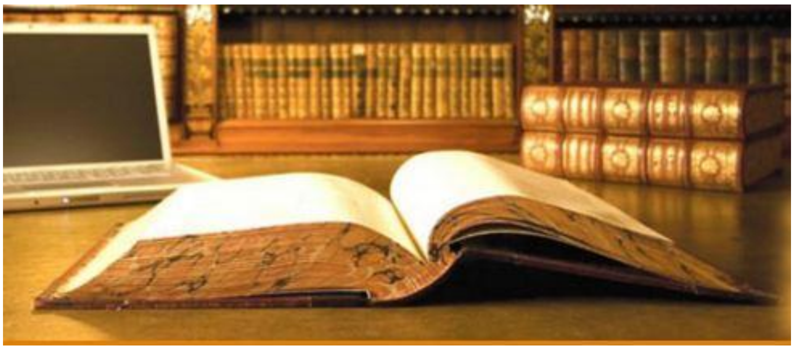
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Επαναληπτικές ασκήσεις παραγώγων 2018

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς



Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

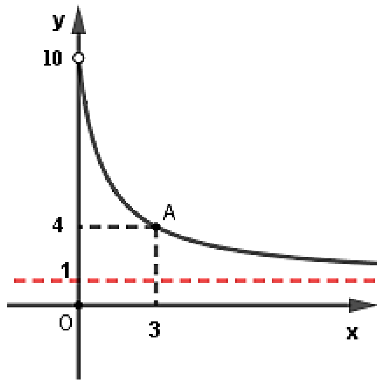
γ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 0,1 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο.

i. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A\left(\sqrt{3},1\right)$.

ii. Αν Κ,Λ οι προβολές του Μ στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΚΜΛ τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το Α.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha>0$ για τις οποίες υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α.

2. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=0$.

ε) Αν η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να δείξετε ότι $2g(5)<g(4)+g(6)$.

στ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{g(x)-10}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right]$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

ζ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_g και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Αν $f'(3)=e^{-3}$ να βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\eta\mu^3 x+\alpha x+1, & x<0 \\ 2\eta\mu^2 x-x^2+x+\alpha, & x\ge 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

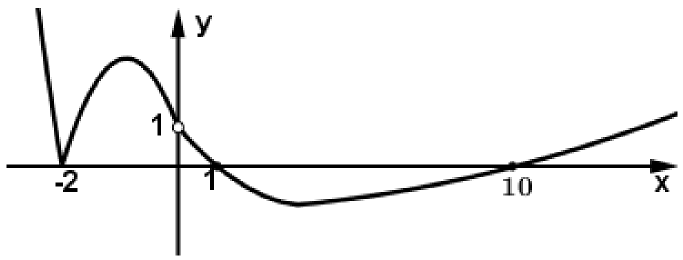
Έστω $\alpha=1$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

γ) Να δείξετε ότι **δεν** εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi,\pi]$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,\pi)$.

4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-x^3}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|g(x)|}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{f(x)-1}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $x_0 f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$.

στ) Αν η γραφική παράσταση της g έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$ την ευθεία ε: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1,f(1))$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$.

α) Αν $f(x)\ge 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

β) Για $\alpha=e$,

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

iii. αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-2x+2,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x(\ln x+2)=2(x+2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f'(x^2)>f'(x+1)+f'(x^2+1)$ για κάθε $x>1$.

δ) Να αποδείξετε $2xf(x)+f(x^2)+3\ln^2 2+6\ln 2>2xf(x+1)+f(x^2+1)+6$ για κάθε $x>1$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x^3$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε τουλάχιστον ένα σημείο.

β) Να βρείτε διάστημα της μορφής $(\alpha,\alpha+1)$ με $\alpha\in\mathbb{Z}$ το οποίο να περιέχει την τετμημένη κοινού σημείου των C_f, C_g.

γ) Να δείξετε ότι το κοινό τους σημείο είναι μοναδικό.

δ) Να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_g σε σημείο $B(\rho,g(\rho))$ με $\rho\le 0$ η οποία εφάπτεται και της C_f. Στη συνέχεια να βρείτε διάστημα της μορφής $(\beta,\beta+1)$ με $\beta\in\mathbb{Z}$ το οποίο να περιέχει την τετμημένη του B.

8. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $4x^3+4\le f'(x)\le 4x^3+3x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και $f(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $x^4+4x<f(x)<x^4+x^3+4x$ για κάθε $x>0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x^3=2x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα μεγαλύτερη του -1.

9. Δίνεται παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y=4x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

10. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}$συνx για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{\eta\mu x+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $e^{-g(x)}f(x)-2xe^{-g(x)}=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $x\left(2\sqrt{2}-x\right)\le e^{g(x)}-e^{g(0)}\le x\left(\sqrt{10}-x\right)$, $x>0$.

ii. η εξίσωση $e^{g(x)}+x^2=2x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

11. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,3]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(2)=0$, $f(3)=2$, $f'(3)=1$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[2,3]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x-1$ εφάπτεται της C_f.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<-1$.

ε) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2(x-2)$ για κάθε $x\in[2,3]$.

Παρουσίαση ασκήσεων

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 0,1 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο.

i. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A\left(\sqrt{3},1\right)$.

ii. Αν Κ,Λ οι προβολές του Μ στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΚΜΛ τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το Α.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha>0$ για τις οποίες υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α.

Λύση

α) Έστω $x_1,x_2\in[0,2]$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2\Leftrightarrow 4-x_1^2>4-x_2^2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=y$ με $y\ge 0$ (1), τότε $4-x^2=y^2\Leftrightarrow 4-y^2=x^2$ (2)

Πρέπει $4-y^2\ge 0\Leftrightarrow y^2\le 4\Leftrightarrow |y|\le 2\Leftrightarrow -2\le y\le 2$ και λόγω της (1) είναι $0\le y\le 2$.

Η (2) γίνεται: $x=\sqrt{4-y^2}$, άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{4-y^2}$, $y\in[0,2]$, άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$.

γ) Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$ όπου t ο χρόνος σε sec με $t\ge 0$.

Είναι $y(t)=\sqrt{4-x^2(t)}$ και $x'(t)=0{,}1$ μ.μ./sec.

i. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε: $x(t_0)=\sqrt{3}$, $y(t_0)=1$.

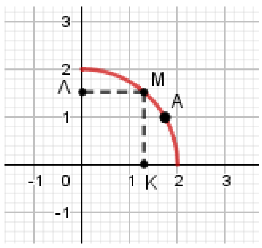
Είναι $y'(t)=\left(\sqrt{4-x^2(t)}\right)'=\dfrac{-\cancel{2}x(t)x'(t)}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2(t)}}$ και την χρονική στιγμή t_0:

$$y'(t_0)=-\frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}}=-\frac{0{,}1\cdot\sqrt{3}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{10}\ \text{μ.μ./sec}$$

ii. $E(t)=(OK)(O\Lambda)=x(t)y(t)$

Είναι $E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$ και την χρονική στιγμή t_0:

$$E'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=0{,}1\cdot 1+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}\right)=-0{,}2\ \text{μ.μ./sec}$$



δ) Έστω $K\left(x_0,f(x_0)\right)$ σημείο της C_f, Η εφαπτομένη της C_f στο Κ είναι η ευθεία

ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ \Leftrightarrow y-\sqrt{4-x_0^2}=-\dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0)$

Για $y=0$ είναι $x=\dfrac{4}{x_0}$ και για $x=0$ είναι $y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία

$B\left(\frac{4}{x_0},0\right)$ και $\Gamma\left(0,\frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\right)$.

$(OB\Gamma)=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=\alpha \Leftrightarrow \frac{4}{x_0}\cdot\frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}=2\alpha \Leftrightarrow 8=\alpha x_0\sqrt{4-x_0^2} \Leftrightarrow 64=\alpha^2 x_0^2\left(4-x_0^2\right)$ (3)

Θέτουμε $x_0^2=\omega\geq 0$ και η (3) γίνεται: $64=\alpha^2\omega(4-\omega)\Leftrightarrow 64=4\alpha^2\omega-\alpha^2\omega^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2\omega^2-4\alpha^2\omega+64=0 (4)$

Η (4) είναι 2ου βαθμού ως προς ω με $\Delta=16\alpha^4-256\alpha^2=16\alpha^2\left(\alpha^2-16\right)$.

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 16\alpha^2\left(\alpha^2-16\right)>0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2-16>0\Leftrightarrow \alpha^2>16\Leftrightarrow\alpha>4$ η (4) έχει ρίζες τις

$\omega=\frac{4\alpha^2\pm 4\alpha\sqrt{\alpha^2-16}}{2\alpha^2}=2\pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$

Επειδή $x_0\in[0,2]$, είναι $0\leq x_0^2\leq 4$, άρα $0\leq\omega\leq 4$.

Αν $\omega=2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$, τότε $2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\leq 4\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2-16}\leq\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-16\leq\alpha^2$ που ισχύει.

Αν $\omega=2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$, τότε $2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\geq 0\Leftrightarrow 2\geq\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\Leftrightarrow\alpha\geq\sqrt{\alpha^2-16}\Leftrightarrow\alpha^2\geq\alpha^2-16$ ισχύει.

Τότε $x_0^2=2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}}$ ή $x_0^2=2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}}$.

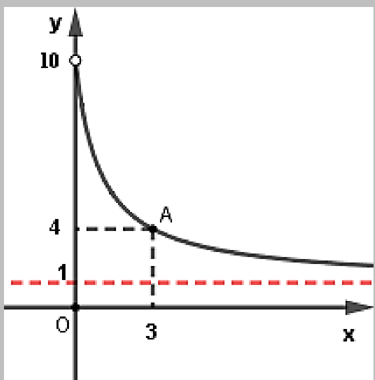
Οπότε η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α.

Αν $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha=4$, τότε η (4) γίνεται $16\omega^2-64\omega+64=0\Leftrightarrow\omega^2-4\omega+4=0\Leftrightarrow(\omega-2)^2=0\Leftrightarrow\omega=2$.

Τότε $x_0^2=2 \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2}$ και η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στη περίπτωση αυτή.

Τέλος αν $\Delta<0\Leftrightarrow 0<\alpha<4$ η (4) είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν τέτοιες εφαπτόμενες.

2. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} g'(x)=0$.

ε) Αν η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να δείξετε ότι $2g(5)<g(4)+g(6)$.

στ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{g(x)-10}$ **ii.** $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right]$ **iii.** $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$

ζ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_g και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Αν $f'(3)=e^{-3}$ να βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$.

Λύση

α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $g(x)=e^x f(x) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}=g(x)e^{-x}$

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Είναι $g(x_1)>g(x_2)>0$ και $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}$ οπότε και $g(x_1)e^{-x_1}>g(x_2)e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)e^{-x}\right)=1\cdot 0=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(g(x)e^{-x}\right)=10\cdot1=10$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)=(0,10)$.

Αν $\alpha\in(0,10)$ τότε υπάρχει μοναδικό $\rho\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=\alpha$.

Αν $\alpha\in(-\infty,0]\cup[10,+\infty)$ τότε $\alpha\notin f(A)$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$, όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x g(x)}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}g(x)+\cancel{e^x}g'(x)}{\cancel{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+g'(x)\right)$

Έστω $\varphi(x)=g(x)+g'(x)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$, τότε $g'(x)=\varphi(x)-g(x)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\varphi(x)-g(x)\right]=1-1=0$

ε) Για την g εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[4,5]$ και $[5,6]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(4,5)$ και $\xi_2\in(5,6)$ τέτοια, ώστε:

$g'(\xi_1)=\dfrac{g(5)-g(4)}{5-4}=g(5)-g(4)$ και $g'(\xi_2)=\dfrac{g(6)-g(5)}{6-5}=g(6)-g(5)$.

Είναι $\xi_1<\xi_2$ και η g' είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$g'(\xi_1)<g'(\xi_2)\Leftrightarrow g(5)-g(4)<g(6)-g(5)\Leftrightarrow 2g(5)<g(4)+g(6)$

στ) i. Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=10$ και $g(x)<10$ για κάθε $x>0$, άρα

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{g(x)-10}\ \underset{\substack{x\to0^+\Rightarrow\\ u\to0^-}}{\overset{g(x)+10=u}{=}}\ \lim_{u\to0^-}\frac{1}{u}=-\infty$$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right]\ \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\ \lim_{u\to0^+}\frac{1}{u}\eta\mu u=\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}\eta\mu u=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$

Για κάθε $u>0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu u}{u}\right|=\dfrac{|\eta\mu u|}{|u|}\le\dfrac{1}{u}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{u}\le\dfrac{\eta\mu u}{u}\le\dfrac{1}{u}$.

Επειδή $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$.

ζ) Έστω $M\big(x(t),y(t)\big)$, όπου $y(t)=g\big(x(t)\big)$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A, τότε: $x(t_0)=3,\ y(t_0)=4$ και $x'(t_0)=1$.

Είναι $y'(t)=\big(g(x(t))\big)'=\big(e^{x(t)}f(x(t))\big)'=e^{x(t)}x'(t)f(x(t))+e^{x(t)}f'(x(t))x'(t)$, οπότε

$y'(t_0)=e^{x(t_0)}x'(t_0)f(x(t_0))+e^{x(t_0)}f'(x(t_0))x'(t_0)=e^3\cdot1\cdot4e^{-3}+e^3\cdot e^{-3}\cdot1=5$

Είναι $(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ και

$(OM)'(t)=\dfrac{\cancel{2}x(t)x'(t)+\cancel{2}y(t)y'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$, οπότε $(OM)'(t_0)=\dfrac{3\cdot1+4\cdot5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{23}{5}$ μονάδες μήκους/sec.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\eta\mu^3x+\alpha x+1, & x<0\\ 2\eta\mu^2x-x^2+x+\alpha, & x\ge0\end{cases}$.

α) Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Έστω $\alpha=1$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

γ) Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi,\pi]$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,\pi)$.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\big(2\eta\mu^3x+\alpha x+1\big)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\big(2\eta\mu^2x-x^2+x+\alpha\big)=\alpha=f(0)$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi,0)$ και $(0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=0$ και αυτό συμβαίνει όταν $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\alpha=1$

β) Είναι $f(-\pi)=2\eta\mu^3\pi-\pi+1=1-\pi<0$, $f(0)=1$, δηλαδή $f(-\pi)f(0)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\pi,0]$, λόγω του θ.Bolzano υπάρχει $x_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

γ) Είναι $f(\pi)=2\eta\mu^2\pi-\pi^2+\pi+1=-\pi^2-\pi+1$.

Επειδή $f(-\pi)\ne f(\pi)$ δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi,\pi]$.

δ) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\eta\mu^3x+x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(2\eta\mu^2x\dfrac{\eta\mu x}{x}+1\right)=1$,

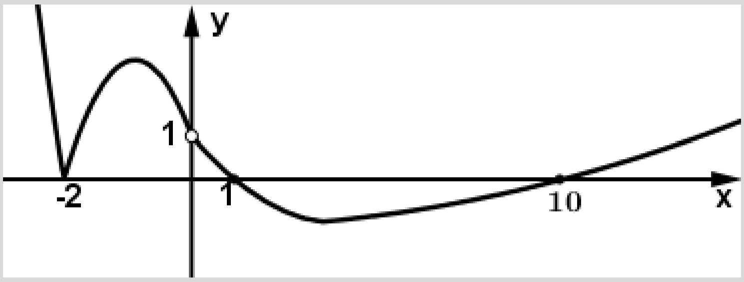
$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\eta\mu^2x-x^2+x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2\eta\mu x\dfrac{\eta\mu x}{x}-x+1\right)=1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi,0)$ με $f'(x)=6\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x+1$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-2x+1$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi,\pi)$. (x_1,x_2) $f(\pi)f(0)<0$

Είναι $f(\pi)=2\eta\mu^2\pi-\pi^2+\pi+1=-\pi^2+\pi+1<0,\ f(0)=1>0$ δηλαδή και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, λόγω του θ.Bolzano υπάρχει $x_2\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο και $f(x_1)=f(x_2)=0$, λόγω του θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(-\pi,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-x^3}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|g(x)|}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{f(x)-1}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$.

στ) Αν η γραφική παράσταση της g έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$ την ευθεία $\varepsilon: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1,f(1))$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|g(x)|}\underset{\substack{x\to 1\Rightarrow\\ \omega\to 0}}{\overset{g(x)=\omega}{=}}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{1}{|\omega|}=+\infty$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $g(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(1)-1^3}{1}=0\Leftrightarrow f(1)=1$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$g(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-x^3}{x}>0\overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow}f(x)-x^3>0\Leftrightarrow f(x)>x^3$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\ge\lim\limits_{x\to 1^+}x^3=1$ άρα $f(x)\ge 1$ στο (0,1).

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{f(x)-1}\overset{f(x)-1=y}{\underset{y\to 0^+}{=}}\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}=+\infty$$

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ άρα σε μια περιοχή του $-\infty$ είναι $\dfrac{f(x)-x^3}{x}>0$ και επειδή $x<0$, είναι και $f(x)-x^3<0 \Leftrightarrow f(x)<x^3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)>0$ άρα σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $\dfrac{f(x)-x^3}{x}>0$ και επειδή $x>0$ είναι $f(x)-x^3>0 \Leftrightarrow f(x)>x^3$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

δ) Για $x\neq 0$ είναι $g(x)=\dfrac{f(x)-x^3}{x} \Leftrightarrow f(x)=xg(x)+x^3$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$, είναι συνεχής στο $x=0$ οπότε:

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)+x^3\right)=0$

ε) Είναι $g(1)=g(10)=0$ και η g είναι συνεχής στο $[1,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,10)$ με

$$g'(x)=\frac{\left(f(x)-x^3\right)'x-\left(f(x)-x^3\right)x'}{x^2}=\frac{xf'(x)-3x^3-f(x)+x^3}{x^2}=\frac{xf'(x)-2x^3-f(x)}{x^2}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x_0f'(x_0)-2x_0^3-f(x_0)}{x_0^2}=0 \Leftrightarrow x_0f'(x_0)-2x_0^3-f(x_0)=0\ \ x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$$

στ) Επειδή η ε εφάπτεται της C_g στο Α είναι $g'(1)=-\dfrac{1}{2}$. Όμως

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)-x^3}{x}\right)'=\frac{\left(f'(x)-3x^2\right)x-\left(f(x)-x^3\right)}{x^2}\ \text{ άρα}$$

$$g'(1)=\frac{f'(1)-3-f(1)+1}{1^2}\Leftrightarrow f'(1)-2-f(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)-2-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)=\frac{5}{2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\dfrac{5}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$.

α) Αν $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

β) Για $\alpha=e$,

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

iii. αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση

α) $f(x)\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$. Η f έχει ελάχιστο στο 0. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

$f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\dfrac{1}{x+1}$, από το Θ.Fermat είναι: $f'(0)=0\Leftrightarrow \ln\alpha=1\Leftrightarrow \alpha=e$

β) i. $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$, $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\Rightarrow f$ κυρτή.

ii. $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow(-1,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow(-1,0]$ και για $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

iii. Έστω $g(x)=(x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1),\ x\in[1,2]$.

Αν $-1<\beta<0\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(\beta)>f(0)=1$ και όμοια $f(\gamma)>1$

Αν $\beta>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\beta)>f(0)=1$ και όμοια $f(\gamma)>1$

$g(1)=-(f(\beta)-1)<0,\ g(2)=(f(\gamma)-1)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ από το Θ.Bolzano η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln^2x+2\ln x-2x+2,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x(\ln x+2)=2(x+2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f'(x^2)>f'(x+1)+f'(x^2+1)$ για κάθε $x>1$.

δ) Να αποδείξετε $2xf(x)+f(x^2)+3\ln^2 2+6\ln 2>2xf(x+1)+f(x^2+1)+6$ για κάθε $x>1$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\ln x\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}-2=\dfrac{2\ln x+2-2x}{x}=\dfrac{2(\ln x-x+1)}{x}$.

Επειδή $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) $\ln x(\ln x+2)=2(x+2)\Leftrightarrow \ln^2x+2\ln x=2x+4\Leftrightarrow \ln^2x+2\ln x-2x+2=6\Leftrightarrow f(x)=6$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln^2x+2\ln x-2x+2)=\lim\limits_{x\to0^+}[\ln x(\ln x+2)-2x+2]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln^2x+2\ln x}{x}-2+\dfrac{2}{x}\right)\right]=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln^2x+2\ln x}{x}-2+\dfrac{2}{x}\right)=-2$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x+2\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+2}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Επειδή $6\in f(A)$ υπάρχει μοναδικός $x_1\in A$ τέτοιος ώστε $f(x_1)=6$, άρα η (1) έχει μοναδική ρίζα.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=2\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)x-(\ln x-x+1)}{x^2}=2\frac{\cancel{1}-\cancel{x}-\ln x+\cancel{x}-\cancel{1}}{x^2}=-\frac{2\ln x}{x^2}.$$

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x>1$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Είναι $1<x<x+1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x+1)$ (2), $1<x^2<x^2+1\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x^2)>f'(x^2+1)$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει: $f'(x)+f'(x^2)>f'(x+1)+f'(x^2+1)$

δ) Έστω $g(x)=2xf(x)+f(x^2)+3\ln^2 2+6\ln 2-2xf(x+1)-f(x^2+1)-6,\ x\ge 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$g'(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x^2)-2f(x+1)-2xf'(x+1)-2xf'(x^2+1)\Leftrightarrow$

$g'(x)=2[f(x)-f(x+1)]+2x[f'(x)+f'(x^2)-f'(x+1)-f'(x^2+1)]$.

Είναι $1<x<x+1\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x)>f(x+1)\Leftrightarrow f(x)-f(x+1)>0$ και

$f'(x)+f'(x^2)>f'(x+1)+f'(x^2+1)\Leftrightarrow f'(x)+f'(x^2)-f'(x+1)-f'(x^2+1)>0$ για κάθε $x>1$, άρα

$g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>g(1)$, όμως

$g(1)=2\cancel{f(1)}^{0}+\cancel{f(1)}^{0}+3\ln^2 2+6\ln 2-2f(2)-f(2)-6\Leftrightarrow$

$g(1)=-3f(2)+3(\ln^2 2+2\ln 2-2)=-3f(2)+3f(2)=0$, άρα

$g(x)>0\Leftrightarrow 2xf(x)+f(x^2)+3\ln^2 2+6\ln 2>2xf(x+1)+f(x^2+1)+6$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x^3$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε τουλάχιστον ένα σημείο.

β) Να βρείτε διάστημα της μορφής $(\alpha,\alpha+1)$ με $\alpha\in\mathbb{Z}$ το οποίο να περιέχει την τετμημένη κοινού σημείου των C_f, C_g.

γ) Να δείξετε ότι το κοινό τους σημείο είναι μοναδικό.

δ) Να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_g σε σημείο $B(\rho,g(\rho))$ με $\rho\le 0$ η οποία εφάπτεται και της C_f. Στη συνέχεια να βρείτε διάστημα της μορφής $(\beta,\beta+1)$ με $\beta\in\mathbb{Z}$ το οποίο να περιέχει την τετμημένη του Β.

Λύση

α) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει τουλάχιστον μια λύση.

Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=x^2+1-x^3$.

Είναι $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+1-x^3)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$, οπότε υπάρχει $\gamma<0$ τέτοιο, ώστε $h(\gamma)>0$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1-x^3)=\lim_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $h(\delta)<0$.

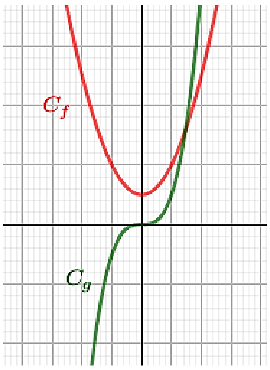
Επειδή $h(\gamma)h(\delta)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

β) Είναι $h(0)=1,\ h(1)=1+1-1=1,\ h(2)=4+1-8=-3$. Επειδή $h(1)h(2)<0$ και η h είναι συνεχής,

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.
Άρα $\alpha=1$.

γ) Για κάθε $x\le 0$ είναι $x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+1\ge 1\Leftrightarrow f(x)\ge 1$, ενώ $x^3\le 0\Leftrightarrow g(x)\le 0$, οπότε $f(x)>g(x)$.
Όταν $0<x\le 1$ είναι $0<x^2\le 1\Leftrightarrow 1<x^2+1\le 2\Leftrightarrow 1<f(x)\le 2$ και $0<x^3\le 1\Leftrightarrow 0<g(x)\le 1$, οπότε και πάλι $f(x)>g(x)$.
Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=2x-3x^2$ και $h(x_1)=h(x_2)=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-3\xi^2=0\Leftrightarrow \xi(2-3\xi)=0\Leftrightarrow \xi=0$ απορρίπτεται ή $2-3\xi=0\Leftrightarrow \xi=\dfrac{2}{3}$ που απορρίπτεται. άρα η h δεν έχει 2 ρίζες στο $(1,+\infty)$ και έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

δ)



ε) Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x$ και $g'(x)=3x^2$.
Η εφαπτομένη της C_g στο B είναι η ευθεία
$\varepsilon_1:\ y-g(\rho)=g'(\rho)(x-\rho)\Leftrightarrow y-\rho^3=3\rho^2(x-\rho)\Leftrightarrow y=3\rho^2x-2\rho^3$ (1)
Έστω σημείο $\Gamma(\rho_1,f(\rho_1))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Γ είναι η ευθεία
$\varepsilon_2: y-f(\rho_1)=f'(\rho_1)(x-\rho_1)\Leftrightarrow y-\rho_1^2-1=2\rho_1(x-\rho_1)\Leftrightarrow y=2\rho_1x-\rho_1^2+1$
Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν τιμές των ρ,ρ_1 για τις οποίες οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν $\begin{cases}3\rho^2=2\rho_1\\ -2\rho^3=-\rho_1^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3\rho^2}{2}=\rho_1\\ -2\rho^3=-\left(\dfrac{3\rho^2}{2}\right)^2+1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{3\rho^2}{2}=\rho_1\\ -2\rho^3=-\dfrac{9\rho^4}{4}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3\rho^2}{2}=\rho_1\\ -8\rho^3=-9\rho^4+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3\rho^2}{2}=\rho_1\\ 9\rho^4-8\rho^3-4=0\ (3)\end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=9x^4-8x^3-4$, $x\le 0$.
Έστω $x_1<x_2\le 0$, τότε $x_1^4>x_2^4\Leftrightarrow 9x_1^4>9x_2^4$ (4) και
$x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -8x_1^3>-8x_2^3\Leftrightarrow -8x_1^3-4>-8x_2^3-4$ (5)
Από (4)+(5) $\Rightarrow\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}9x^4=+\infty$ και $\varphi(0)=-4$.
Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=(-\infty,0]$ έχει σύνολο τιμών το

$\varphi(\Delta)=\left[\varphi(0),\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right)=[-4,+\infty)$. Επειδή $0\in\varphi(\Delta)$, υπάρχει μοναδικό $\rho\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho)=0$.

Είναι $\varphi(-1)=13>0,\varphi(0)=-4<0$. Επειδή $\varphi(-1)\varphi(0)<0$ ισχύει το θεώρημα Bolzano για την φ στο διάστημα $[-1,0]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0$.

Επειδή το ξ είναι μοναδικό ,το ξ ταυτίζεται με το ρ άρα το ζητούμενο διάστημα είναι το $(-1,0)$.

8. Δίνεται συνάρτηση fπαραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $4x^3+4\le f'(x)\le 4x^3+3x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και $f(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $x^4+4x<f(x)<x^4+x^3+4x$ για κάθε $x>0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

γ) Να δείξετε ότι η fείναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x^3=2x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα μεγαλύτερη του -1.

Λύση

α) Για $x=0$ είναι $4\cdot 0^3+4\le f'(0)\le 4\cdot 0^3+3\cdot 0^2+4\Leftrightarrow f'(0)=4$.

$4x^3+4\le f'(x)\Leftrightarrow 4x^3+4-f'(x)\le 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^4+4x-f(x),\ x\ge 0$.

Η gείναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=4x^3+4-f'(x)$.

Είναι $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και επειδή η gείναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0)=0\Leftrightarrow x^4+4x-f(x)<0\Leftrightarrow x^4+4x<f(x)$ (1)

$f'(x)\le 4x^3+3x^2+4\Leftrightarrow f'(x)-4x^3-3x^2-4\le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^4-x^3-4x,\ x\ge 0$.

Η hείναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f'(x)-4x^3-3x^2-4$.

Είναι $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και επειδή η hείναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)<h(0)=0\Leftrightarrow f(x)-x^4-x^3-4x<0\Leftrightarrow f(x)<x^4+x^3+4x$ (2).

Από τις (1),(2) είναι $x^4+4x<f(x)<x^4+x^3+4x$.

β) Για κάθε $x>0$ είναι $\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{4x}{x^4}<\dfrac{f(x)}{x^4}<\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{x^3}{x^4}+\dfrac{4x}{x^4}\Leftrightarrow 1+\dfrac{4}{x^3}<\dfrac{f(x)}{x^4}<1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)=1$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}=1$.

γ) $4x^3+4\le f'(x)\le 4x^3+3x^2+4\Leftrightarrow 4x^3\le f'(x)-f'(0)\le 4x^3+3x^2$ (3)

Αν $x>0$ τότε $\dfrac{4x^3}{x}\le\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}\le\dfrac{4x^3}{x}+\dfrac{3x^2}{x}\Leftrightarrow 4x^2\le\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}\le 4x^2+3x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}4x^2=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(4x^2+3x\right)=0$ οπότε από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=0$

Αν $x<0$ τότε $\frac{4x^3}{x} \geq \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \geq \frac{4x^3}{x}+\frac{3x^2}{x} \Leftrightarrow 4x^2+3x^2 \leq \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \leq 4x^2$ (4).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} 4x^2=0,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(4x^2+3x\right)=0$ οπότε από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=0$ (5).

Από τις (4), (5) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=0$, άρα η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f''(0)=0$.

δ) $f(x)+x^3=2x^4 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x^4}+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^4}+\frac{1}{x}-2=0$

Έστω $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x^4}+\frac{1}{x}-2,\ x\geq 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^4}+\frac{1}{x}-2\right)=1-0-2=-1<0$ οπότε υπάρχει $\alpha>1$ και πάρα πολύ μεγάλος, τέτοιος ώστε $\varphi(\alpha)<0$.

Είναι $\varphi(1)=f(1)-1$.

$1^4+4\cdot 1<f(1)<1^4+1^3+4\cdot 1 \Leftrightarrow 5<f(1)<6 \Leftrightarrow 4<f(1)-1<5 \Rightarrow \varphi(1)>0$, δηλαδή $\varphi(\alpha)\varphi(1)<0$

και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση

$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^4}+\frac{1}{x}-2=0 \Leftrightarrow f(x)+x^3=2x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,\alpha)$.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=f(x)+x^3-2x^4,\ x\geq 1$.

$x^4+4x<f(x)<x^4+x^3+4x \Leftrightarrow -x^4+4x+x^3<f(x)+x^3-2x^4<-x^4+2x^3+4x \Leftrightarrow$

$-x^4+4x+x^3<\alpha(x)<-x^4+2x^3+4x.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+4x+x^3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4\right)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+4x+2x^3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4\right)=-\infty$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=-\infty$, οπότε υπάρχει $x_1>1$ και πάρα πολύ μεγάλος, τέτοιος ώστε $\alpha(x_1)<0$.

$1^4+4\cdot 1<f(1)<1^4+1^3+4\cdot 1 \Leftrightarrow 5<f(1)<6 \Leftrightarrow 4<f(1)-1<5 \Rightarrow \alpha(1)>0$

δηλαδή $\alpha(x_1)\alpha(1)<0$

και επειδή η α είναι συνεχής στο $[1,x_1]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση

$\alpha(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+x^3=2x^4$ $f(x)+x^3=2x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,x_1)$.

ε) Για κάθε $x>-1$ είναι $x^3>-1 \Leftrightarrow 4x^3>-4 \Leftrightarrow 4x^3+4>0$, άρα $f'(x)\geq 4x^3+4>0$ οπότε η fείναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$. Επειδή $f(0)=0$ η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της fπου είναι μεγαλύτερη του -1.

9. Δίνεται παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y=4x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

Λύση

α) Επειδή $y=4x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(4x+5)\right]=0$.

Έστω $h(x)=f(x)-(4x+5)$ (1) με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ τότε αφού $x+1\to+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x+1)=0$.

Στην (1) όπου x το $x+1$ προκύπτει $h(x+1)=f(x+1)-\left[4(x+1)+5\right]$ (2)

Αφαιρώντας $(2)-(1)$ έχω $h(x+1)-h(x)=f(x+1)-f(x)-\left[4x+4+5\right]+4(x+5)$

$h(x+1)-h(x)=f(x+1)-f(x)-4\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=h(x+1)-h(x)+4$ συνεπώς και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\lim\left[h(x+1)-h(x)+4\right]=4.$

β) ΘΜΤ στο $[x-1,\ x]$: $\exists\,\xi_1\in(x-1,x):\ f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$

Όμοια ΘΜΤ στο $[x,\ x+1]$: $\exists\,\xi_2\in(x,x+1):\ f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$

$x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(x)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(x)-f(-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=4$, θέτοντας $x=u-1$, προκύπτει $\lim\limits_{u\to+\infty}\left[f(u-1)-f(u)\right]=4$ οπότε από Κ.Π, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=4$.

10. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $f(x)f'(x)=\frac{1}{2}$συνx για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{ημx+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $e^{-g(x)}f(x)-2xe^{-g(x)}=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $x\left(2\sqrt{2}-x\right)\le e^{g(x)}-e^{g(0)}\le x\left(\sqrt{10}-x\right)$, $x>0$.

ii. η εξίσωση $e^{g(x)}+x^2=2x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

Λύση

α) $2f(x)f'(x)=συνx\Rightarrow\left(f^2(x)\right)'=(ημx)'\Leftrightarrow f^2(x)=ημx+c\overset{x=0}{\Rightarrow}c=9\Leftrightarrow f^2(x)=ημx+9\neq0\Leftrightarrow$

$f(x)\neq0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο.

Επειδή $f(0)=3$, είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)=\sqrt{ημx+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) i. Είναι $\left(f(x)-2x\right)e^{-g(x)}=g'(x)\Leftrightarrow e^{g(x)}g'(x)=f(x)-2x\Leftrightarrow f(x)=e^{g(x)}g'(x)+2x\Rightarrow$

$f(x)=\left(e^{g(x)}+x^2\right)'$. Έστω $h(x)=e^{g(x)}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$ οπότε $h'(x)=f(x)$. Από το ΘΜΤ για την h υπάρχει

$\xi\in(0,x),\ x>0:\ h'(\xi)=\dfrac{h(x)-h(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{1}{x}\left(e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\right).$

Είναι $-1<\eta\mu\xi<1 \Leftrightarrow 8\le \eta\mu\xi+9\le 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le\sqrt{\eta\mu\xi+9}\le\sqrt{10} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le f(\xi)\le\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{2}\le \frac{1}{x}\left(e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\right)\le\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{2}x\le e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\le\sqrt{10}x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x-x^2\le e^{g(x)}-e^{g(0)}\le\sqrt{10}x-x^2$.

ii. Έστω ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$. Τότε από θ.Rolle υπάρχει

$\xi\in(\rho_1,\rho_2): \varphi'(\xi)=0$. Όμως $\varphi'(x)=\left(e^{g(x)}+x^2\right)'-2=f(x)-2$, άρα

$f(\xi)=2\Leftrightarrow\sqrt{\eta\mu\xi+9}=2\Leftrightarrow \eta\mu\xi=-5$ άτοπο.

11.Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,3]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(2)=0$, $f(3)=2$, $f'(3)=1$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[2,3]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x-1$ εφάπτεται της C_f.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<-1$.

ε) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2(x-2)$ για κάθε $x\in[2,3]$.

Λύση

α) Επειδή $f''(x)<0$ είναι $f'\searrow[2,3]$, οπότε για $2<x<3 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)=1>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[2,3]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών: $f(A)=[f(2),f(3)]=[0,2]$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=3$ είναι η ευθεία:

$\varepsilon_1: y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=x-1$

δ) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$, υπάρχει $x_1\in(2,3)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_1)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=2$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f' στο διάστημα $[x_1,3]$, υπάρχει $\xi\in(x_1,3)$ τέτοιο ώστε:

$f''(\xi)=\frac{f'(3)-f'(x_1)}{3-x_1}=\frac{1-2}{3-x_1}=-\frac{1}{3-x_1}$

Πρέπει $f''(\xi)<-1\Leftrightarrow -\frac{1}{3-x_1}<-1\Leftrightarrow\frac{1}{3-x_1}>1\Leftrightarrow 3-x_1<1\Leftrightarrow 2<x_1$ που ισχύει

ε) Σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in(2,x)$ και $\xi_2\in(x,3)$ τέτοια ώστε:

$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)}{x-2}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(x)}{3-x}=\frac{2-f(x)}{3-x}$.

Είναι $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x-2}>\frac{2-f(x)}{3-x}\Leftrightarrow(3-x)f(x)>2x-4-(x-2)f(x)\Leftrightarrow$

$(3-x)f(x)+(x-2)f(x)>2x-4\Leftrightarrow(3-x+x-2)f(x)>2x-4\Leftrightarrow f(x)>2(x-2)$

Επειδή για $x=2$ και $x=3$ είναι $f(x)=2(x-2)$, τελικά $f(x)\ge 2(x-2)$ για κάθε $x\in[2,3]$.