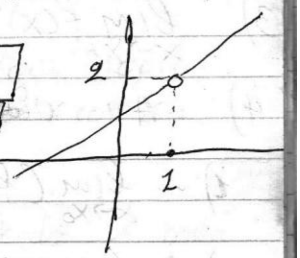
ΜΑΘΗΜΑ 16.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Έστω $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, Π. ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}-\{1\}$
παρατηρώ ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=1$.
Θέλω όμως να γνωρίζω τι γίνεται αν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1, $(x\neq 1)$
Παρατηρώ λοιπόν ότι.

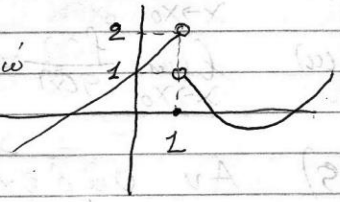
x	0,9	0,99	0,999	1,01	1,001	1,000001
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	2,01	2,001	2,000001

Δηλαδή όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 τότε οι αντίστοιχες τιμές της f πλησιάζουν πολύ κοντά στο 2.
Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ΤΟ ΟΡΙΟ ΤΗΣ f ΕΙΝΑΙ ΤΟ 2 ΟΤΑΝ ΤΟ x ΠΛΗΣΙΑΖΕΙ ΣΤΟ 1
και γράφουμε $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=2}$



προσοχή η έκφραση $x\to 1$ σημαίνει $x\neq 1$
και από τη γραφική παράσταση
παρατηρώ ότι όταν το $x\to 1$
τότε $f(x)\to 2$

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0



Στο διπλανό σχήμα παρατηρώ ότι καθώς το x πλησιάζει στο 1 από αριστερά $(x<1)$ οι τιμές της f πλησιάζουν στο 2
και γράφουμε $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$.

Ενώ όταν το x πλησιάζει στο 1 από δεξιά $(x>1)$ οι τιμές της f πλησιάζαν στο 1
και γράφουμε $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$.

Αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ τοτε λεμε
οτι η f δεν εχει οριο στο 1.

Ενώ αν ισχυει $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ τότε
λέμε οτι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

$\boxed{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ}}$

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \ell$

3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

4) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε

i) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

ii) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

iii) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, αρκεί $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τοτε

i) $\lim_{x\to x_0} (-f(x)) = -\lim_{x\to x_0} f(x)$

ii) $\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$

iii) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$

4) $\lim_{x \to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\nu}$

5) $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.

6) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

7) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει $\lim_{x \to x_0} f(x)$
τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$

Αν $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$
τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$

8) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0.
τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$

9) Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

10) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, $\lim_{x \to x_0} c = c$.

11) $\lim_{x \to x_0} x^{\nu} = x_0^{\nu}$

12) Αν $P(x)$ ένα πολυώνυμο τότε.
$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

13) Αν $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα με $Q(x_0) \neq 0$ τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΟΥ όταν $x \to x_0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

A) Όταν το x_0 ανήκει στο π. ορισμού της συνάρτησης τότε σύμφωνα με τις ιδιότητες θέτω όπου x το x_0 και το αποτέλεσμα είναι το όριο.

1) $$\lim_{x \to 1} \frac{5x^2+4x+3}{x^2+1} = \frac{5\cdot 1^2+4\cdot 1+3}{1^2+1} = \frac{12}{2} = 6.$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{4(x^2+1)-2x}{x^2+1} = \frac{4\cdot 1-0}{0+1} = 4.$$

B) Όταν το x_0 είναι ρίζα του αριθμητή και του παρονομαστή τότε παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή, κάνω απλοποίηση και αντικαθιστώ στην απλοποιημένη μορφή.

3) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

4) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

5) $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}^2-4}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{32}$$

Προσοχή στα πχ 5, 6 όταν έχω παράσταση με μορφή $\sqrt{P(x)} \pm Q(x)$ τότε για να γίνει απλοποίηση πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με τη "συζυγή" παράσταση $\sqrt{P(x)} \mp Q(x)$

6) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{(x^2-x)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}^2-4}{(x^2-x)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{(x^2-x)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)}{x(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{x\left(\sqrt{3x+1}+2\right)} = \frac{3}{4}$$

Γ) Πλευρικά όρια συνάρτησης

7) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x+1}{x-1} & \text{αν } x<1 \\ x^2+4x-4 & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$

• $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-2x+1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} (x^2+x-1) = 1$$

αφού από σχήμα Horner

έχω

1	0	-2	1	1
	1	1	-1	
1	1	-1	0	

$x^3-2x+1 = (x-1)(x^2+x-1)$

• $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+4x-4) = 1$$

• αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{2x^2+1} & \text{αν } x \leq 9 \\ \dfrac{\sqrt{x}-3}{2x-18} & \text{αν } x > 9 \end{cases}$

Να βρεθούν τα όρια α) $\lim_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim_{x\to 16} f(x)$

γ) $\lim_{x\to 9} f(x)$

Λύση

α) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2}{2x^2+1} = \dfrac{0-2}{2\cdot 0+1} = -2$.

β) $\lim_{x\to 16} f(x) = \lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-3}{2x-18} = \dfrac{\sqrt{16}-3}{2\cdot 16-18} = \dfrac{1}{14}$.

γ) Επειδή το 9 είναι σημείο αλλαγής τύπου βρίσκω πλευρικά όρια.

- $\lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-} \dfrac{x^2-2}{2x^2+1} = \dfrac{79}{161}$

- $\lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \dfrac{\sqrt{x}-3}{2x-18} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 9^+} \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(2x-18)(\sqrt{x}+3)} =$

$= \lim_{x\to 9^+} \dfrac{x-9}{2(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9^+} \dfrac{1}{2(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{1}{12}$.

- αφού $\lim_{x\to 9^-} f(x) \neq \lim_{x\to 9^+} f(x)$ δεν υπάρχει $\lim_{x\to 9} f(x)$.

9) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{αν } x > 2 \\ x^3-\alpha & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Λύση

- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} =$

$= \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^3-\alpha) = 8-\alpha$.

- Πρέπει $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$ άρα.

$4 = 8 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4.$

10) $f(x) = \begin{cases} 3\alpha x^3 + 2x + \beta & \text{αν } x \leq 1 \\ 2\alpha x^4 - \beta x & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Αν $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

λύση.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (3\alpha x^3 + 2x + \beta) = 3\alpha + 2 + \beta.$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim (2\alpha x^4 - \beta x) = 2\alpha - \beta.$
- Πρέπει $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \\ \text{και } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4 \end{array}\right\}$. $\left.\begin{array}{l} 3\alpha + 2 + \beta = 4 \\ 2\alpha - \beta = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha - \beta = 4 \end{array}\right\}$

$\alpha = 6/5$
$\beta = -8/5.$

Δ| Όταν έχω απόλυτες τιμές.

α) όταν δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής τότε θέτω όπου x το x_0.

11) $f(x) = \dfrac{|x-3| + |x^2-1| - 4}{x+2}$ να βρεθεί το $\lim_{x\to 1} f(x)$

λύση

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{|x-3| + |x^2-1| - 4}{x+2} = \dfrac{2+0-4}{3} = \dfrac{-2}{3}$

β) Όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής αλλά όχι τα απόλυτα τότε χρησιμοποιώ την ιδιότητα.

Αν $\lim_{x\to x_0} g(x) > 0$ τότε και $g(x) > 0$ κοντά στο x_0

(12) $f(x) = \dfrac{|x^3+1| + |x-2| - 3}{x-1}$ Να βρεθεί το $\lim_{x \to 1} f(x)$

λύση

Είναι $\lim_{x \to 1}(x^3+1) = 2 > 0$ άρα και $x^3+1 > 0$ κοντά στο 1.

άρα $|x^3+1| = x^3+1$ κοντά στο 1

Είναι $\lim_{x \to 1}(x-2) = -1 < 0$ άρα και $x-2 < 0$ κοντά στο 1

άρα $|x-2| = -(x-2)$ κοντά στο 1

$\boxed{\text{ΘΥΜΑΜΑΙ} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}}$

άρα $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^3+1-(x-2)-3}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1} =$

$= \lim_{x \to 1} x(x+1) = 2$

γ) Όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής και καθόλου από τα απόλυτα τότε παίρνω περιπτώσεις και πλευρικά όρια.

(13) $f(x) = \dfrac{|x-2| + |x^3+3| - 11}{x-2}$

Να βρεθεί το $\lim_{x \to 2} f(x)$

λύση

Είναι $\lim_{x \to 2}(x^3+3) = 11 > 0$ άρα και $x^3+3 > 0$ κοντά στο 2.

Ενώ το πρόσημο του $x-2$ είναι

x		2	
$x-2$	$-$	0	$+$

• Άρα. αν $x \to 2^+$ τότε $x^3+3>0$ και $x-2>0$

οπότε

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)+x^3+3-11}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+x-10}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+5)}{\cancel{(x-2)}} = 13.$$

• αν $x \to 2^-$ τότε $x^3+3>0$ και $x-2<0$.

οπότε.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)+x^3+3-11}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-2)} = 11$$

αφού $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

σχήματα Horner.

1	0	1	-10	2
	2	4	10	
1	2	5	0	

άρα $x^3+x-10=(x-2)(x^2+2x+5)$

1	0	-1	-6	2
	2	4	6	
1	2	3	0	

άρα $x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① $f(x) = \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-4}$, Να υπολογίσετε τα όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

② $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-4}$ Να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

③ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & αν\ x>1 \\ \dfrac{4x-3}{4} & x\leq 1 \end{cases}$

Να βρεθούν τα όρια. i) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

④ $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^3+x^2-2 & αν\ x\leq 1 \\ \dfrac{x^3-1}{x-1} & αν\ x>1 \end{cases}$

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in R$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

⑤ $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2+6x+2 & αν\ x<1 \\ 4\alpha x^3-6x+4 & αν\ x\geq 1 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, 6\in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

⑥ $f(x) = \dfrac{|x-1|+|x-2|}{x^2+1}$ Να βρεθούν τα όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

⑦ $f(x) = \dfrac{|x^3-3|+|x^2-5|-6}{x^2-4}$ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ αν υπάρχει

⑧ $f(x) = \dfrac{|x-1|+|x^2-3x|-2}{x^2-1}$ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν υπάρχει

⑨ $f(x) = \dfrac{|x^2-4|+|x^2-2x|+x^3-8}{x-2}$ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ αν υπάρχει.