ΜΑΘΗΜΑ 35

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Α) Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f ως προς x, $\left(\frac{df}{dx}\right)$ λέγεται η Παράγωγος της f. δηλαδή $\frac{df}{dx} = f'(x)$.

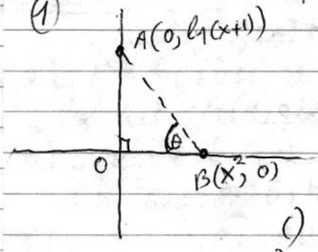
Β) Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f ως προς x όταν $x = x_0$, $\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)$ λέγεται το $f'(x_0)$. δηλαδή $\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$

Γ) Αν ένα μέγεθος x μεταβάλλεται με το χρόνο. τότε ο ρυθμός μεταβολής του x ως προς το χρόνο t. $\frac{dx}{dt}$ ονομάζεται ταχύτητα. και ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο. $\frac{dU}{dt}$ λέγεται επιτάχυνση δηλαδή

$$U(t) = x'(t) \quad \text{και} \quad \alpha(t) = U'(t) = x''(t)$$

Λυμένες Ασκήσεις.

(1)



Δίνονται τα σημεία $A(0, \ln(x+1))$ $B(x^2, 0)$ με $x > 0$. Καθώς το x μεταβάλλεται Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής

i) της απόστασης AB. όταν $x = 2$

ii) Του εμβαδού του τριγώνου (OAB) όταν $x = 2$.

iii) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $O\hat{B}A$ όταν $x = 2$.

Λύση.

Είναι $d = (AB) = \sqrt{\ln^2(x+1) + x^4}$ άρα $d(x) = \sqrt{\ln^2(x+1) + x^4}$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln^2(x+1) + x^4}} \cdot \left(2\ln(x+1) + 4x^3\right)$$

$$d'(2) = \frac{1}{2\sqrt{\ln^2 3 + 4}}$$

(ι) $E(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x+1)$

$E'(x) = \frac{1}{2} 2x \cdot \ln(x+1) + \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x+1}$

$E'(2) = 2\ln 3 + \frac{2}{3}$

② Ένα κινητό κινείται πάνω σε έλλειψη με εξίσωση $x^2+4y^2=4$
Κάποια χρονική στιγμή t_0 που το κινητό διέρχεται από το σημείο $M(1, y_0)$, $y_0>0$ η τετμημένη του μειώνεται με ταχύτητα $2\frac{cm}{sec}$ (δηλαδή $x'(t_0)=-2$)
Να υπολογίσετε εκείνη τη χρονική στιγμή
α) Τη ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η τεταγμένη.
β) Το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση του κινητού από την αρχή των αξόνων
γ) Το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει το κινητό με το Ο και τον $x'x$.

Λύση.

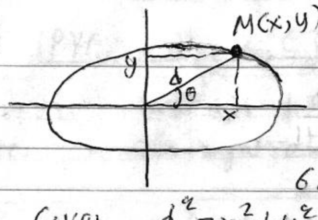
α) Αφού γνωρίζω το $x'(t_0)$ και ζητάω το $y'(t_0)$ χρειάζομαι μία σχέση ανάμεσα στα x, y που
- είναι $\boxed{x^2+4y^2=4}$
- κάθε χρονική στιγμή t έχω $x^2(t)+4y^2(t)=4$
- Παραγωγίζω και τα 2 μέλη και έχω $2x(t)\cdot x'(t)+8y(t)\cdot y'(t)=0$
- Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 έχω

$$2x(t_0)\cdot x'(t_0)+8y(t_0)\cdot y'(t_0)=0$$

γνωρίζω $x'(t_0)=-2$, $x(t_0)=1$ υπολογίζω από την $x^2+4y^2=4 \Leftrightarrow 1^2+4y^2=4 \Leftrightarrow 4y^2=3 \Leftrightarrow y^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow$
$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ αφού $y>0$ άρα $y(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

οπότε $2\cdot 1\cdot(-2)+8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y'(t_0)=0 \Leftrightarrow y'(t_0)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm/sec

(52)

β) 

Γνωρίζω $x'(t_0)$.
Ζητάω $d'(t_0)$
Χρειάζομαι μια σχεση ανάμεσα
για d, x

- Είναι $d^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow d^2 = x^2 + \frac{4-x^2}{4} \Leftrightarrow d^2 = \frac{3x^2+4}{4} \Leftrightarrow$
$4d^2 = 3x^2 + 4$
- καθε χρονική στιγμή t εχω $4d^2(t) = 3x^2(t) + 4$
- Παραγωγίζω και τα 2 μέλη $8d(t)\cdot d'(t) = 6x(t)\cdot x'(t)$
- Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 εχω.

$8d(t_0)\cdot d'(t_0) = 6x(t_0)\cdot x'(t_0)$

Εκείνη τη στιγμή είναι $x'(t_0) = -2$, $x(t_0) = 1$

$d(t_0) = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Άρα $\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot d'(t_0) = 2\cdot 1\cdot(-2) \Leftrightarrow d'(t_0) = \frac{-8}{\sqrt{7}}\ cm/sec$

γ). • $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}{x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x}$

- καθε χρονική στιγμή t εχω.

$\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{\sqrt{4-x^2(t)}}{2x(t)}$

- Παραγωγίζω και τα 2 μέλη και εχω

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4-x^2(t)}}\cdot(-2x(t)\cdot x'(t))\cdot 2x(t) - \sqrt{4-x^2(t)}\cdot 2x'(t)}{(2x(t))^2}$

- Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 εχω

$(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0))\cdot\theta'(t_0) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4-x^2(t_0)}}\cdot(-4x^2(t_0)\cdot x'(t_0)) - \sqrt{4-x^2(t_0)}\cdot 2x'(t_0)}{4x^2(t_0)}$

$(1+\sqrt{3}^2)\cdot\theta'(t_0) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(-4\cdot 1^2\cdot(-2)) - \sqrt{3}\cdot 2\cdot(-2)}{4\cdot 1}$

$4\theta'(t_0) = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ rad/sec$

3) Ένα κινητό κινείται πάνω στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \ln x$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$

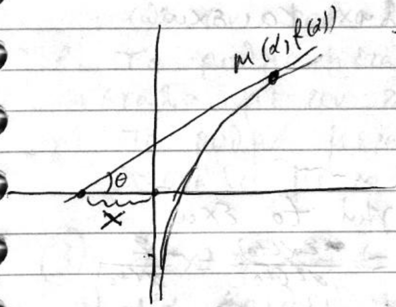
β) Να βρείτε το σημείο του άξονα xx' στο οποίο τέμνει η εφαπτομένη ως συνάρτηση του α.

γ) Κάποια χρονική στιγμή (t_0) που το κινητό διέρχεται από το σημείο με τετμημένη $\alpha = e$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $\alpha'(t_0) = 2\alpha(t_0)$.

Να υπολογίσετε εκείνη τη χρονική στιγμή

i) Το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου όπου η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα xx'

ii) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα xx'



Λύση

$f'(x) = \frac{1}{x}, \ \forall\, x > 0.$

α) $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

$y - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha)$

$y - \ln\alpha = \frac{x}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow$

$y = \frac{1}{\alpha}x + \ln\alpha - 1.$

β) για $y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}x + \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow x + \alpha\ln\alpha - \alpha = 0$
$\Leftrightarrow x = \alpha - \alpha\ln\alpha$. άρα τέμνει τον xx' στο σημείο $N(\alpha - \alpha\ln\alpha, 0)$

(94) Γνωρίζω το $\alpha'(t_0)$ Ζητάω το $x'(t_0)$.

Γι) • Είναι $x = -\alpha\ln\alpha + \alpha$

• κάθε χρονική στιγμή t έχω

$$x(t) = -\alpha(t)\cdot\ln(\alpha(t)) + \alpha(t)$$

• Παραγωγίζω και τα δύο μέλη και έχω

$$x'(t) = -\alpha'(t)\ln\alpha(t) - \alpha(t)\cdot\frac{1}{\alpha(t)}\cdot\alpha'(t) + \alpha'(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad x'(t) = -\alpha'(t)\ln\alpha(t)$$

• Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 έχω

$$x'(t_0) = -\alpha'(t_0)\ln(\alpha(t_0))$$

$$x'(t_0) = -2\alpha(t_0)\cdot\ln\alpha(t_0)$$

$$x'(t_0) = -2e\ln e \Leftrightarrow x'(t_0) = -2e \ \text{μονάδες/sec}$$

γ(ι) Γνωρίζω ότι ο συντελεστής διευθ. της εφαπτομένης στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι

$\lambda_{εφ} = f'(\alpha)$ όμως $\lambda_{εφ} = εφ\theta$ άρα

• $εφ\theta = f'(\alpha) \Leftrightarrow εφ\theta = 1/\alpha$

• κάθε χρονική στιγμή t. έχω $εφ\theta(t) = \frac{1}{\alpha(t)}$

• παραγωγίζω και τα δύο μέλη και έχω

$$\frac{1}{συν^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{-\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + εφ^2\theta(t))\,\theta'(t) = \frac{-\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}$$

• Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 έχω.

$$(1 + εφ^2\theta(t_0))\cdot\theta'(t_0) = \frac{-\alpha'(t_0)}{\alpha^2(t_0)} = \frac{-2\alpha(t_0)}{\alpha^2(t_0)} = -\frac{2}{\alpha(t_0)}$$

άρα $\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)\cdot\theta'(t_0) = -\frac{2}{e} \Leftrightarrow$

$$\frac{e^2+1}{e^2}\cdot\theta'(t_0) = -2/e \Leftrightarrow (e^2+1)\cdot\theta'(t_0) = -2e$$

$$\theta'(t_0) = \frac{-2e}{e^2+1} \ \text{rad/sec.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Ένα κινητό κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = 4x^2$
κάποια χρονική στιγμή t_0 που το κινητό διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$.
Η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό $2\ cm/sec$.
Να υπολογίσετε εκείνη τη χρονική στιγμή
α) Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης.
β) Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σημείου του κινητού από το σημείο $B(2, 0)$.
γ) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η θέση του κινητού με την αρχή των αξόνων και τον xx'.

② Μια σκάλα μήκους $5m$ που είναι στηριγμένη σε ένα τοίχο γλυστρά προς τα κάτω έτσι ώστε
κάποια χρονική στιγμή που το πάνω άκρο της απέχει από το έδαφος $3m$ αυτό πέφτει με ταχύτητα $0{,}2\ m/sec$.
Να βρείτε εκείνη τη χρονική στιγμή
α) την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το κάτω άκρο από τον τοίχο.
β) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος
γ) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος

③ $f(x) = x^2 + 1$
α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$
β) Να βρείτε που τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα xx'
γ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της C_f και κάποια χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται

56

Από το σημείο με τετμημένη $\alpha=1$,
η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό $\alpha'(t) = 2cm/sec$.
Να υπολογίσετε εκείνη τη χρονική στιγμή

α) Το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα xx'

β) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον xx'.