ΜΑΘΗΜΑ 45
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

A) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ θα λέμε ότι:

α) η f στρέφει τα κοίλα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι ↗ στο Δ $\Leftrightarrow f''(x) > 0$ στο εσωτερ. του Δ

β) η f στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ αν η f' είναι ↘ στο Δ $\Leftrightarrow f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ

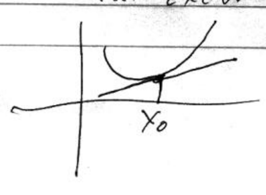
B) <u>Αντίστροφα</u> Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε θα είναι $f''(x) \geq 0$.
Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε θα είναι $f''(x) \geq 0$.

Γ) <u>Σημείο καμπής</u> Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως το x_0 και αλλάζει η κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0 και η C_f έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής.

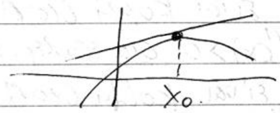
Δ) Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής και υπάρχει το $f''(x_0)$ τότε υποχρεωτικά είναι
$$f''(x_0) = 0.$$

Ε) Προσοχή αν $f''(x_0) = 0$ τότε δεν αρκεί για να έχει καμπή η f στο x_0. Πρέπει να αλλάζει και πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του x_0

Ζ) Αν η f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομ. της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$ είναι κάτω από την C_f και έχουν κοινό σημείο μόνο το x_0 δηλαδή ισχύει
$f(x) \geq y(x)$ για κάθε $x \in \Delta$
και ισότητα ισχύει μόνο για το x_0.



Η) Αν η f είναι κοίλη στο Δ τότε η εφαπτ. σε κάθε $x_0 \in \Delta$ είναι πάνω από την C_f. Δηλαδή ισχύει $f(x) \leq y(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. και η ισότητα ισχύει μόνο για το x_0



Θ) Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $x_0 \in \Delta$ και $f''(x_0) = 0$ και η f δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε είναι κυρτή ή κοίλη σε όλο το Δ.

x		x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$			

x		x_0	
$f''(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$			

ΕΙΔΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

1ο είδος/ Εύρεση κυρτότητας, σ. καμπής.

Άσκηση 1/ $f(x)=x^5-2x^4+x-2$.

να μελετήσετε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Λύση

Π. ορισμού $A=\mathbb{R}$. η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=5x^4-8x^3+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $f''(x)=20x^3-24x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=4x^2(5x-6)$

είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=6/5$.

x	$-\infty$	0	$6/5$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$			σκ.	

για $x\in(-\infty,6/5]$ η f κοίλη

για $x\in[6/5,+\infty)$ η f κυρτή

για $x=6/5$ έχει σημείο καμπής το $M(6/5, f(6/5))$

2ο είδος/ Παρατηρήσεις.

- Για να είναι η f κυρτή στο Δ πρέπει $f''(x)\geq 0$ στο εσωτερικό του Δ.
- Για να είναι η f κοίλη στο Δ πρέπει $f''(x)\leq 0$
- Για να έχει η f ακρότατο στο x_0 πρέπει $f'(x_0)$ και να αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του x_0.
- Αν η f γνωρίζω ότι έχει σημείο καμπής στο $x_0\in\Delta$ και υπάρχει το $f''(x_0)$ τότε $f''(x_0)=0$
- Αν η f γνωρίζω ότι έχει καμπή στο $A(x_0,y_0)$ τότε $f''(x_0)=0$, $f(x_0)=y_0$.

Άσκηση 2/ $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}\alpha x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$

Αν η f είναι κυρτή σε όλο το R να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R$

Λύση

Είναι $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + x$ για κάθε $x \in R$

Είναι $f''(x) = x^2 - \alpha x + 1$ για κάθε $x \in R$.

Για να είναι η f κυρτή στο R πρέπει

$f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$ πρέπει

$x^2 - \alpha x + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in R$.

Άρα πρέπει η $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha \in [-2, 2]$

Άσκηση 3/ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 6$.

Να βρεθούν οι τιμές των α, β αν γνωρίζω ότι η f έχει σημείο καμπής το $A(1,4)$

Λύση.

Π. ορισμού $A = R$ η f συνεχής στο R.

$f'(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ για κάθε $x \in R$

$f''(x) = 2x - 2\alpha$ για κάθε $x \in R$.

Πρέπει $\left.\begin{matrix} f''(1) = 0 \\ f(1) = 4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2 - 2\alpha = 0 \\ \frac{1}{3} - \alpha + \beta + 6 = 4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{4}{3} \end{matrix}$

Άσκηση 4/ $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 4x - 6$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in R$ ώστε η f να έχει καμπή στο $x_0 = 1$.

Λύση

$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + 4$ για κάθε $x \in R$

$f''(x) = 6x - 2\alpha$ για κάθε $x \in R$.

Πρέπει $f''(1) = 0$ και να αλλάζει πρόσημο η f'' εκατέρωθεν του 1.

Πρέπει $f''(1)=0 \Leftrightarrow 6-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=3$

Για $\alpha=3$ είναι $f''(x)=6x-6$.

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	ΣΚ	$\cup$

Πράγματι για $\alpha=3$ η f έχει σημείο καμπής στο 1.

3ο ΕΙΔΟΣ/: Η f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 5/ (με άτοπο)

Αν η f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f^2(x)-2f(x)=\alpha-x^2$ ναδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $2f(x)\cdot f'(x)-2f'(x)=-2x$.

και $2f'(x)\cdot f'(x)+2f(x)\cdot f''(x)-2f''(x)=-2$. (2)

Έστω η f έχει σημείο καμπής στο x_0 τότε.

θα είναι $f''(x_0)=0$

για $x=x_0$ η (2) γίνεται $2f'(x_0)\cdot f'(x_0)+2f(x_0)\cdot f''(x_0)-2f''(x_0)=-2$

άρα $(f'(x_0))^2=-1$ άτοπο άρα η f δεν έχει ΣΚ.

4ο είδος/ Απόδειξη ανισοτήτων της μορφής $f(x)\leq$ εφαπτομένη ή $f(x)\geq$ εφαπτομένη όταν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Άσκηση 6/ $f(x)=e^{2x}-\ln(x+1)$

α) Κυρτότητα

β) Να βρεθεί η εξ. της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$

γ) Να δείξετε ότι $e^{2x}\geq\ln(x+1)+x+1$, $x>-1$.

Λύση   Π. ορ. $A=(-1,+\infty)$

α) Η f συνεχής στο A και δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x+1}$ και $f''(x)=4e^{2x}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$

Άρα η f κυρτή στο $A=(-1,+\infty)$

β) Εξίσωση εφαπτομένης $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$
$y-1=1(x-0) \Leftrightarrow y=x+1$.

γ) Επειδή η f στρέφει τα κοίλα πάνω· τότε η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο.
είναι κάτω από την C_f
άρα $f(x) \geq$ εφαπτομένη για κάθε $x \in A$.
άρα $e^{2x} - \ln(x+1) \geq x+1$. το ίσον ισχύει μόνο
$e^{2x} \geq \ln(x+1)+x+1$. για το σημείο επαφής

Άσκηση 7/ $f(x)=e^{x}-\frac{x^3}{3}+\alpha$ $\alpha \in R$.

α) Κυρτότητα.
β) Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$
γ) Να δείξετε ότι $e^{x} \geq \frac{x^3}{3}+x$ για κάθε $x \in R$.

Λύση

Π.Ορ $A=R$

Η f συνεχής στο R και 2 φορές παραγωγ. ως π.π.σ.
με $f'(x)=e^{x}-x^2$, $f''(x)=e^{x}-2x$, $f'''(x)=e^{x}-2$

άρα

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

για $x=\ln 2$ η f'' έχει ολικό ελάχιστο. το $f''(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2$
$= 2-2\ln 2 = 2(1-\ln 2) =$
$= 2(\ln e - \ln 2) > 0$

άρα η $f''(x)>0$ για κάθε $x \in R$. άρα
η f είναι κυρτή στο R.

β) $y-f(0)=f'(0)(x-1) \Leftrightarrow y-(1+\alpha)=1(x-1)$
$y=x+\alpha$.

γ) Αφού η f είναι κυρτή η εφαπτομένη δεν είναι πάνω από την C_f άρα $f(x) \geq$ εφαπτ.
άρα $e^{x}-\frac{x^3}{3}+\alpha \geq x+\alpha \Leftrightarrow e^{x} \geq \frac{x^3}{3}+x$.

5 είδος. Κυρτότητα → ανισότητες της μορφής $2f(\alpha+1) \le f(\alpha)+f(\alpha+2)$, 2 ΘΜΤ στα $[\alpha, \alpha+1]$, $[\alpha+1, \alpha+2]$

ή $\kappa < \frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha} < \lambda$.

Άσκηση 8. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

α) Να δείξετε η f κοίλη στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

β) για κάθε $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ να δείξετε

$$\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2} < \eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

γ) Να δείξετε $\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} < 16\left(\eta\mu\frac{\pi}{8} - \eta\mu\frac{\pi}{16}\right) < \pi\, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16}$.

α) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = -\eta\mu x < 0$ στο $(0, \frac{\pi}{2})$ και αφού η f συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ τότε η f κοίλη στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

β) ΘΜΤ στο $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$

υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \eta\mu\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$\xi_2 \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$.

Αφού η f κοίλη η $f' \downarrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Αφού $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \eta\mu\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$\Leftrightarrow \eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \eta\mu\alpha > \eta\mu\beta - \eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2}) \Leftrightarrow 2\eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2}) > \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$.

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2} < \eta\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})$

γ) ΘΜΤ στο $[\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}]$ υπάρχει $\xi \in (\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8})$

ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\frac{\pi}{8}) - f(\frac{\pi}{16})}{\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}} = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{8} - \eta\mu\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{16}} = \frac{16(\eta\mu\frac{\pi}{8} - \eta\mu\frac{\pi}{16})}{\pi}$

Αφού f κοίλη τότε $f' \downarrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Τότε $\frac{\pi}{16} < \xi < \frac{\pi}{8} \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\frac{\pi}{16}) > f'(\xi) > f'(\frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16} > \frac{16(\eta\mu\frac{\pi}{8} - \eta\mu\frac{\pi}{16})}{\pi} > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow$

$\pi\, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} < 16(\eta\mu\frac{\pi}{8} - \eta\mu\frac{\pi}{16}) < \pi\, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16}$.

143

Άσκηση 9) Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και 2 φορές παραγ.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha < \beta$ ισχύει
$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

β) Αν $g(x) = (e^{x}+2)^{\nu}$ i) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη
ii) Να δείξετε $(e^{\alpha}+2)^{\nu}+(e^{-\alpha}+2)^{\nu} < 2\cdot 3^{\nu}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) $f(x)=x^4-4x^3+2x-2$ Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$ Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

3) $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{\alpha^2x^3}{3}+\frac{\alpha x^2}{2}-3x+1$ Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε η f να έχει καμπή στο $x_0=1$

4) $f(x)=x^4+\alpha x^3+\frac{3}{2}x^2+2012$ Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε η γραφική παράσταση να έχει τα κοίλα άνω σε όλο το R.

5) $f(x)=x^3-2\alpha x^2+4\beta x-6$ Να βρεθούν οι τιμές των α, β. Αν γνωρίζουμε ότι η f έχει σημείο καμπής το $A(1,4)$

6) Αν $f^2(x)+xf(x)=-x^2+1$ για κάθε $x\in R$ να δείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής, όταν είναι 2 φορές παραγ. στο R.

7) $f(x)=\ln(\ln x)$

i) Να βρεθεί το π. ορισμού ii) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$.

iv) Να δείξετε $\ln x\le e^{\frac{x-e}{e}}$

v) Να δείξετε $2\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\ln\alpha\cdot\ln\beta$.

8) $f(x)=\ln x-x$, $g(x)=\ln^2x+2x\ln x+x^2-3$.

i) Να βρεθεί το ακρότατο της f

ii) Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο $x_0=1$.

iv) Να δείξετε $(x+\ln x)^2>4x-3$.

9) $f(x)=x\ln x$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

ii) Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ και $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ να δείξετε $\beta^{2\beta}<\alpha^{\alpha}\cdot\gamma^{\gamma}$

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$.

iv) Να δείξετε $x\ln x\ge 2x-e$.

10) Αν η f παραγωγίσιμη στο R και $f^3(x)+f(x)=x$

i) Να βρείτε το $f(0)$ ii) Να βρεθεί η μονοτονία της f

iii) Να βρεθεί το ακρότατο της f

iv) Να δείξετε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R. και να βρεθεί η κυρτότητα της f

ΜΑΘΗΜΑ 46.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ.

Για να βρώ το μέγιστο ή ελάχιστο ενός μεγέθους Μ. Κατασκευάζω από τα δεδομένα μια συνάρτηση του μεγέθους Μ ως προς έναν άγνωστο x, $M(x)$ και βρίσκω τα ολικά ακρότατα της $M(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση 1| Έστω z ένας μιγαδικός τέτοιος ώστε $|z-i|=|z+2|$.

α) Να βρεθεί ο γ. τόπος των εικόνων του z

β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z|$

γ) Ποιός μιγαδικός έχει το ελάχιστο μέτρο

Λύση.

α) Θέτω $z=x+yi$ $x,y\in R$ τότε $|x+yi-i|=|x+yi+2| \Leftrightarrow$
$|x+(y-1)i|=|(x+2)+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Leftrightarrow$
$x^2+y^2-2y+1=x^2+4x+4+y^2 \Leftrightarrow -2y=4x+3 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$.
Άρα γ. τόπος είναι η ευθεία (ε): $y=-2x-\frac{3}{2}$, $x\in R$

β) $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+4x^2+6x+\frac{9}{4}}$
$=\sqrt{5x^2+6x+\frac{9}{4}}$, $x\in R$

Θέτω $|z|=\sqrt{5x^2+6x+9/4}=f(x)$. Αφού έχει μια μεταβλητή
τότε $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x^2+6x+9/4}}\cdot\left(5x^2+6x+9/4\right)'=\frac{10x+6}{2\sqrt{5x^2+6x+9/4}}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$

Άρα

x		$-3/5$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ολ	$\nearrow$

Άρα για $x=-\frac{3}{5}$ το μέτρο γίνεται ελάχιστο και το ελαχ μέτρο είναι
$|z|_{ελαχ}=f\left(-\frac{3}{5}\right)=\sqrt{5\left(-\frac{3}{5}\right)^2+6\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

γ) ο μιγαδικός με το ελαχ μέτρο είναι για $x=-\frac{3}{5}$
ο $z=-\frac{3}{5}+\left(-2\cdot\frac{3}{5}-\frac{3}{2}\right)i=-\frac{3}{5}-\frac{27}{10}i$

(147)

Άσκηση 2/ Έστω ο μιγαδικός $z=(\lambda+2)+(2\lambda-4)i$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι ο γ. τόπος των εικόνων του z είναι ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία A, B.

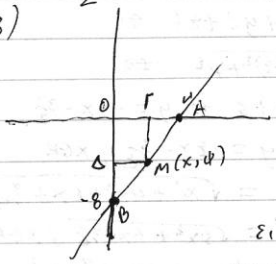
β) Από ένα σημείο M εντός του τμήματος AB φέρνουμε κάθετες προς τους άξονες και σχηματίζουμε το ορθογώνιο $M\Gamma O\Delta$. Να βρεθεί το M ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο Εμβαδόν.

Λύση.

α) Θέτω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ τότε $\left.\begin{matrix}x=\lambda+2\\ y=2\lambda-4\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\lambda=x-2\\ \lambda=\frac{y+4}{2}\end{matrix}\right\}$ άρα

$\frac{y+4}{2}=x-2 \Leftrightarrow y+4=2x-4 \Leftrightarrow y=2x-8$. εξίσωση ευθείας.

β)



Η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(4,0)$ αφού για $y=0 \Rightarrow x=4$ και $B(0,-8)$ αφού για $x=0 \Rightarrow y=-8$.

οπότε το Εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=|x|\cdot|y|$ και αφού $0\le x\le 4$, $-8\le y\le 0$ και

τότε $E=x\cdot(-y)$ άρα

$E(x)=x\cdot(-(2x-8))=-2x^2+8x$, $0\le x\le 4$

είναι $E'(x)=-4x+8$ άρα $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	0		2		4
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	ολ.μ.	$\searrow$	

Για $x=2$ το Εμβαδόν γίνεται ολικό Μέγιστο και είναι $E(2)=8$.

τότε $x=2$ και $y=-4$ Άρα το $M(2,-4)$

Άσκηση 3/

Ποιο σημείο της Παραβολής $y=x^2$ έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε): $y=2x-4$.

Λύση

Έστω $M(x,y)=M(x,x^2)$ ένα τυχαίο σημείο της Παραβολής τότε η απόσταση του M από την ευθεία είναι

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|2x-x^2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|x^2-2x+4|}{\sqrt{5}}=\frac{x^2-2x+4}{\sqrt{5}}$$

αφού $\Delta<0$ και $x^2-2x+4>0$

Έστω $f(x)=x^2-2x+4$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2x-2$.

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

Άρα η απόσταση γίνεται ελάχιστη όταν $x=1$ τότε.
το σημείο με την ελαχ απόσταση είναι $M(1,1)$

<u>Άσκηση 41</u> $f(x)=x\cdot \ln^2 x$ να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της C_f που έχει τη μικρότερη κλίση. <u>Λύση</u>

Κλίση ονομάζουμε τον συντελ. διεύθυνσης της εφαπτομένης που για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\lambda(x)=f'(x)=\ln^2 x+2\ln x$, $x>0$

τότε $\lambda'(x)=\dfrac{2\ln x+2}{x}$, $x>0$

είναι $\lambda'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=1/e$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$\lambda'(x)$	$-$	0	$+$
$\lambda(x)$	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος για $x=1/e$.
στο σημείο $M(1/e, f(1/e))=M(1/e,1/e)$

(149)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Έστω ο μιγαδικός $z = \sqrt{1-2x} + e^{x} i$, $x \le 1/2$
α) Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ο μιγαδικός έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο
β) Ποιός είναι ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο.

2) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = 4x + 2$. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(2,0)$.

3) $f(x) = 2x - x^2$
Να βρείτε σε ποιό σημείο της C_f η εφαπτομένη σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν

4) Αν x, y οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με εμβαδόν $400 m^2$ να βρεθούν οι τιμές των x, y ώστε το ορθογώνιο να έχει τη μικρότερη δυνατή περίμ.

5) $f(x) = e^{x} - \frac{1}{2}x^2 + 2012$.
Σε ποιό σημείο της γραφ. παράστασης της f η εφαπτομένη έχει το μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης

6) $f(x) = e^{x}$, $g(x) = x$
α) Να δείξετε C_f, C_g δεν έχουν κοινά σημεία.
β) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την κατακόρυφη απόσταση (AB) δύο σημείων C_f, C_g
γ) Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία η κατακόρυφη απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη