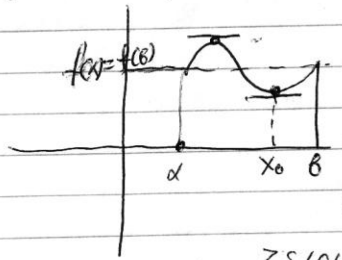
ΜΑΘΗΜΑ 36 | ΜΑΘΗΜΑ 37

ΘΕΩΡΗΜΑ Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η f είναι παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta)$

Αλγεβρική ερμηνεία

Τότε υπάρχει ένα τουλάχ. $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=0$.



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον xx'

ΕΙΔΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 είδος | Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=0$ |

α) Αν $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)<0$ κάνω θ. Bolzano για την f' στο $[\alpha,\beta]$

β) Αν $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$ με $x_1,x_2 \in (\alpha,\beta)$ κάνω θ. Bolzano για την f' στο $[x_1,x_2]$.

γ) Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ ή $f(x_1)=f(x_2)$ με $x_1,x_2 \in (\alpha,\beta)$ κάνω θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ ή στο $[x_1,x_2]$ για την f.

Άσκηση 1| $f(x) = 2^x+8^x-8x-2$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$ και $2^{x_0}\ln 2+8^{x_0}\ln 8=8$.

Λύση

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$,

Η f παραγ. στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0,1)$ με $f'(x)=2^x\ln 2+8^x\ln 8-8$

$f(0)=f(1)=0$

άρα ισχύει το θ. Rolle άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2^{x_0}\ln 2+8^{x_0}\ln 8-8=0 \Leftrightarrow$

$2^{x_0}\ln 2+8^{x_0}\ln 8=8$

Άσκηση 2) Αν η f παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ και $f^2(α)+f^2(β)-2(f(α)+f(β))+2=0$ να δείξετε ότι υπάρχει $ξ\in(α,β)$ ώστε $f'(ξ)=0$.

Λύση

Είναι $f^2(α)+f^2(β)-2f(α)-2f(β)+2=0 \Leftrightarrow$

$(f^2(α)-2f(α)+1)+(f^2(β)-f(β)+1)=0 \Leftrightarrow (f(α)-1)^2+(f(β)-1)^2=0$.

$\Leftrightarrow f(α)=1$ και $f(β)=1$ άρα

- $f(α)=f(β)$
- η f συνεχής στο $[α,β]$ αφού είναι παραγωγ.
- η f παραγ στο $(α,β)$

οπότε ισχύει το Θ. Rolle. άρα υπάρχει $ξ\in(α,β)$ ώστε $f'(ξ)=0$.

Άσκηση 3) Αν $f(x)=\begin{cases} α\eta\mu x+α & \text{αν } x<0 \\ βx^2+γx+2 & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$

Να βρεθούν οι τιμές των $α,β\in R$ ώστε να ισχύει το Θ. Rolle στο $[-1,1]$

$\boxed{\text{Λύση}}$ • Πρέπει να είναι συνεχής στο $[-1,1]$

Για $x<0$ η f συνεχής

Για $x>0$ η f συνεχής

Πρέπει να είναι συνεχής και στο 0. άρα πρέπει

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \Leftrightarrow 2=α=2 \Leftrightarrow \boxed{α=2}$

- Πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$

Για $x<0$ είναι παραγωγίσιμη.

Για $x>0$ είναι παραγωγίσιμη.

Πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο 0.

άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow \boxed{γ=2}$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{βx^2+γx+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x(βx+γ)}{x}=γ$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{α\eta\mu x+α-2}{x}\overset{(α=2)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x}{x}=2\cdot 1=2$.

Πρέπει και $f(-1)=f(1) \Leftrightarrow 2\eta\mu(-1)+2 = \beta+2+2 \Leftrightarrow$
$\beta = 2\eta\mu(-1)-2 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-2\eta\mu 1-2}$

*

2ο είδος Για να δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$

α) Με δοκιμή

β) Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ ή $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ με $x_1,x_2 \in (\alpha,\beta)$ κάνω Θ. Bolzano για την f στο $[\alpha,\beta]$ ή στο $[x_1,x_2]$

γ) Αν δεν ισχύει το Θ. Bolzano. Τότε.
Θεωρώ μια συνάρτηση $F(x)$ παράγουσα της f. Τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$ και αν $F(\alpha)=F(\beta)$. Κάνω Θ. Rolle για την F στο $[\alpha,\beta]$

δ) Δείχνω ότι το 0 ανήκει στο Σύνολο τιμών $f([\alpha,\beta])$.

Άσκηση 4/ Έστω $f(x)=3\alpha x^2+2\beta x-\alpha-\beta$, $\alpha,\beta \in R$
Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0)=0$

Λύση

Παρατηρώ ότι $f(0)=-\alpha-\beta$, $f(1)=2\alpha+\beta$.
$f(0)\cdot f(1)=;$ δεν γνωρίζω το πρόσημο.
άρα δεν γίνεται Θ. Β. οπότε.

Έστω $F(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\alpha x-\beta x$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$

Η F συνεχής στο R άρα και στο $[0,1]$

Η F παραγ. στο R άρα και στο $(0,1)$ με $F'(x)=f(x)$

$F(0)=F(1)=0$ άρα ισχύει Θ. Rolle

άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $F'(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$.

3ο ΕΙΔΟΣ/ Για να δείξω ότι μια εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα

α) Εξετάζω αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε έχει το πολύ μια ρίζα (όταν $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$)

β) Θεωρώ ότι έχει 2 ρίζες $\rho_1<\rho_2$ τότε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ και αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε από θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(x_0)=0$ που θα είναι άτοπο. (όταν $f'(x)\neq 0$)

ΑΣΚΗΣΗ 5/ Αν η f παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)\neq e^x-2$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x-2x+\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα στο R.

λύση

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $f(x)=e^x-2x+\alpha \Leftrightarrow$ $f(x)-e^x+2x-\alpha=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ αν θέσω $g(x)=f(x)-e^x+2x-\alpha$. Έστω $\rho_1<\rho_2$ ρίζες της g.

- Η g συνεχής στο R ως πράξ. συν: συνάρ. άρα και στο $[\rho_1,\rho_2]$
- Η g παραγ. στο R ως πράξ. παρ. συνάρ. άρα και στο (ρ_1,ρ_2)
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$ αφού είναι ρίζες

άρα ισχύει το θ. Rolle άρα υπάρχει $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)-e^{x_0}+2=0$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=e^{x_0}-2$ άτοπο.

αφού $f'(x)\neq e^x-2 \ \forall x\in R$

άρα η $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο R.

(61)

ΟΜΟΙΩΣ ΔΕΙΧΝΩ ΟΤΙ Η $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ 2 ΡΙΖΕΣ, 3 ΡΙΖΕΣ, ΚΤΛ.
ΜΕ ΑΤΟΠΟ ΑΠΑΓΩΓΗ

Π.χ. για 2 το πολύ ρίζες.
Θεωρώ ότι έχει 3 ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$
Τότε θα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ ισχύει το θ. Rolle
άρα υπάρχουν $x_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $x_2\in(\rho_2,\rho_3)$ ώστε
$f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$ δηλαδή η f' έχει δύο ρίζες
Το οποίο πιθανόν να είναι άτοπο
ή αφού $f'(x_1)=f'(x_2)$ από θ. Rolle για την f'
στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε
$f''(\xi)=0$ Το οποίο θα είναι άτοπο.
αφού η $f''(x)\neq 0$ $\forall x\in$ π. ορισμού

ΑΣΚΗΣΗ 61 Να δείξετε ότι η εξίσωση
$\alpha-\eta\mu x=x^2$ έχει το πολύ 2 ρίζες $\forall \alpha\in R$

Λύση.

Η εξίσωση γράφεται $\alpha-\eta\mu x=x^2 \Leftrightarrow x^2+\eta\mu x-\alpha=0 \Leftrightarrow$
$f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=x^2+\eta\mu x-\alpha$
Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$
τότε Η f συνεχής στο R άρα και στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$
Η f παραγωγ. στο R άρα και στα (ρ_1,ρ_2), (ρ_2,ρ_3)
με $f'(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x$.
$f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ αφού είναι ρίζες.
άρα από θ. Rolle υπάρχουν $x_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $x_2\in(\rho_2,\rho_3)$
ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$

- Η f' συνεχής στο R άρα και στο $[x_1,x_2]$
- Η f' παραγωγ. στο R άρα και στο (x_1,x_2) με $f''(x)=2-\eta\mu x$.
- $f'(x_1)=f'(x_2)$

άρα από θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε
$f''(x_0)=0 \Leftrightarrow 2-\eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow \eta\mu x_0=2$ άτοπο
άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

4ο ΕΙΔΟΣ/ Για να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα δείχνω ότι έχει τουλάχιστον μια ρίζα και το πολύ μια ρίζα άρα έχει ακριβώς μια ρίζα.

ΑΣΚΗΣΗ 7/ Να δείξετε ότι η εξίσωση $6x^3+5x=3+3x^2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση.

- Θα δείξω ότι έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $6x^3-3x^2+5x-3=0$ $\Leftrightarrow f(x)=0$ αν θέσω $f(x)=6x^3-3x^2+5x-3$.

Είναι $f(0)=-3<0$, $f(1)=5>0$ δηλαδή $f(0)\cdot f(1)<0$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχ. $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=0$.

ή Έστω $g(x)=\frac{6}{4}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2-3x$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $g'(x)=f(x)$

Είναι $g(0)=0$, $g(1)=0$ και αφού η g συνεχής στο $[0,1]$ και παραγ. στο $(0,1)$ από Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$

- Θα δείξω ότι η $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

Έστω η f έχει 2 ρίζες $\rho_1<\rho_2$ τότε στο $[\rho_1,\rho_2]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=18x^2-6x+5$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ αφού ρ_1,ρ_2 ρίζες.

άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 18\xi^2-6\xi+5=0$ άτοπο αφού $\Delta<0$

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

5ο ΕΙΔΟΣ. ΓΙΑ ΝΑ ΔΕΙΞΩ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΕΙ $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = A(\xi)$.

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση
$f'(x) = A(x) \Leftrightarrow f'(x) - A(x) = 0 \Leftrightarrow$
$(f(x) - B(x))' = 0 \Leftrightarrow h'(x) = 0$ έχει μία τουλάχ ρίζα στο (α, β) (όπου $B'(x) = A(x)$)
Κάνω Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ για την h.
(ΠΡΟΣΟΧΗ Θ. R ΟΧΙ ΓΙΑ ΤΗΝ f.)

ΑΣΚΗΣΗ 8. Αν f παραγωγίσιμη στο R και $f(-1) = -1$ και $f(2) = -4$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 2)$ ώστε $f'(\xi) = -2\xi$.

Λύση.

Είναι $f'(x) = -2x \Leftrightarrow f'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow (f(x) + x^2)' = 0$.

Θέτω $g(x) = f(x) - x^2$.
- Η g συνεχής στο R άρα και στο $[-1, 2]$
- Η g Παραγ. στο R άρα και στο $(-1, 2)$ με $g'(x) = f'(x) - 2x$
- $g(-1) = g(2)$ αφού $g(-1) = 0$, $g(2) = 0$.

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (-1, 2)$ ώστε
$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -2\xi$.

* πχ. όπως άσκηση 22, 23.

ΠΡΟΣΟΧΗ.

Στο είδος αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή και εξάσκηση στο να βρίσκω την αρχική συνάρτηση στην οποία θα κάνω Θ. Rolle.

- Μερικές φορές η συνάρτηση δίνεται.
- Άλλες φορές την υποψιάζομαι αν δίνεται καθώς ότι $g(\alpha) = g(\beta)$ οπότε κάνω Θ. R στην g.
- Άλλες φορές την ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΩ από αυτό που θέλει να δείξω.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΚΑΝΩ Θ. Rolle

Για να δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

1) $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$ είναι $\frac{f'(x)}{g'(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x) = 0$
$\Leftrightarrow (f(x)\cdot g(x))' = 0$
κάνω Θ. Rolle στην $h(x) = f(x)\cdot g(x)$

2) $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$ είναι $\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow$
$f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$ κάνω Θ.R στην $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

3) $f'(\xi) + f(\xi) = \alpha$ είναι $f'(x) + f(x) = \alpha \Leftrightarrow$
$f'(x)e^x + f(x)e^x = \alpha e^x \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (\alpha e^x)' \Leftrightarrow$
$(f(x)e^x - \alpha e^x)' = 0$ κάνω ΘR στην $h(x) = f(x)e^x - \alpha e^x$

4) $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$ είναι $f'(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$f'(x)e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{\lambda x})' = 0$
κάνω Θ. Rolle για την $h(x) = f(x)e^{\lambda x}$.

5) $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$ είναι $f'(x) + g'(x)\cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$f'(x)e^{g(x)} + g'(x)e^{g(x)}f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{g(x)})' = 0 \Leftrightarrow$
κάνω Θ.R στην $h(x) = f(x)e^{g(x)}$

6) $f(\xi)\cdot f'(\xi) = K$. Είναι $f(x)\cdot f'(x) = K \Leftrightarrow$
$2f(x)\cdot f'(x) = 2K \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2Kx)' \Leftrightarrow$
$(f^2(x) - 2Kx)' = 0$ κάνω Θ.R για την
$h(x) = f^2(x) - 2Kx$

6α) $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$ είναι $f'(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x)\cdot x - f(x) = 0$
$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$ κάνω ΘR στην
$h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

65

(7) $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \kappa$ με $(f(x) \neq 0)$ είναι $\frac{f'(x)}{f(x)} = \kappa \Leftrightarrow f'(x) = \kappa f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) - \kappa f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) e^{-\kappa x} - \kappa e^{-\kappa x} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(f(x) e^{-\kappa x})' = 0$ κανω Θ R στην $h(x) = f(x) e^{-\kappa x}$.

(8) $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = A(\xi)$. με $(f(x) > 0)$ είναι $\frac{f'(x)}{f(x)} = A(x)$

$\Leftrightarrow (\ln f(x))' = (B(x))' \Leftrightarrow (\ln f(x) - B(x))' = 0$

κανω Θ·R στην $h(x) = \ln f(x) - B(x)$.

(9) $\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} = \kappa$, $(f(x) \neq 0)$ είναι $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \kappa \Leftrightarrow$

$\left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = (\kappa x)' \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} - \kappa x\right)' = 0$ κανω

Θ R στην $h(x) = \frac{1}{f(x)} - \kappa x$.

(10) $\frac{f'(\xi)}{\sqrt{f(\xi)}} = \kappa$, $(f(x) > 0)$ είναι $2\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \kappa \Leftrightarrow$

$(2\sqrt{f(x)})' = (\kappa x)' \Leftrightarrow (2\sqrt{f(x)} - \kappa x)' = 0$.

κανω Θ R στην $h(x) = 2\sqrt{f(x)} - \kappa x$.

(11) $e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) = \kappa$. είναι $e^{f(x)} f'(x) = \kappa \Leftrightarrow$

$(e^{f(x)})' = (\kappa x)' \Leftrightarrow$

$(e^{f(x)} - \kappa x)' = 0$ κανω Θ R στην $h(x) = e^{f(x)} - \kappa x$

(Προσοχή Αν εχω δεδομενο $g(\alpha) = g(\beta)$ τοτε Θ. R για την g στο $[\alpha, \beta]$) ΚΣΛ πχ

(12) Αν εχω δεδομενο $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$ τοτε Θ R στην $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

(13) Αν εχω $e^{f(\alpha)} \eta\mu\alpha = e^{f(\beta)} \eta\mu\beta$ τοτε Θ R στην $g(x) = e^{f(x)} \eta\mu x$

ΚΣΛ.

ΑΣΚΗΣΗ 9 | Αν f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$.

Λύση

Είναι $f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=0$
$\Leftrightarrow (f(x)e^{-x})'=0$

Έστω $h(x)=f(x)e^{-x}$

Η h συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$h'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$

$h(\alpha)=h(\beta)=0$.

άρα ισχύει το Θ. Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)e^{-\xi}-f(\xi)e^{-\xi}=0$
$\Leftrightarrow (f'(\xi)-f(\xi))e^{-\xi}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-f(\xi)=0$ ή $e^{-\xi}=0$ αδύν

άρα $f'(\xi)=f(\xi)$

Άσκηση 10. Αν η f παραγωγ. στο $(0,+\infty)$ και $f(2)=2f(1)$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$.

Λύση.

Είναι $f'(x)=\frac{f(x)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)x=f(x) \Leftrightarrow f'(x)x-f(x)=0$
$\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$.

Έστω $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ $x\in(0,+\infty)$

Η h παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και στο $[1,2]$

$$\left.\begin{array}{l} h(1)=f(1) \\ h(2)=\frac{f(2)}{2}=\frac{2f(1)}{2}=f(1) \end{array}\right\}\text{ άρα } h(1)=h(2)$$

άρα ισχύει το Θ. Rolle

άρα υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε.

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)\xi-f(\xi)=0$
$\Leftrightarrow f'(\xi)\cdot\xi=f(\xi) \Leftrightarrow$
$f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11/ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσ. στο $[3,4]$ και $f(4)=2f(3)$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(3,4)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$.

Λύση

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(3,4)$ ώστε η εφαπτομένη στο $M(\xi,f(\xi))$ που είναι η (ε): $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$ δηλαδή να ισχύει.

$$0-f(\xi)=f'(\xi)(2-\xi) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)(\xi-2)-f(\xi)=0.$$

Είναι $f'(x)(x-2)-f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)(x-2)-f(x)(x-2)'=0$

$$\frac{f'(x)(x-2)-f(x)(x-2)'}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-2}\right)'=0.$$

Έστω $h(x)=\frac{f(x)}{x-2}$

Η h παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[3,4]$ με $h'(x)=\frac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2}$

$h(3)=f(3)$

$h(4)=\frac{f(4)}{2}=\frac{2f(3)}{2}=f(3)$.

Άρα είναι $h(3)=h(4)$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(3,4)$ ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-2)-f(\xi)=0$

Ασκηση 12/ Αν $f^4(x)+3f(x)=e^x+3x\ \forall x\in\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγ. στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f έχει ~~τουλάχιστον~~ μόνο μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

Λύση

Έστω ότι η f έχει 2 ρίζες $\rho_1<\rho_2$ τότε στο $[\rho_1,\rho_2]$ ισχ. Θ.R άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f'(\xi)=0$

όμως αν παραγ. και τα 2 μέλη της ισότητας
έχω $4f^3(x)\cdot f'(x)+3f'(x)=e^x+3$
για $x=\xi$ έχω
$4f^3(\xi)f'(\xi)+3f'(\xi)=e^\xi+3$ αφού $f'(\xi)=0$
$0=e^\xi+3 \Rightarrow e^\xi=-3$ άτοπο
άρα η f έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

(69) ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(1) $f(x) = \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \kappa x$.
Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\kappa=0$ Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$

(2) Αν η f παραγωγίσιμη στο R και $f^2(0)+f^2(1)+f^2(2)-2(f(1)+f(2)+f(0))+3=0$
Να δείξετε ότι η f' έχει μια ρίζα στο $(0,1)$ και μια στο $(1,2)$ και η f'' μια ρίζα στο $(0,2)$

(3) $f(x) = \alpha + x^5 \cdot (x-1)^3 \cdot (x-2)^{2009}$
Να δείξετε ότι ισχύει το Θ. Rolle για την f στα $[0,1]$, $[1,2]$. και ότι η $f'(x)=0$ έχει 2 τουλάχ ρίζες. στο $(0,2)$ άνισες και η f'' μια τουλ ρίζα.

(4) Να δείξετε ότι η εξίσωση.
$4x = ημx + \alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα για κάθε $\alpha \in R$.

(5) Να δείξετε ότι η εξίσωση.
$2x^3 = 5-(\alpha^2+3)x$. έχει ακριβώς μια ρίζα.

(6) Να δείξετε ότι η εξίσωση.
$2^x+3^x = \alpha x+\beta$, $\alpha, \beta \neq 0$. έχει το πολύ 2 ρίζες στο R.

(7) Να δείξετε ότι η εξίσωση
$x^2+\alpha x+\beta = συνx$ έχει δύο το πολύ ρίζες στο R
για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

(8) Να δείξετε ότι η εξίσωση $5^x = 5-2x$
έχει ακριβώς μια ρίζα στο R.

(9) Αν $f(x) = 6\alpha x^5 + 5\beta x^4 + 4\gamma x^3 + 3\delta x^2 + 2\lambda x + \mu$
και $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\lambda+\mu=0$.
Να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$

(10) Να δείξετε ότι η εξίσωση $9x^8 - 8(\lambda+1)x^7 + \lambda = 0$ έχει μία τουλάχ ρίζα στο $(0,1)$.

(11) $f(x) = x^2 συνx + x συνx$

α) Να δείξετε ότι η f έχει 2 τουλαχ. ρίζες στο $(-2,2)$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(2x+1)συνx = (x^2+x)ημx$ έχει μία τουλάχ ρίζα.

(12) Αν $β^2 - 3αγ < 0$ και $\frac{1}{4}α + \frac{1}{3}β + \frac{1}{2}γ + δ = 0$.
$α, β, γ, δ \neq 0$ Να δείξετε ότι η εξίσωση $αx^3 + βx^2 + γx + δ = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

13) $f(x) = x^4 - 15x^2 + 2x + 1$. Να δείξετε ότι η f έχει 2 τουλαχ ρίζες στο $(-1,1)$ και η f' έχει μία τουλαχ ρίζα στο $(-1,1)$

(13) Αν η f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και $f(2) = f(1) + ln2$ να δείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (1,2)$ ώστε $f'(ξ) = 2ξ - 3 + \frac{1}{ξ}$.

(14) Αν η f παραγ. στο R_+^* και $f(2) - 3 = f(1) - ln2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (1,2)$ ώστε
$f'(ξ) = 2ξ - \frac{1}{ξ}$.

(15) Αν f παραγωγ. στο R και $f(α) = f(β) = 0$
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλαχ $ξ \in (α,β)$ ώστε α) $f'(ξ) = -f(ξ)$ β) $f'(ξ) = f(ξ)$
γ) $f'(ξ) = λf(ξ)$, $λ \in R^*$

δ) $f'(ξ) + 2ξ f(ξ) = 0$

(16) Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)=0$ ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε
$$f'(\xi)\,\text{συν}\,\xi = f(\xi)\,\text{ημ}\,\xi.$$

(17) Αν f συνεχής στο $[1,e]$ και παραγωγ. στο $(1,e)$ και $f(1)=1=\frac{f(e)}{e}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,e)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$.

(18) Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(x)\neq 0$ και $f(1)=e\cdot f(0)$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχ. $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

(19) Αν f παραγωγ. στο $[0,1]$ και $f(0)=-f(1)=-1$ να δείξεις ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $2f'(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=2$

(20) Αν η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ και $f(x)>0$. και $(f(\alpha))^{\beta}=(f(\beta))^{\alpha}$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\xi)\ln f(\xi)}{\xi}$.

(21) Αν $f^3(x)+5f(x)=\text{συν}\,x-5x \;\; \forall x\in R$ και είναι παρ. στο R να δείξετε ότι η f έχει το πολύ μια ρίζα στο R

(22) Αν η f παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ και $g(x)=f(x)\,\text{ημ}\,x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ ώστε
$$f'(x_0)+f(x_0)\,\text{σφ}\,x_0=0$$

(23) Αν $f'(x)\neq 0$ για καθε $x\in R$ και $f(0)=0$ και $g(x)=(x-2011)f(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2011)$ ώστε $\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}+\xi=2011$