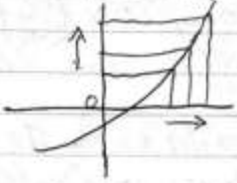
ΜΑΘΗΜΑ 21.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $+\infty$ ή στο $-\infty$.

I

A] Όταν το π. ορισμού μιας συνάρτησης περιέχει διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ τότε οι τιμές του x μπορεί να μεγαλώνουν απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $x \to +\infty$ (το x τείνει στο $+\infty$) και ανάλογα έχουμε.

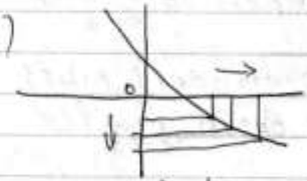
α)



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

μεγαλώνει το x απεριόριστα μεγαλώνει και το $f(x)$ απεριόριστα.

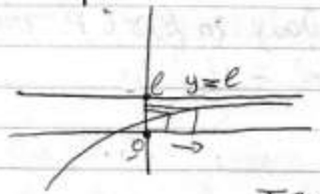
β)



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

μεγαλώνει το x απεριόριστα μικραίνει το $f(x)$ απεριόριστα.

γ)



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

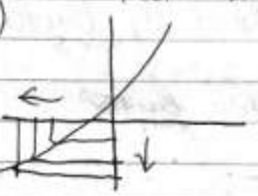
μεγαλώνει το x απεριόριστα και το $f(x)$ πλησιάζει στον αριθμό ℓ.

Στην περίπτωση αυτή η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B] Όταν το π. ορισμού μιας συνάρτησης περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$ τότε οι τιμές του x μπορεί να μικραίνουν απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $x \to -\infty$.

και ανάλογα έχουμε

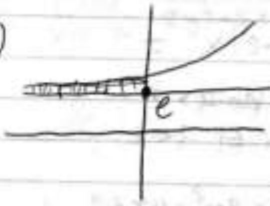
α)



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

β) 

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

γ) 

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell .$$

Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $+\infty$.

1) $\lim_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$, $(\nu=1,2,3\ldots)$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$.

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $-\infty$.

1) $\lim_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \nu \text{ άρτιος.} \\ -\infty & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ $(\nu=1,2,3\ldots)$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$.

Στο $\pm\infty$ ισχύουν όλες οι ιδιότητες των ορίων που ισχύουν για $x\to x_0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ στο $\pm\infty$.

Ⓐ ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ

1. $\lim_{x\to+\infty}(4x^3-4x^2+5) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(4-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = +\infty(4-0+0)$
$= +\infty \cdot 4 = +\infty$

ή πιο απλά $\lim_{x\to+\infty}(4x^3-4x^2+5) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = 4\cdot(+\infty) = +\infty$

Το όριο πολυωνυμικής στο $\pm\infty$ είναι ίσο με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.

2. $\lim_{x\to-\infty}(5x^3-4x^2+5) = \lim_{x\to-\infty}(5x^3) = 5\cdot(-\infty) = -\infty$.

(3.) $f(x) = (\lambda-2)x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 6$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ;$

Λύση.

αν $\lambda = 2$ τότε $f(x) = -4x^4 + 3x^2 - 6$.
οπότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-4x^4) = -4\cdot(+\infty) = -\infty$.

αν $\lambda \neq 2$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\lambda-2)x^5 =$

$= (\lambda-2)\cdot\lim_{x\to+\infty} x^5 = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \lambda-2>0 \Leftrightarrow \lambda>2 \\ -\infty & \text{αν } \lambda-2<0 \Leftrightarrow \lambda<2 \end{cases}$

(4.) $f(x) = (\lambda^2-1)x^4 + (\lambda^2-\lambda)x^3 + \lambda x^2 - 4x + 2$
Να βρεθεί το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

Λύση

Είναι $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-1$

• Για $\lambda=1$ είναι $f(x) = x^2-4x+2$
οπότε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$.

• Για $\lambda=-1$ είναι $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$.
οπότε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3) = -\infty$

• Για $\lambda \neq \pm 1$ είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\lambda^2-1)x^4 =$

$= (\lambda^2-1)\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \lambda^2-1>0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ -\infty & \text{αν } \lambda^2-1<0 \Leftrightarrow \lambda\in(-1,1) \end{cases}$

(B.) ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ

(5.) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3-5x^2+6}{3x^2+2x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3})}{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2})}$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\frac{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3}}{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}\right] = +\infty\cdot\frac{4-0+0}{3+0-0} = +\infty\cdot\frac{4}{3} = +\infty$

Ή πιο απλά

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3-5x^2+6}{3x^2+2x-5} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3}{3x^2}\right) = \frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^4-5x^3+2}{x^5-4x^2+6} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^4}{x^5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0.$

(7.) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3-3x+5}{2x^3-5x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^3}{2x^3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2) = 2$

(8) $f(x) = \frac{(\mu-1)x^3-4x^2+2}{(\mu-2)x^2-3x+4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ;$

Για $\mu=1$ είναι $f(x) = \frac{-4x^2+2}{-x^2-3x+4}$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^2}{-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$

Για $\mu=2$ είναι $f(x) = \frac{x^3-4x^2+2}{-3x+4}$.

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(\frac{x^3}{-3x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{3}\right) = -\infty$

Για $\mu\neq1$ και $\mu\neq2$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\mu-1)x^3}{(\mu-2)x^2}\right) = \left(\frac{\mu-1}{\mu-2}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty} x =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{αν } \frac{\mu-1}{\mu-2}>0 \Leftrightarrow \mu\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \\ -\infty & \text{αν } \frac{\mu-1}{\mu-2}<0 \Leftrightarrow \mu\in(1,2) \end{cases}$$

Γ ΟΡΙΟ ΡΙΖΑΣ

Για να υπολογίσω το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[\nu]{f(x)}$ βρίσκω πρώτα το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και:

α) αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ τότε και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[\nu]{f(x)} = +\infty$

β) αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \geq 0$ τότε και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell}$.

γ) αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ ή $\ell<0$ τότε δεν ορίζεται $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[\nu]{f(x)}$.

(9) Αν $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-5x^2+3}{x^2-3x+2}}$ να βρεθεί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^4-5x^2+3}{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(10) Αν $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{8x^3-4x+5}{x^3+3}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3-4x+5}{x^3+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x^3}{x^3}\right)=8$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt[3]{8}=2$

(Α) Όριο $\dfrac{\text{ριζα}}{p(x)}$, $\dfrac{p(x)}{\text{ριζα}}$, $\dfrac{\text{ριζα}}{\text{ριζα}}$.

(11) αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x^2+2x-1}$ να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})}}{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}\ \overset{\text{αφού } x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=$

$=\lim\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right]=0\cdot\dfrac{\sqrt{1-0+0}}{1+0-0}=0\cdot 1=0$

(12) αν $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt{x^2+1}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Λύση

για κάθε $x>0$ έχω $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2(1+\frac{5}{x^2})}}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\ \overset{\text{αφού } x>0}{=}\ \dfrac{x^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\cdot\dfrac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}}=0\cdot 1=0.$

(Ε) Όριο όταν έχω $P(x) \pm$ ρίζα ή ρίζα $\pm$ ρίζα.

(13) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}+4x-5$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=;$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+\lim_{x\to+\infty}(4x-5)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty.$$

(14) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}-4x-5$, $\lim f(x)=;$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-4x-5\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{2}{x^2}\right)}-4x-5\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{2}{x^2}}-4x-5\right)$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{2}{x^2}}-4x-5\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{2}{x^2}}-4-\tfrac{5}{x}\right)\right]$$

$$=+\infty\left(\sqrt{1+0+0}-4-0\right)=+\infty(-3)=-\infty.$$

(15) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση.

Αν εργασθώ όπως στο πχ. 14 καταλήγω σε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)\cdot 0$.
Σε τέτοια περίπτωση αλλάζω τη μορφή της συνάρτησης πολλαπλασιάζοντας με την συζυγή παράσταση.
Αφού $x\to+\infty$ για κάθε $x>0$ έχω:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{1}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2x}=\frac{1}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2x}=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2}.$$

άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2}\right]=0\cdot\frac{1}{\sqrt{4+0}+2}=0\cdot\frac{1}{4}=0$

<u>Σημείωση</u> Σε απροσδιοριστία καταλήγουν όταν έχω:

πχ (1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+\gamma}-\alpha x\right)$, $\alpha>0$

πχ (2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+\gamma}+\alpha x\right)$, $\alpha>0$

(16) $f(x) = \sqrt{4x^2-2x+1} - \lambda x \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$

Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-\lambda x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda x\right) \underset{x>0}{\overset{\text{αφού } x\to+\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right] = +\infty\left(\sqrt{4-0+0}-\lambda\right)$$

$$= +\infty(2-\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } 2-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<2 \\ -\infty & \text{αν } 2-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>2 \\ \text{απροσδιόριστο} & \text{αν } \lambda=2 \end{cases}$$

Για $\lambda=2$ έχω:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x+1-4x^2}{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2} = \frac{-2+0}{\sqrt{4-0+0}+2} = -\frac{1}{2}$$

ΣΤ) ΟΡΙΟ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ.

$$f(x) = \frac{|x^3-4x|+|x^2-5|}{x^2+6x+2} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = ;$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-4x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$ άρα και $x^3-4x<0$ σε μια περιοχή του $-\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$ άρα και $x^2-5>0$ σε μια περιοχή του $-\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^3-4x|+|x^2-5|}{x^2+6x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+4x+x^2-5}{x^2+6x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x^3}{x^2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Να βρεθούν τα όρια.

α) $\lim_{x\to+\infty}(4x^3-5x+6)$ β) $\lim_{x\to-\infty}\left((\eta\mu\theta)x^3-4x^2+6\right)$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

γ) $\lim_{x\to+\infty}\left[(1-\sigma\upsilon\nu\theta)x^5-3x^3+2x\right]$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$

② $f(x)=(\lambda^2-9)x^3-(\lambda^2-3\lambda)x^2+\lambda x-3$. Να βρεθεί $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

③ Να βρεθούν τα όρια.

α) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^4-3x^2+5}{2x^4+6}\right)$ β) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3x+5}{x^3+6}\right)$ γ) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4+3}{4x^2+1}\right)$

④ $f(x)=\frac{(1-\mu)x^3+2x-6}{(\mu-3)x^2-4x+2}$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$.

⑤ $f(x)=\frac{(1-\eta\mu\theta)x^3+3x^2+2}{x^2+5}$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$.

⑥ $f(x)=\sqrt{9x^2+1}+3x$ Να υπολογίσετε.

α) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ β) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

⑦ $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x^2+3x+5}$. Να υπολογίσετε $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

⑧ $f(x)=\sqrt{9x^2+5}-ax$ Για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}^*$ Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

⑨ $f(x)=\frac{|x^3-x+3|+|x^4-5|-x^4}{x^3+2}$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

ΜΑΘΗΜΑ 22.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $\pm\infty$. II

Α] ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ στο $\pm\infty$

① ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\eta\mu x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sigma\upsilon\nu x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\epsilon\varphi x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\varphi x$

② Αν έχω $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)\cdot\eta\mu g(x)]$ ή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu g(x)]$

και είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ και το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=\pm\infty$

τότε τα όρια είναι 0 και τα βρίσκω με κριτήριο παρεμβολής.

(πχ) Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\eta\mu x^2\right)$ είναι $(0\cdot\eta\mu\infty)$

Είναι $\left|\frac{1}{x^3}\cdot\eta\mu x^2\right|=\left|\frac{1}{x^3}\right|\cdot|\eta\mu x^2|\le\left|\frac{1}{x^3}\right|\cdot 1=\frac{1}{x^3}$
για κάθε $x>0$.

$$\text{άρα } -\frac{1}{x^3}\le\frac{1}{x^3}\eta\mu x^2\le\frac{1}{x^3}$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ τότε και
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\eta\mu x^2\right)=0$

③ Αν έχω $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)\cdot\eta\mu g(x)]$ και είναι
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$ τότε
μετατρέπω το $f(x)\cdot\eta\mu g(x)=k(x)\cdot\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)}$

(πχ) Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$, $(\infty\cdot\eta\mu 0)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}$

$=+\infty\cdot 1=+\infty$

④ $f(x) = \dfrac{4ημx + 3συνx^3}{x^4}$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Είναι $f(x) = \dfrac{4ημx}{x^4} + 3\dfrac{συνx^3}{x^4} = \dfrac{4}{x^4}\cdot ημx + \dfrac{3}{x^4}\cdot συνx^3$

• και $\left|\dfrac{4}{x^4}\cdot ημx\right| = \left|\dfrac{4}{x^4}\right|\cdot|ημx| \le \left|\dfrac{4}{x^4}\right|\cdot 1 = \dfrac{4}{x^4}$.

άρα $-\dfrac{4}{x^4} \le \dfrac{4}{x^4}\cdot ημx \le \dfrac{4}{x^4}$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^4}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x^4}\right) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x^4}\cdot ημx\right) = 0$

• ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^4}\cdot συνx^3\right) = 0$.

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x^4}\cdot ημx\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^4}\cdot συνx^3\right) = 0 + 0 = 0$.

⑤ $f(x) = \dfrac{4x + x^2 ημ\frac{1}{x}}{2x + x^2 ημ\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$;

Λύση

Είναι για $x>0$ $f(x) = \dfrac{x(4 + xημ\frac{1}{x})}{x(2 + xημ\frac{1}{x})} = \dfrac{4 + \frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{2 + \frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{ημy}{y} = 1$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4 + \frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{2 + \frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = \dfrac{4+1}{2+1} = \dfrac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(P(x) \pm ημg(x))$ βγάζω κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του $P(x)$

⑥ $f(x) = x^2 - 3x + 2 + ημx$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$;

Λύση.

Είναι για $x>0$ $f(x) = x^2\cdot\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{ημx}{x}\right)$

και • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$.

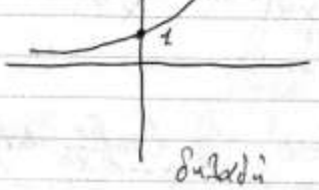
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ημx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot ημx\right) = 0$ με κριτήριο παρεμβολής.

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\cdot(1+0) = +\infty$.

(B) ΟΡΙΟ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ στο $\pm\infty$.

Γνωρίζω ότι.

• αν $\alpha > 1$ τότε η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$ είναι.



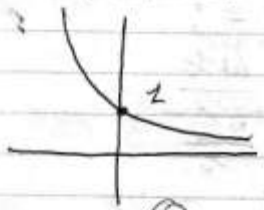
άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$

και $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = 0$.

• αν $\alpha < 1$ τότε η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha^x$ είναι.



άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$.

και $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$

πχ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = +\infty$.

(7) $f(x) = 2^x + 3^x + 5^x$ να βρεθεί α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2^x + 3^x + 5^x) = +\infty + (+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim (2^x + 3^x + 5^x) = 0 + 0 + 0 = 0$.

(8) $f(x) = 2^x + 3^x - 5^x$ Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2^x + 3^x - 5^x) = +\infty + (+\infty) - (+\infty)$

Απροσδιόριστο.

Άρα αλλάζω τη μορφή της συνάρτησης.
Βγάζω κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μεγαλ. βάση.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1\right)\right] = +\infty\,(0+0-1) = -\infty.$$

(9) $f(x) = \dfrac{2^x - 5^{x+1}}{3^x+5^x}$ να υπολογίσετε α) το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Λύση

α) όταν το $x\to+\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τη μεγαλύτερη εκθετική

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-5\cdot5^x}{3^x+5^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x-5\cdot1\right)}{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x-5}{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1} = \frac{0-5}{0+1} = -5$$

β) όταν το $x\to-\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τη μικρότερη εκθετική.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-5\cdot5^x}{3^x+5^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left(1-5\left(\frac{5}{2}\right)^x\right)}{3^x\left(1+\left(\frac{5}{3}\right)^x\right)}$$

$$= \lim_{x\to[illegible]}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{1-5\left(\frac{5}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{5}{3}\right)^x}\right] = +\infty\,\frac{1-5\cdot0}{1+0} = +\infty$$

(10) $f(x) = x^2-4x+9+e^x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$;

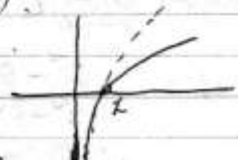
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+9) + \lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty+(+\infty) = +\infty.$$

(Γ) Όριο λογαριθμικής.

$f(x) = \ln x$, $g(x) = \log x$

Έχουν π. ορ. $A(0,+\infty)$.

και γραφική παράσταση.



Από τη γραφική παράσταση

Παρατηρώ ότι

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.

(11) $f(x) = x^2 - 3x + 2 + \ln x$. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$; β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$;

Λύση.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+2) + \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim x^2 + \lim \ln x$
$= +\infty + (+\infty) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-3x+2) + \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x =$
$= 2 + (-\infty) = -\infty$

(12) $f(x) = x^2 \ln x - 3x + 2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$;

Λύση.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\ln x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right] = +\infty(+\infty - 0 + 0)$
$= +\infty$.

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

(Δ) ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

(13) $f(x)=\dfrac{\ln^3x-3\ln x+2}{\ln^4x+2\ln x+2}$ Να βρεθεί α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

Λύση.

α) Θέτω $y=\ln x$ τότε $y\to\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$. άρα

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3x-3\ln x+2}{\ln^4x+2\ln x+2}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3-3y+2}{y^4+2y+2}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y^3}{y^4}\right)$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

β) Θέτω $y=\ln x$ τότε $y\to\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ άρα.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{y\to-\infty}\frac{y^3-3y+2}{y^4+2y+2}=\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{y^3}{y^4}\right)=\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{y}\right)=0.$$

(14) Να υπολογίσετε τα όρια.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\,\eta\mu\frac{1}{x}}$

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{y=1/x}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu y}{y}=1$

β) Θέτω $y=x\,\eta\mu\frac{1}{x}$ τότε από το (α) $y\to1$.

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to1}\ln y=\ln1=0.$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\,\eta\mu\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to1}e^{y}=e^{1}=e.$

(15) Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+2}{x^2+4}\eta\mu\left(\dfrac{x^2+4}{x^3+2}\right)\right]$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\left(\dfrac{x^3+5}{x^4+2x+1}\right)$

Λύση

α) Θέτω: $y=\dfrac{x^2+4}{x^3+2}$ τότε $y\to\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{x^3+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3+2}{x^2+4}\cdot\eta\mu\left(\dfrac{x^2+4}{x^3+2}\right)\right]=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y}\eta\mu y=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu y}{y}=1$

β) Θέτω $y = \frac{x^3+5}{x^4+2x+1}$ τότε $y \to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+5}{x^4+2x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} ημ\left(\frac{x^3+5}{x^4+2x+1}\right) = \lim\limits_{y\to 0} ημ y = ημ 0 = 0.$

(Ε) ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ συνάρτηση.

(16) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-3x}{x^2}=4$ να υπολογίσετε.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-2x^2+4x+2}{2f(x)+3x^2}$

Λύση

Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-3x}{x^2}$ $(x\neq 0)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ και

$f(x)-3x=x^2\cdot g(x) \Leftrightarrow f(x)=x^2\cdot g(x)+3x.$

α) τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 g(x)+3x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} 3x$

$= +\infty\cdot 4 + \infty = +\infty.$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-2x^2+4x+2}{2f(x)+3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2 g(x)+3x-2x^2+4x+2}{2x^2 g(x)+6x+3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left[g(x)+\frac{3}{x}-2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right]}{x^2\left[2g(x)+\frac{6}{x}+3\right]} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\frac{3}{x}-2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{2g(x)+\frac{6}{x}+3}$

$= \frac{4+0-2+0+0}{2\cdot 4+0+3} = \frac{2}{11}$

(17) Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 f(x) - x^2+2}{x^2+1} = 2$ Να υπολογίσετε·

α) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x f(x)+5}{3x+4}$

Λύση

Έστω $g(x) = \frac{x^2 f(x) - x^2+2}{x^2+1}$ τότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$ και.

$x^2 f(x) - x^2+2 = g(x)(x^2+1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 g(x) + g(x) + x^2 - 2}{x^2}$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2} g(x) + 1 - \frac{2}{x^2}$.

τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[g(x) + \frac{1}{x^2} g(x) + 1 - \frac{2}{x^2}\right] = 2+0\cdot 2+1-0 = 3$.

β) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x f(x)+5}{3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2f(x)+\frac{5}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2f(x)+\frac{5}{x}}{3+\frac{4}{x}} = \frac{2\cdot 3+0}{3+0} = 2$

(18) Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 5$

α) Να υπολογίσετε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+4x+5}{x f(x) - 2x^2+6}$

β) Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\alpha x+2}{x f(x) - 2x^2+1} = 4$

Λύση.

α) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+4x+5}{x f(x) - 2x^2+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{f(x)}{x}+4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(f(x)-2x+\frac{6}{x}\right)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}+4+\frac{5}{x}}{(f(x)-2x)+\frac{6}{x}} = \frac{2+4+0}{5+0} = \frac{6}{5}$.

β) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\alpha x+2}{x f(x) - 2x^2+1} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{f(x)}{x}+\alpha+\frac{2}{x}\right)}{x\left(f(x)-2x+\frac{1}{x}\right)} = 4$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}+\alpha+\frac{2}{x}}{(f(x)-2x)+\frac{1}{x}} = 4$ άρα $\frac{2+\alpha+0}{5+0} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 18$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθούν τα όρια.

α) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^4+1}\cdot εφx\right)$ β) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^4+5}\cdot συνx\right)$

2) Να βρεθούν τα όρια.

α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+5}εφ\frac{1}{x}\right)$ β) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^6}{x^4+5}\cdot εφ\frac{1}{x^2}\right)$

3) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xεφx+4συνx}{x^2}\right)$

5) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+2+συνx\right)$

6) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+x^2εφ\frac{1}{x}}{2x+x^3εφ\frac{1}{x^2}}\right)$

7) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+εφx}{4x^2+συνx}\right)$

8) $f(x)=2^x+3^x-e^x$ Να υπολογ. α) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ β) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

9) $f(x)=\frac{2^x-e^x}{5^x+e^x}$ να υπολογ. α) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, β) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

10) $f(x)=\frac{2^x-α^x}{3^x+α^x}$ για τις διάφορες τιμές του $α\in R$ να υπολογ. το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

11) $f(x)=x^2-5x+4+\ln x$

Να υπολογ. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

12) $f(x)=x^4\ln x-x^4-2x+5$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$;

13) $f(x)=\frac{\ln^4x-5\ln^3x+4}{\ln^2x+1}$ Να υπολ. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to0^+}f(x)$

14) $f(x)=\frac{4e^{3x}-3e^{2x}+2}{e^{3x}+1}$ Να υπολ. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

15) Να υπολογίσετε τα όρια.

α) $\lim_{x\to+\infty}(x^2εφ\frac{1}{x^2})$ β) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2εφ\frac{1}{x^2})$ γ) $\lim_{x\to+\infty}e^{x^2εφ\frac{1}{x^2}}$

(16) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+2x^2+3}{x^2} = -4$ Να υπολογίσετε.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+x^2-4x+2}{2f(x)+2x^2-3x+1}$.

(17) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 f(x)-4x^2+1}{x^2+4} = 5$ Να υπολογίσετε.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4xf(x)+2}{2x+1}$

(18) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-5x) = 2$

α) Να υπολογίσετε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+4x-3}{xf(x)-5x^2+1}$

β) Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ όταν:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+\alpha x-1}{xf(x)-5x^2+4} = 10$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1/ Αν $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=-\infty$ να υπολογίσεις

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^3(x)+3f(x)}{f^2(x)+2f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+x^2-2x}{3x-6}$

ΘΕΜΑ 2/ ι) Να δείξεις $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\text{ημ}\frac{1}{x}\right)=1$.

ιι) Να δείξεις $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\,\text{ημ}x\right)=0$

ιιι) Να υπολογίσεις το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+x^2\,\text{ημ}\frac{1}{x}}{3x+\text{ημ}x}$.

ιv) Να υπολογίσεις $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x^3\,\text{ημ}\frac{1}{x}}{4x^2+\text{ημ}x}$

ΘΕΜΑ 3/ $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3}$

α) Να βρεθούν τα ι) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ιι) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^3(x)-|f^3(x)-4f^2(x)+2|}{|f^2(x)-4f^3(x)+2|}$

ΘΕΜΑ 4/ Αν $2\sqrt{3x}\le f(x)\le x+3 \quad \forall x\ge 0$

ι) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ιι) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-6}{x-3}$

ιιι) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-x^2+3}{x^2-3x}$

ιv) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^2(x)-6f(x)}{\sqrt{f(x)-2}-2}$