1}(g(x)+2))=f(4-x) \Leftrightarrow$

$g(x)+2=f(4-x)$ (1)

$g^{-1}(8-2x-f(4-x))-x=0 \Leftrightarrow g^{-1}(8-2x-f(4-x))=x \Leftrightarrow$

$8-2x-f(4-x)=g(x) \Leftrightarrow 8-2x-g(x)=f(4-x)$ (2)

Από τις (1), (2) είναι: $g(x)+2=8-2x-g(x) \Leftrightarrow 2g(x)=6-2x \Leftrightarrow g(x)=3-x$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $f(4-x)=3-x+2=5-x$.

Θέτουμε $4-x=u \Leftrightarrow 4-u=x$, τότε: $f(u)=5-(4-u)=1+u$ για κάθε $u\in\mathbb{R}$, άρα και $f(x)=1+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $h(x)=-f(x)g(x)=-(x+1)(3-x)=-3x+x^2-3+x=x^2-2x-3 \Leftrightarrow$

$h(x)=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4,\ x\ge 1$.

Έστω $1\le x_1<x_2$, τότε: $0\le x_1-1<x_2-1 \Rightarrow (x_1-1)^2<(x_2-1)^2 \Leftrightarrow$

$(x_1-1)^2-4<(x_2-1)^2-4 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2) \Rightarrow h\nearrow[1,+\infty) \Rightarrow$ f 1−1, άρα η h αντιστρέφεται.

$h(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^2-4=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y+4$ (3).

Επειδή $(x-1)^2\ge 0$, είναι $y+4\ge 0 \Leftrightarrow y\ge -4$.

Επειδή $x\ge 1$, η σχέση (3) γίνεται: $x-1=\sqrt{y+4} \Leftrightarrow x=\sqrt{y+4}+1$, άρα

$f^{-1}(y)=\sqrt{y+4}+1,\ y\ge -4$, οπότε $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1,\ x\ge -4$.

γ) $(x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-4\ge -4 \Leftrightarrow h(x)\ge -4=h(1)$, άρα η h έχει ελάχιστο το - 4 στο

$x=1$.

δ) $h(x)>f(x)\Leftrightarrow x^2-2x-3>x+1\Leftrightarrow x^2-3x-4>0\Leftrightarrow (x-4)(x+1)>0\overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} x>4$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda x}{x-2}$, $x\neq 2$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=2$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\neq 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x+1))+f(x+1)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1$

δ) Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(2,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(g(x))+g(x)=e^x$ για κάθε $x>2$. Να δείξετε ότι:

i. η g αντιστρέφεται.

ii. $g^{-1}(x)=2\ln x-\ln(x-2)$

Λύση

α) Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \frac{\lambda x}{x-2}\neq 2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \lambda x\neq 2x-4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ (\lambda-2)x\neq -4 \end{cases} \quad (1)$$

Αν $\lambda\neq 2$, τότε $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq \frac{-4}{\lambda-2} \end{cases}$, οπότε η σχέση $(f\circ f)(x)=x$ δεν ισχύει για κάθε $x\neq 2$.

Αν $\lambda=2$, τότε από την (1) έχουμε: $\begin{cases} x\neq 2 \\ 0\neq -4 \quad \text{ισχύει} \end{cases}$, άρα $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{2\}$. Τότε

$$f(x)=\frac{2x}{x-2} \text{ και } (f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2\frac{2x}{x-2}}{\frac{2x}{x-2}-2}=\frac{\frac{4x}{\cancel{x-2}}}{\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}+4}{\cancel{x-2}}}=\frac{4x}{4}=x$$

β) Έστω $x_1,x_2\neq 2$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$\frac{2x_1}{x_1-2}=\frac{2x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow \cancel{2x_1x_2}-4x_1=\cancel{2x_1x_2}-4x_2\Leftrightarrow -4x_1=-4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{2x}{x-2}=y\Leftrightarrow 2x=xy-2y\Leftrightarrow 2y=xy-2x\Leftrightarrow x(y-2)=2y$ (2).

Αν $y=2$, τότε η (2) γίνεται $0=4$ και είναι αδύνατη.

Αν $x=2$, τότε και πάλι η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y \neq 2$ τότε $x = \dfrac{2y}{y-2}$ δηλαδή $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-2}$, $y \neq 2$, άρα

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-2} = f(x),\ x \neq 2$$

γ) Επειδή $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 2$, είναι $f(f(x+1)) = x+1$ με $x+1 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$$f(f(x+1)) + f(x+1) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2} + 1 \Leftrightarrow x+1+f(x+1) = x + f(e^{-x}) + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) = f(e^{-x}) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x+1 = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x - 1 = 0 \ (3)$$ με

$e^{-x} \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq \ln 2 \Leftrightarrow x \neq -\ln 2$.

Έστω $h(x) = e^{-x} - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2$ (4) και $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε:

$$e^{-x_1} - x_1 > e^{-x_2} - x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} - x_1 - 1 > e^{-x_2} - x_2 - 1 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \searrow \mathbb{R} \Rightarrow h\ 1-1$$

$$(3) \Rightarrow h(x) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$$ δεκτή.

δ) i. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ και

$f(g(x_1)) + g(x_1) = f(g(x_2)) + g(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g\ 1-1$ και αντιστρέφεται.

ii. $g(x) = y \Rightarrow f(y) + y = e^x \Leftrightarrow \dfrac{2y}{y-2} + y = e^x \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y^2}{y-2} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{y^2}{y-2}$, άρα

$g^{-1}(y) = \ln\dfrac{y^2}{y-2}$, $y > 2$, οπότε

$$g^{-1}(x) = \ln\frac{x^2}{x-2} = \ln x^2 - \ln(x-2) = 2\ln x - \ln(x-2),\ x > 2$$

6. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.
γ) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
δ) Να βρείτε συνάρτηση g ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$e^{f(g(e^x))} + f(g(e^x)) = x + 1$$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (1), τότε:

$e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)}$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$e^{f(x_1)} + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για $x=0$ η αρχική σχέση γίνεται: $e^{f(0)}+f(0)=1$ (3).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και

$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow g\ 1-1$.

$(3)\Rightarrow g(f(0))=g(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=0$

Για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για κάθε $x<0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)=0$

γ) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1$ άρα η f αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Rightarrow e^y+y-1=x$, άρα $f^{-1}(y)=e^y+y-1,\ y\in\mathbb{R}$ οπότε $f^{-1}(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν στη σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(e^x)$, προκύπτει:

$e^{f(g(e^x))}+f(g(e^x))=g(e^x)+1$, τότε η σχέση $e^{f(g(e^x))}+f(g(e^x))=x+1$ γίνεται:

$g(e^x)+1=x+1\Leftrightarrow g(e^x)=x$. Αν θέσουμε $e^x=u>0\Leftrightarrow x=\ln u$, έχουμε:

$g(u)=\ln u$, $u>0$, άρα $g(x)=\ln x,\ x>0$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-2x+9$ και $g(x)=\sqrt{x-8}$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $h(x)=(gof)(x)$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x)=\sqrt{h(x)-1}$

δ) Αν $F(x+2)=f(x)$, να βρείτε τη συνάρτηση F.

ε) Να βρείτε συνάρτηση t ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(t(x))=x$.

Λύση

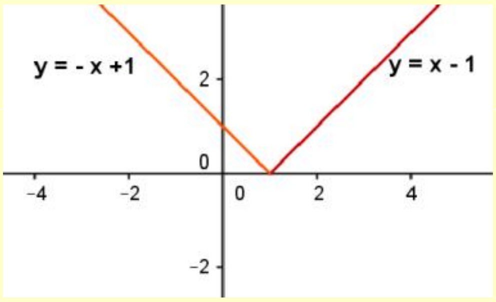
α) Για να ορίζεται η g πρέπει: $x-8\ge 0\Leftrightarrow x\ge 8$, άρα $A_g=[8,+\infty)$.

Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2-2x+9\ge 8\end{cases}\Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$$ ισχύει, άρα $A_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

Είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2-2x+9-8}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

β) Είναι $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ -x+1, & x<1\end{cases}$



γ) $\varphi(x)=\sqrt{|x-1|-1}$

Για να ορίζεται η φ, πρέπει:

$|x-1|-1\ge 0\Leftrightarrow |x-1|\ge 1\Leftrightarrow x-1\le -1\Leftrightarrow x\le 0$ ή $x-1\ge 1\Leftrightarrow x\ge 2$.

Άρα $A_\varphi=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

δ) Είναι $F(x+2)=f(x)=x^2-2x+9$. Θέτουμε $x+2=u \Leftrightarrow x=u-2$. Τότε:

$F(u)=(u-2)^2-2(u-2)+9=u^2-4u+4-2u+4+9=u^2-6u+17$, $u\in\mathbb{R}$, άρα και

$F(x)=x^2-6x+17$, $x\in\mathbb{R}$.

ε) Αρχικά για να ορίζεται η $g(t(x))$ πρέπει: $\begin{cases} x\in A_t \\ t(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ t(x)\geq 8 \end{cases}$.

Είναι $g(t(x))=x \Leftrightarrow \sqrt{t(x)-8}=x\geq 0 \Leftrightarrow t(x)-8=x^2 \Leftrightarrow t(x)=x^2+8,\ x\geq 0$

8. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(2,-1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f\left(f^{-1}(x^3)-3\right)<2$.

δ) Έστω ότι η f είναι περιττή. Να δείξετε ότι:

i. Η C_f διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,-2)$.

ii. $f(0)=0$.

iii. $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$ για κάθε $x\neq 0$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $f(-1)=2>f(2)=-1$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$f(x_1)>f(x_2)$ και $f(f(x_1))<f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2) \Rightarrow f\circ f \nearrow \mathbb{R}$

γ) $f \searrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ άρα αντιστρέφεται.

$f\left(f^{-1}(x^3)-3\right)<2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x^3)-3\right)<f(-1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^3)-3>-1 \Leftrightarrow f^{-1}(x^3)>2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(f^{-1}(x^3)\right)<f(2) \Leftrightarrow x^3<-1 \Leftrightarrow x<-1$

δ) i. Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=-1$ είναι $f(1)=-f(-1)=-2$, άρα η C_f διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,-2)$.

ii. Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f(0)=-f(0) \Leftrightarrow 2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

iii. Για $x>0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0$ και $e^x>e^0=1 \Leftrightarrow e^x-1>0$, άρα $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$.

Για $x<0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και $e^x<e^0=1 \Leftrightarrow e^x-1<0$, άρα $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$

9. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}+f(x)+x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=-e^x-x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(-e-1,1)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x-e^x-1)=x$.

ε) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha<\beta$ είναι $\dfrac{e^\beta-e^\alpha}{\alpha-\beta}<1$.

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\le f(x_2)$ (1), τότε $e^{f(x_1)}\le e^{f(x_2)}$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:
$e^{f(x_1)}+f(x_1)\le e^{f(x_2)}+f(x_2)\Leftrightarrow -x_1\le -x_2\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)>f(x_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $f\searrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται.
Θέτουμε $f(x)=y$ και η αρχική σχέση γίνεται:
$e^y+y+x=0\Leftrightarrow x=-e^y-y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-e^y-y,\ y\in\mathbb{R}$, άρα και $f^{-1}(x)=-e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Για να ανήκει το Α στη C_f πρέπει:
$f(-1)=0\Leftrightarrow f^{-1}(f(-1))=f^{-1}(0)\Leftrightarrow -1=-e^0-0$ που ισχύει.
Για να ανήκει το Β στη C_f πρέπει:
$f(-e-1)=1\Leftrightarrow f^{-1}(f(-e-1))=f^{-1}(1)\Leftrightarrow -e-1=-e^1-1$ που ισχύει.

δ) $f(\ln x+e^x-1)=x\Leftrightarrow f^{-1}(f(\ln x-e^x-1))=f^{-1}(x)\Leftrightarrow \ln x-\cancel{e^x}-1=-\cancel{e^x}-x\Leftrightarrow$
$\ln x+x-1=0$ (3).
Έστω $g(x)=\ln x+x-1,\ x>0$.

Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$, τότε $\ln x_1<\ln x_2$ και $\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2\Leftrightarrow$
$\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow g\ 1-1$.
$(3)\Rightarrow g(x)=g(1)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=1$

ε) Επειδή $\alpha<\beta$ είναι $\alpha-\beta<0$, άρα:
$\dfrac{e^\beta-e^\alpha}{\alpha-\beta}<1\Leftrightarrow e^\beta-e^\alpha>\alpha-\beta\Leftrightarrow -\alpha-e^\alpha>-\beta-e^\beta\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha)>f^{-1}(\beta)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\alpha<\beta$ που ισχύει.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(f(x))=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

β) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εκφράσετε την f^{-1} συναρτήσει της f.

γ) Αν γνωρίζετε ότι $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα α,β.

δ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f\circ f\circ g)(x)=4e^x+4x-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

Λύση

α) Για $x=1$ είναι $f(f(1))=4\cdot 1-3=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$$f\Big(\underbrace{f(f(1))}_{1}\Big)=4f(1)-3\Leftrightarrow f(1)=4f(1)-3\Leftrightarrow 3f(1)=3\Leftrightarrow f(1)=1.$$

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow 4x_1-\cancel{3}=4x_2-\cancel{3}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1−1.

Θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε: $f(y)=4x-3\Leftrightarrow 4x=f(y)+3\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}(f(y)+3)$, άρα

$f^{-1}(y)=\frac{1}{4}(f(y)+3),\ y\in\mathbb{R}$ οπότε και $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(f(x)+3),\ x\in\mathbb{R}$

γ) Είναι $f(f(x))=\alpha f(x)+\beta=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\alpha\beta+\beta$. Όμως $f(f(x))=4x-3$, άρα πρέπει $\alpha^2x+\alpha\beta+\beta=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν $\begin{cases}\alpha^2=4\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm 2\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}$.

Αν $\alpha=2$ τότε $2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow 3\beta=-3\Leftrightarrow\beta=-1$ και $f(x)=2x-1$.

Αν $\alpha=-2$ τότε $-2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow -\beta=-3\Leftrightarrow\beta=3$ και $f(x)=-2x+3$.

δ) i. Αν στη σχέση $f(f(x))=4x-3$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$ προκύπτει:

$f(f(g(x)))=4g(x)-3$. Όμως $f(f(g(x)))=4e^x+4x-7$, άρα

$4g(x)-3=4e^x+4x-7\Leftrightarrow 4g(x)=4e^x+4x-4\Leftrightarrow g(x)=e^x+x-1$.

ii. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow$
$g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0$ και για κάθε $x<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)=0$.

11. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)+\ln f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x+\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)+\ln f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)<1$.

Λύση

α) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ (1), τότε: $\ln x_1<\ln x_2$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε:

$$f(x_1)+\ln f(x_1)<f(x_2)+\ln f(x_2)\Leftrightarrow g\left(f(x_1)\right)<g\left(f(x_2)\right)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}.$$

γ) Είναι $f(1)+\ln f(1)=1\Leftrightarrow g\left(f(1)\right)=g(1)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=1$

δ) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y$ και η αρχική σχέση γίνεται: $y+\ln y=x\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y+\ln y,\ y>0$ άρα $f^{-1}(x)=x+\ln x,\ x>0$.

ε) Αν στη σχέση $f(x)+\ln f(x)=x$ αντικαταστήσουμε όπου x το $f\left(3^x+x^3\right)$, προκύπτει:

$f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)+\ln f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)=f\left(3^x+x^3\right)$, τότε:

$$f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)+\ln f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)<1\Leftrightarrow f\left(3^x+x^3\right)<1\Leftrightarrow f\left(3^x+x^3\right)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}3^x+x^3<1\Leftrightarrow$$

$3^x+x^3-1<0$ (3).

Έστω $h(x)=3^x+x^3-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $3^{x_1}<3^{x_2},\ x_1^3<x_2^3$ οπότε και

$3^{x_1}+x_1^3<3^{x_2}+x_2^3\Leftrightarrow 3^{x_1}+x_1^3-1<3^{x_2}+x_2^3-1\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow h\nearrow\mathbb{R}$.

$(3)\Rightarrow h(x)<h(0)\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

12. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(e^x\right)-1\right)=0$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

ε) Αν υπάρχει αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $(g^{-1}\circ f)(x)=(f\circ g^{-1})(x)$.

Λύση

α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ (1), τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y$ και η αρχική σχέση γίνεται: $y^3+y=2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y^3+y)$ άρα

$f^{-1}(y)==\frac{1}{2}(y^3+y)$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε και $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x^3+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=0$ άρα $f(f^{-1}(0))=f(0)\Leftrightarrow 0=f(0)$ και

$f^{-1}(1)=1$ άρα $f(f^{-1}(1))=f(1)\Leftrightarrow 1=f(1)$.

γ) $f(f^{-1}(e^x)-1)=0\Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x)-1)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(e^x)-1=0\Leftrightarrow$

$f^{-1}(e^x)=1\Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x))=f(1)\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

δ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, για να είναι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} αρκεί η C_f να βρίσκεται πάνω από την $y=x$, δηλαδή:

$f(x)>x\Leftrightarrow f^3(x)>x^3$, οπότε και

$f^3(x)+f(x)>x^3+x\Leftrightarrow 2x>x^3+x\Leftrightarrow$

$x^3-x<0\Leftrightarrow x(x^2-1)<0\Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	−		−	0	+		+
x^2-1	+	0	−		−	0	+
Γ	−	0	+	0	−	0	+

ε) Είναι $f(g(x))=g(f(x))\Leftrightarrow g^{-1}(f(g(x)))=g^{-1}(g(f(x)))\Leftrightarrow$

$g^{-1}(f(g(x)))=(g^{-1}\circ g)(f(x))\Leftrightarrow g^{-1}(f(g(x)))=f(x)$ και αν αντικαταστήσουμε όπου x το $g^{-1}(x)$, έχουμε: $g^{-1}(f(g(g^{-1}(x))))=f(g^{-1}(x))\Leftrightarrow g^{-1}(f(x))=f(g^{-1}(x))$, δηλαδή

$(g^{-1}\circ f)(x)=(f\circ g^{-1})(x)$

13. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι η $g\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)-f(x)<x-x^2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g(g(4^x+x))-g(f(18)+18)=0$.

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Για $x = x_1$ και $y = x_2$ έχουμε: $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| = -x_1 + x_2 \Leftrightarrow$

$-(-x_1 + x_2) < f(x_1) - f(x_2) < -x_1 + x_2 \Leftrightarrow$

$x_1 - x_2 + x_1 - x_2 < f(x_1) - f(x_2) + x_1 - x_2 < -x_1 + x_2 + x_1 - x_2 \Leftrightarrow$

$2x_1 - 2x_2 < g(x_1) - g(x_2) < 0 \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) < 0 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$g(x_1) > g(x_2) \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(g(x_1)) < g(g(x_2)) \Leftrightarrow (g \circ g)(x_1) < (g \circ g)(x_2) \Rightarrow g \circ g \nearrow \mathbb{R}$

γ) $f(x^2) - f(x) < x - x^2 \Leftrightarrow f(x^2) + x^2 < f(x) + x \Leftrightarrow g(x^2) < g(x) \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} x^2 > x \Leftrightarrow$

$x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$

δ) Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$.

$g(g(4^x + x)) - g(f(18) + 18) = 0 \Leftrightarrow g(g(4^x + x)) = g(f(18) + 18) \overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow}$

$g(4^x + x) = f(18) + 18 \Leftrightarrow g(4^x + x) = g(18) \overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow} 4^x + x = 18 \Leftrightarrow 4^x + x - 18 = 0\,(1)$.

Έστω $h(x) = 4^x + x - 18,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $4^{x_1} < 4^{x_2}$ και

$4^{x_1} + x_1 < 4^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow 4^{x_1} + x_1 - 18 < 4^{x_2} + x_2 - 18 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$.

$(1) \Rightarrow h(x) = h(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 2$.

14. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) η f είναι περιττή.

γ) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x + 1 + e^{x^3}\right) + f(x^3 - 1) = f(x + 1)$$

Λύση

α) Για $x = y = 0$ είναι $\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) Για $y = -x$ είναι $f(x - x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow$

$0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ περιττή

γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1 - x_2 < 0$ και

$f(x_1 - x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) + f(-x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Επειδή $f(0) = 0$ και η f έχει μοναδική ρίζα, αυτή θα είναι η $x = 0$.

$f\left(x+1+e^{x^3}\right)+f\left(x^3-1\right)=f\left(x+1\right)\Leftrightarrow \cancel{f\left(x+1\right)}+f\left(e^{x^3}\right)+f\left(x^3-1\right)=\cancel{f\left(x+1\right)}\Leftrightarrow$

$f\left(e^{x^3}+x^3-1\right)=0\Leftrightarrow e^{x^3}+x^3-1=0$ (1).

Έστω $g\left(x\right)=e^{x^3}+x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^3<x_2^3$ (2) και $e^{x_1^3}<e^{x_2^3}$ (3) και με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει: $e^{x_1^3}+x_1^3<e^{x_2^3}+x_2^3\Leftrightarrow e^{x_1^3}+x_1^3-1<e^{x_2^3}+x_2^3-1\Leftrightarrow g\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)\Rightarrow$ $g\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1$.

$(1)\Rightarrow g\left(x\right)=g\left(0\right)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

15. Δίνεται περιττή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(A\right)=\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(2,-2\right)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\left(x\right)=\left(f\circ f\circ f\right)\left(x\right)+f\left(x\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g αντιστρέφονται και ισχύει: $f^{-1}\left(x\right)=g^{-1}\left(f\left(f\left(x\right)\right)+x\right)$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f\left(f\left(-2\right)\right)\right)+f\left(-2\right)<g\left(g\left(x\right)-6\right)$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=2$ είναι $f\left(-2\right)=-f\left(2\right)=2$. Επειδή $f\left(-2\right)>f\left(2\right)$ $\left(-2<2\right)$ και η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε

$f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(f\left(x_1\right)\right)<f\left(f\left(x_2\right)\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(f\left(f\left(x_1\right)\right)\right)>f\left(f\left(f\left(x_2\right)\right)\right)$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$f\left(f\left(f\left(x_1\right)\right)\right)+f\left(x_1\right)>f\left(f\left(f\left(x_2\right)\right)\right)+f\left(x_2\right)\Leftrightarrow g\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$.

γ) Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως μονότονες είναι και 1-1 και αντιστρέφονται.

$f^{-1}\left(x\right)=g^{-1}\left(f\left(f\left(x\right)\right)+x\right)\Leftrightarrow g\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=g\left(g^{-1}\left(f\left(f\left(x\right)\right)+x\right)\right)\Leftrightarrow g\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+x$

και αντικαθιστώντας όπου x το $f\left(x\right)$ έχουμε:

$g\left(f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)\right)=f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)+f\left(x\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)=f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)+f\left(x\right)$ που ισχύει.

δ) Για $x=-2$ είναι $g\left(-2\right)=f\left(f\left(f\left(-2\right)\right)\right)+f\left(-2\right)$, άρα η ανίσωση γίνεται:

$f\left(f\left(f\left(-2\right)\right)\right)+f\left(-2\right)<g\left(g\left(x\right)-6\right)\Leftrightarrow g\left(-2\right)<g\left(g\left(x\right)-6\right)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}-2>g\left(x\right)-6\Leftrightarrow$ $g\left(x\right)<4$ (3).

Είναι $g\left(-2\right)=f\left(f\left(\underbrace{f\left(-2\right)}_{2}\right)\right)+f\left(-2\right)=f\left(\underbrace{f\left(2\right)}_{-2}\right)+2=f\left(-2\right)+2=2+2=4$, άρα η (3)

γίνεται: $g\left(x\right)<g\left(-2\right)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x>-2$.

16. Δίνεται αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\big(f(x)+y\big)=x+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

β) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(f(x)+e^x\big)=x+f(e-\ln x)$.

δ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ,να δείξετε ότι $f(x)=x$.

Λύση

α) Για $x=y=0$ είναι: $f\big(f(0)\big)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$.

β) Για $y=0$ είναι

$$f\big(f(x)\big)=x+f(0)\Leftrightarrow f\big(f(x)\big)=x\Leftrightarrow f^{-1}\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

γ) Αν στην αρχική σχέση αντικαταστήσουμε $y=e^x$ προκύπτει: $f\big(f(x)+e^x\big)=x+f(e^x)$.

Η εξίσωση γίνεται: $f\big(f(x)+e^x\big)=x+f(e-\ln x)\Leftrightarrow \cancel{x}+f(e^x)=\cancel{x}+f(e-\ln x)\Leftrightarrow$

$f(e^x)=f(e-\ln x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}e^x=e-\ln x\Leftrightarrow e^x+\ln x-e=0$ (1).

Έστω $g(x)=e^x+\ln x-e,\ x>0$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$, $\ln x_1<\ln x_2$ οπότε και

$\ln x_1+e^{x_1}<\ln x_2+e^{x_2}\Leftrightarrow\ln x_1+e^{x_1}-e<\ln x_2+e^{x_2}-e\Leftrightarrow$

$g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow 1-1$.

$(1)\Rightarrow g(x)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

δ) Έστω ότι $f(x)>x$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι:

$f\big(f(x)\big)>f(x)\Leftrightarrow x>f(x)$ άτοπο. Όμοια αν $f(x)<x$, οπότε $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

17. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

β) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, $x>0$.

γ) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

Έστω ότι επιπλέον για την f ισχύει ότι f E x F H f $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ Z J ln x για κάθε x [0 .

δ) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$.

ε) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$.

Λύση

α) Για $x=y=1$ είναι $\cancel{f(1)}=\cancel{f(1)}+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

β) Για $y=\frac{1}{x}$ προκύπτει: $f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow \cancel{f(1)}^{0}=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

γ) Όπου y το $\frac{1}{y}$ προκύπτει: $f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

δ) Με βάση το β σκέλος είναι: $f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-f\left(x^2\right)$ (1).

Όμως $f\left(x^2\right)=f(x\cdot x)=f(x)+f(x)=2f(x)$ και η (1) γίνεται: $f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-2f(x)$, άρα

$f(x)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\ln x\Leftrightarrow f(x)-2f(x)=-\ln x\Leftrightarrow -f(x)=-\ln x\Leftrightarrow f(x)=\ln x$

ε) Επειδή $A_f=(0,+\infty)$ για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}\Rightarrow x>1$, άρα $A_{f\circ f}=(1,+\infty)$.

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\ln(\ln x)$.

18. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

β) Να δείξετε ότι $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$.

Έστω ότι επιπλέον για την f ισχύει ότι $f(2x)+e^{2x}\ge 2e^x f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $e^x+e^{x^3}>e^{x^2}+e^{x^4}$.

Λύση

α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left(f(0)-1\right)=0\Leftrightarrow$
$f(0)=0$ απορρίπτεται ή $f(0)=1$.

β) Για $y=-x$ είναι

$f(x-x)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow 1=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

γ) Αντικαθιστώντας όπου y το $-y$ στην αρχική σχέση, έχουμε:

$f(x-y)=f(x)f(-y)=f(x)\frac{1}{f(y)}=\frac{f(x)}{f(y)}$

δ) Αντικαθιστώντας $y=x$ στην αρχική σχέση, έχουμε:

$f(x+x)=f(x)f(x)\Leftrightarrow f(2x)=f^2(x)$, οπότε

$f(2x)+e^{2x}=2e^x f(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2e^x f(x)+e^{2x}=0\Leftrightarrow \left(f(x)-e^x\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)=e^x$.

ε) Είναι $x-x^2=x(1-x)$ και $x^3-x^4=x^3(1-x)$.

Αν $x<0$ ή $x>1$, τότε $x-x^2=x(1-x)<0\Leftrightarrow x<x^2\Leftrightarrow e^x<e^{x^2}$ (2) και

$x^3-x^4=x^3(1-x)<0\Leftrightarrow x^3<x^4\Leftrightarrow e^{x^3}<e^{x^4}$ (3) και με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3)

προκύπτει $e^x+e^{x^3}<e^{x^2}+e^{x^4}$.

Αν $0<x<1$ τότε $x-x^2=x(1-x)>0\Leftrightarrow x>x^2\Leftrightarrow e^x>e^{x^2}$ (4) και

$x^3-x^4=x^3(1-x)>0\Leftrightarrow x^3>x^4\Leftrightarrow e^{x^3}>e^{x^4}$ (5) και με πρόσθεση κατά μέλη των (4), (5)

προκύπτει $e^x+e^{x^3}>e^{x^2}+e^{x^4}$. Τέλος για $x=0$ ή $x=1$ ισχύει ότι $e^x+e^{x^3}=e^{x^2}+e^{x^4}$.

Τελικά είναι: $e^x+e^{x^3}>e^{x^2}+e^{x^4}\Leftrightarrow 0<x<1$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)+f(2x-1)=2g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Έστω ότι για τη συνάρτηση f επιπλέον ισχύει: $2f(x)+f(-x)=x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=\frac{9}{2}x^3-6x^2+\frac{9}{2}x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^3+x\right)^3+x^3+x-10=0$.

ε) Αν $h^3(x)-e^{3x}=e^x-h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $h(x)=e^x$.

Λύση

α) Για $x=1$ είναι $f(1)+f(1)=2g(1)\Leftrightarrow 2f(1)=2g(1)\Leftrightarrow f(1)=g(1)$, άρα οι C_f, C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο το οποίο έχει τετμημένη 1.

β) Αν στη σχέση $2f(x)+f(-x)=x^3+x$ (1) αντικαταστήσουμε όπου x το $-x$ προκύπτει:

$2f(-x)+f(x)=-x^3-x\Leftrightarrow f(x)+2f(-x)=-x^3-x$ (2).

Από το σύστημα των (1), (2) έχουμε:

$$\begin{cases}2f(x)+f(-x)=x^3+x & |\cdot(-2)\\ f(x)+2f(-x)=-x^3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4f(x)-2f(-x)=-2x^3-2x\\ f(x)+2f(-x)=-x^3-x\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$-3f(x)=-3x^3-3x\Leftrightarrow f(x)=x^3+x$.

Είναι $2g(x)=f(x)+f(2x-1)=x^3+x+(2x-1)^3+(2x-1)\Leftrightarrow$

$2g(x)=x^3+x+8x^3-12x^2+6x-1+2x-1=9x^3-12x^2+9x-2\Leftrightarrow$

$g(x)=\frac{9}{2}x^3-6x^2+\frac{9}{2}x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^3<x_2^3$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

δ) $\left(x^3+x\right)^3+x^3+x-10=0 \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=10 \Leftrightarrow f(f(x))=10 \Leftrightarrow$

$f(f(x))=f(2) \overset{f\nearrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$

ε) $h^3(x)-e^{3x}=e^x-h(x) \Leftrightarrow h^3(x)+h(x)=\left(e^x\right)^3+e^x \Leftrightarrow f(h(x))=f\left(e^x\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} h(x)=e^x$.

20. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$f\left(\dfrac{x+f(x)}{2}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)>x_0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$.

γ) Έστω $g(x)=x-2\sqrt{x}+1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $(g\circ g)(x)=f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι $f\circ g=g\circ f$ για κάθε $x\geq 0$.

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)>x_0$, τότε

$f(x_0)+x_0>2x_0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)+x_0}{2}>x_0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι:

$f\left(\dfrac{f(x_0)+x_0}{2}\right)>f(x_0) \Leftrightarrow x_0>f(x_0)$ άτοπο.

β) Όμοια με το προηγούμενο σκέλος αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)<x_0$ οπότε $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) $g(x)=x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$, $x\geq 0$.

Για να ορίζεται η $g\circ g$ πρέπει: $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 0$ και $A_{g\circ g}=[0,+\infty)$.

Είναι $(g\circ g)(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-1\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-1\right|-1\right)^2$.

Αν $x>1$, τότε $(g\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}-1-1\right)^2=\left(\sqrt{x}-2\right)^2=x-4\sqrt{x}+4\neq x$, ενώ

αν $0\leq x\leq 1$ είναι $\sqrt{x}-1\leq 0$, οπότε $(g\circ g)(x)=\left(-\sqrt{x}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)^2=x$. Άρα $x\in[0,1]$.

δ) Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x\geq 0$ και $A_{f\circ g}=[0,+\infty)$.

Είναι: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)$.

Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει: $\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 0$ και $A_{g\circ f}=[0,+\infty)$

Είναι: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)$. Άρα $f\circ g=g\circ f$ για κάθε $x\geq 0$.