ΜΑΘΗΜΑ 17.

ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ, ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ, ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ x_0 - ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(\eta\mu x)=\eta\mu x_0$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu x_0$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(\varepsilon\varphi x)=\varepsilon\varphi x_0$, $x_0\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to x_0}(\sigma\varphi x)=\sigma\varphi x_0$, $x_0\neq k\pi$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

7) $\lim\limits_{x\to x_0}(\ln x)=\ln x_0$, $x_0>0$

8) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha^x)=\alpha^{x_0}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

9) $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{y\to y_0}f(y)$

Θέτω $y=g(x)$ τότε $y\to y_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$, $(\alpha\neq 0)$

Θέτω $y=\alpha x$ τότε $y\to\lim\limits_{x\to 0}(\alpha x)=0$.

Α) Ασκήσεις λυμένες

① Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{3x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 5x}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ ε) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x}$ στ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\eta\mu x}$

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}$

$=3\cdot 1=3.$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\eta\mu 5x}{5\cdot 3x}=\frac{5}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}=$

$=\frac{5}{3}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=5/3\cdot 1=5/3$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu 3x}{15x}}{\frac{\eta\mu 5x}{15x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{\eta\mu 3x}{3x}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu 5x}{5x}}=$

$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}\lim\frac{\frac{\eta\mu 3x}{3x}}{\frac{\eta\mu 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\lim\frac{\eta\mu 3x}{3x}}{\lim\frac{\eta\mu 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=3/5$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot 1=0$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\frac{x}{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)$

$=0\cdot\frac{1}{1}=0.$

ΠΡΟΣΟΧΗ.

Β) Όταν έχω όριά της μορφής $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{g(x)}$ προσπαθώ να δημιουργήσω γινόμενο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}\cdot g(x)\right)$ αφού αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} g(x)=\ell$. τότε θα είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}\cdot g(x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}\right)\cdot\lim_{x\to 0} g(x)=1\cdot\ell=\ell.$$

2) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x^2-3x}$

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x(x-3)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot\frac{2}{x-3}\right)$$

$$=1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

3) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{2x\,\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\eta\mu x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\,\eta\mu x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\eta\mu x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot 2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right)=1\cdot 2\cdot 2=4.$$

4) Να βρεθεί το όριο. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+3\eta\mu 2x}{x^2+2x}$

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+3\eta\mu 2x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+6\,\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\,(1+6\sigma\upsilon\nu x)}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1+6\sigma\upsilon\nu x}{x+2}\right)$$

$$=1\cdot\frac{1+6\cdot 1}{0+2}=1\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$$

Γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{g(x)}\right)\overset{(2)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot f(x)\right)=0\cdot\ell=0$. (121

4) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^3+2x^2}$.

λύση

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot\frac{1}{x+2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=0\cdot\frac{1}{2}=0$

5) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$. Να υπολογίσετε.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}$ αα) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)}$ ααα) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+1-\sigma\upsilon\nu x}{f(x)+x}$

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{2}{1}=2$. λύση

αα) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\frac{f(x)}{x}}$

$=\frac{0\cdot(1+1)}{2}=0$

ααα) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+1-\sigma\upsilon\nu x}{f(x)+x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}}{\frac{f(x)}{x}+1}=\frac{1+0}{2+1}=\frac{1}{3}$

Α) ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

6) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$.

λύση

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)$

$=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Αφού $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$

(θέτω $y=x-2$ όταν $y\to\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$)

και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$.

⑦ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^3}{x-1}\cdot \text{ημ}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^3}{x-1}\cdot \text{ημ}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] \overset{\text{λύση}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\left[x^2\cdot \frac{\text{ημ}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\frac{x-1}{x}}\right]$

$= 1\cdot 1 = 1$ αμοιβαίο

$\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\text{ημ}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\text{ημ}y}{y} = 1$

(θέτω $y=\frac{x-1}{x}$ τότε $y\to \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=0$)

⑧ $f(x)=\frac{\text{ημ}^3 x-1}{\text{ημ}^2 x-1}$ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to \pi/2} f(x)$.

λύση

Θέτω $y=\text{ημ}x$ τότε $y\to \lim\limits_{x\to\pi/2}(\text{ημ}x)=\text{ημ}\frac{\pi}{2}=1$

οπότε $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\text{ημ}^3x-1}{\text{ημ}^2x-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=$

$=\lim\limits_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$

⑨ $f(x)=\frac{\ln^3 x-3\ln x+2}{\ln x-1}$ Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to e} f(x)$

λύση

Θέτω $y=\ln x$ τότε $y\to \lim\limits_{x\to e}\ln x=\ln e=1$.

οπότε $\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln^3 x-3\ln x+2}{\ln x-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^3-3y+2}{y-1}$

$=\lim\limits_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y-2)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}(y^2+y-2)=0$.

⑩ Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ και $g(x)=\frac{f^2(x)-4f(x)+3}{f(x)-1}$

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

λύση

Θέτω $y=f(x)$ τότε $y\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f^2(x)-4f(x)+3}{f(x)-1} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{y^2-4y+3}{y-1} =$

$= \lim\limits_{y\to 1} \frac{(y-1)(y-3)}{y-1} = \lim\limits_{y\to 1}(y-3) = -2.$

(11) Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 5} f\left(\frac{x+1}{3}\right)$

Λύση

Θέτω $y = \frac{x+1}{3}$ τότε $y \to \lim\limits_{x\to} \frac{x+1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

οπότε $\lim\limits_{x\to 5} f\left(\frac{x+1}{3}\right) = \lim\limits_{y\to 2} f(y) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

Πρόβοχή $\lim\limits_{x\to k} f(x) = \lim\limits_{y\to k} f(y) = \lim\limits_{t\to k} f(t) = k \in \mathbb{R}$.

(12) Αν η f άρτια (δηλαδή $f(-x) = f(x)$) και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x) = \ell$.

Λύση

$\lim\limits_{x\to -x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to -x_0} f(-x) = \lim\limits_{y\to x_0} f(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

αφού θέτω $y = -x$ τότε $y \to \lim\limits_{x\to -x_0}(-x) = -(-x_0) = x_0$

13) Αν $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\alpha x)}{\beta x}$ $\alpha, \beta \neq 0$.

Λύση

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\alpha x)}{\beta x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha f(\alpha x)}{\beta \alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\alpha x)}{\alpha x} \overset{*}{=}$

$= \frac{\alpha}{\beta} \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \ell = \frac{\alpha \ell}{\beta}.$

* Θέτω $y = \alpha x$ τότε $y \to \lim\limits_{x\to 0} \alpha x = \alpha \cdot 0 = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{4x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x+\eta\mu 3x}{5x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 2x}{x}$ ε) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^4 x}{x}$

2) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{x^2+4x}$

3) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^3-2x}$

4) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\eta\mu x}{\sqrt{x^2+4}-2}$

5) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x+\eta\mu 5x}{\eta\mu x+1-\sigma\upsilon\nu x}$

6) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+x}{1-\sigma\upsilon\nu x+3x}$

7) Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)+\eta\mu 2x}{4x\cdot f(x)+\eta\mu x}$

8) Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)+2}-2}{f^2(x)-4}$

9) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\eta\mu x+3}-2}{\eta\mu x-1}$

10) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{\ln x+4}-2}{\ln^2 x-\ln x}$

11) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\left[\frac{2x}{x^2-9}\eta\mu(x-3)\right]$

12) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+3e^x-4}{e^{2x}-1}$