(89) ΜΑΘΗΜΑ 40.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ

(1) Αν $f'(x)=0$ για κάθε x που ανήκει σε ένα διάστημα $Δ$ τότε $f(x)=c$ στο $Δ$ (η f σταθερή).

(2) Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε x που ανήκει σε ένα διάστημα $Δ$ τότε $f(x)=g(x)+c$ στο $Δ$.

ΕΙΔΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

(1) είδος Για να δείξω ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα $Δ$ δείχνω ότι η παράγωγος της είναι μηδέν.

Άσκηση 1/
$$f(x) = 2(συν^4x - ημ^4x) - 6συν^2x + 3ημ^2x.$$
Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο R και να βρεθεί ο τύπος της. Λύση.

Π. ορ. της f είναι $A=R$.

$$f'(x) = 2(-4συν^3x \cdot ημx - 4ημ^3x \cdot συνx) + 2συνx\,ημx + 6ημx \cdot συνx$$

$$f'(x) = -8ημx\,συνx(συν^2x + ημ^2x) + 8ημx\,συνx$$
$$f'(x) = -8ημx\,συνx \cdot 1 + 8ημx\,συνx$$
$f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$. άρα $f(x) = c$ στο R.
αφού $f(0)=1$ άρα, $f(x)=1$ για κάθε $x\in R$.

Άσκηση 2/ Αν $f'(x)=g^2(x)$ και $g'(x)=f^2(x)$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f^3(x)-g^3(x)$ είναι σταθερή.

Λύση.

είναι $h'(x) = (f^3(x)-g^3(x))' = 3f^2(x)\cdot f'(x) - 3g^2(x)\cdot g'(x)$
$= 3f^2(x)\cdot g^2(x) - 3g^2(x)\cdot f^2(x) = 0$ για κάθε $x\in R$.

άρα $f(x) = c$ στο R.

Άσκηση 3 Αν $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2$ για κάθε $x, y \in R$ να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση.

για $y = x_0$. έχω $|f(x)-f(x_0)| \leq |x-x_0|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0|$$

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} |x-x_0| = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|) = 0$ άρα.

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ άρα $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in R$

άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

άρα $f(x) = c$. για κάθε $x \in R$.

2ο είδος Εύρεση του τύπου της f με τη βοήθεια μιας σταθερής συνάρτησης.

Άσκηση 4 Αν $f'(x) = \frac{2f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ και $f(1) = 2$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση.

α) Για κάθε $x > 0$ η g είναι παραγωγ. ως πράξ. παραγ. συναρτ. με $g'(x) = \frac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4} \Leftrightarrow$

$$g'(x) = \frac{\frac{2f(x)}{x}\cdot x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2f(x)\cdot x - f(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{0}{x^4} = 0$$

άρα $g(x) = c$.

β) αφού $\left.\begin{array}{l} g(x) = \frac{f(x)}{x^2} \\ \text{και } g(x) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = c \Leftrightarrow f(x) = cx^2$ για κάθε $x > 0$

όμως $f(1) = 2$ άρα $c\cdot 1^2 = 2 \Leftrightarrow c = 2$. άρα

$f(x) = 2x^2$.

Ασκηση 5. Αν $f'(x) = \eta\mu x \cdot f(x)$ για καθε $x \in R$, και $g(x) = f(x)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$ και $f(0) = 1$. Να βρεθει ο τυπος της f.

Λύση.

Είναι $g'(x) = f'(x)\, e^{\sigma\upsilon\nu x} + f(x)\cdot \left(e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$

$= f'(x)\, e^{\sigma\upsilon\nu x} + f(x)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot(-\eta\mu x)$.

$= \eta\mu x\cdot f(x)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x\cdot f(x)\, e^{\sigma\upsilon\nu x} = 0$, για καθε $x \in R$

αρα $g(x) = c$. για καθε $x \in R$

και αφού $g(x) = f(x)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$ τοτε $c = f(x)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$f(x) = c\cdot e^{-\sigma\upsilon\nu x}$.

ομως $f(0) = 1 \Leftrightarrow c\cdot e^{-\sigma\upsilon\nu 0} = 1 \Leftrightarrow c\cdot e^{-1} = 1 \Leftrightarrow c = e$

αρα $f(x) = e\, e^{-\sigma\upsilon\nu x} = e^{1-\sigma\upsilon\nu x}$ για καθε $x \in R$.

Ασκηση 6. Αν ισχύει $f'(x) = e^{1/x}\dfrac{(x-1)}{x}$ για καθε $x>0$ και $f(1) = e$ να δειξετε $f(x) = x e^{1/x}$.

Λύση.

1ος τρόπος. Αρκει να δειξω οτι $f(x) - x e^{1/x} = 0$

Εστω $g(x) = f(x) - x e^{1/x}$. για $x>0$.

Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πραξ. παραγ. συναρτήσεων με:

$g'(x) = \left(f(x) - x e^{1/x}\right)' = f'(x) - \left[x' e^{1/x} + x\left(e^{1/x}\right)'\right]$

$= f'(x) - e^{1/x} - x e^{1/x}\cdot(1/x)'$

$= f'(x) - e^{1/x} - x e^{1/x}\cdot(-1/x^2) = e^{1/x}\dfrac{(x-1)}{x} - e^{1/x} + \dfrac{1}{x}e^{1/x}$

$= 0$.

αρα $g'(x) = 0$ αρα $g(x) = c$. οποτε

$f(x) - x e^{1/x} = c$. $\Leftrightarrow$

$f(x) = c + x e^{1/x}$ αφού $f(1) = e \Rightarrow c = 0$

αρα $f(x) = x e^{1/x}$.

2ος τρόπος. Η' εστω $g(x) = x e^{1/x}$ τοτε $f'(x) = g'(x)$ αρα $f(x) = g(x) + c$

για $x=1$ εχω. $c=0$ αρα $f(x) = g(x)$

αρα $f(x) = x e^{1/x}$

3ο είδος/ Αντιπαραγώγιση.

Αν έχω $f'(x) = A(x)$. και ζητάω την $f(x)$.
τότε $f'(x) = (B(x))'$ οπότε $f(x) = B(x) + c$.

Άσκηση 7/ Αν $f'(x) = 3x^2+4x+2$ και $f(1)=6$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση.

Είναι $f'(x) = 3x^2+4x+2$, για κάθε $x \in R$.
$\Leftrightarrow f'(x) = (x^3+2x^2+2x)'$
άρα $f(x) = x^3+2x^2+2x+c$.
όμως $f(1) = 6 \Leftrightarrow 1^3+2\cdot 1^2+2\cdot 1+c = 6 \Leftrightarrow c = 1$.
άρα $f(x) = x^3+2x^2+2x+c$. για κάθε $x \in R$.

Άσκηση 8/. Αν $f'(x) = 3x^2\eta\mu x + x^3\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in R$
και $f(0) = 2009$, $f(x) = ;$.

Λύση

Είναι $f'(x) = (3x^2\eta\mu x + x^3\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$
$f'(x) = (x^3\eta\mu x)'$
άρα $f(x) = x^3\eta\mu x + c$.
όμως $f(0) = 2009 \Leftrightarrow c = 2009$ άρα $f(x) = x^3\eta\mu x + 2009$.

Άσκηση 9./ Αν $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x > 0$.
και $f(1) = 0$ να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση.

Είναι $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$
άρα $f(x) = \frac{\ln x}{x} + c$ όμως $f(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0$
άρα $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Άσκηση 10 Αν $f''(x) = 12x+6$ για κάθε $x \in R$.
και $f(1)=2$, $f'(1)=4$, $f(x) = ;$

Λύση.

$f''(x) = 12x+6 \Leftrightarrow (f'(x))' = (6x^2+6x)'$

άρα $f'(x) = 6x^2+6x+c_1$

όμως $f'(1)=4 \Leftrightarrow 6+6+c_1 = 4 \Leftrightarrow c_1 = -8$

άρα $f'(x) = 6x^2+6x-8.$

$\Leftrightarrow f'(x) = (2x^3+3x^2-8x)'$

άρα $f(x) = 2x^3+3x^2-8x+c_2$.

αφού $f(1) = 2 \Leftrightarrow c_2 = 5$ άρα.

$f(x) = 2x^3+3x^2-8x+5$ για κάθε $x \in R$.

4ο είδος. Αν έχω μια σχέση που περιέχει της f και την f' και θέλω να βρω τον τύπο της f.

πχ

Άσκηση 11 Αν για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι
$f'(x) \cdot ημx + f(x) \cdot συνx = 4.$ και $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση.

Είναι. $f'(x)ημx + f(x) \cdot συνx = 4 \Leftrightarrow$

$(f(x) \cdot ημx)' = (4x)'$ άρα.

$f(x) \cdot ημx = 4x + c. \Leftrightarrow f(x) = \frac{4x+c}{ημx}$

για $x \in (0,\pi)$

όμως $f(\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\frac{\pi}{2}+c}{1} = 0 \Leftrightarrow c = -2\pi$

άρα $f(x) = \frac{4x-2\pi}{ημx}$ για κάθε $x \in (0,\pi)$

5ο ΕΙΔΟΣ Για να δείξω ότι $f(x) = g(x)$.
Δείχνω ότι $f'(x) = g'(x)$ οπότε, $f(x) = g(x)+c$.
δείχνω ότι $c=0$ άρα $f(x) = g(x)$.

πχ $\left.\begin{array}{l} f(x) = συν^4x - ημ^4x + 3ημ^2x \\ g(x) = -\frac{1}{2}(συν^2x - ημ^2x) + \frac{3}{2}. \end{array}\right\}$ Να δείξετε $f(x) = g(x)$

Άσκηση 12. Αν $x^2 f'(x) + 2x f(x) = 6x + 2$, $x > 0$
και $f(2) = 4$ $\quad f(x) = ;$

Λύση.

Είναι $x^2 f'(x) + 2x f(x) = 6x + 2 \Leftrightarrow$

$(f(x)\cdot x^2)' = (3x^2 + 2x)'$

άρα $f(x)\, x^2 = 3x^2 + 2x + c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{3x^2+2x+c}{x^2}$

όμως $f(2) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{16+c}{4} = 4 \Leftrightarrow c = 0$

άρα $f(x) = \dfrac{3x^2+2x}{x^2} = \dfrac{3x+2}{x}$, $x > 0$.

Άσκηση 13. ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ. SOS.
ΤΗ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

$$\boxed{\text{Αν } f'(x) = f(x) \text{ τότε } f(x) = ce^x}$$

Απόδειξη.

Είναι $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x)e^{-x} - e^{-x}\cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = 0$

άρα $f(x)\cdot e^{-x} = c \Leftrightarrow f(x) = c\cdot e^x$.

Άσκηση 14. Αν $f'(x)\,ημx + f(x)\cdot συνx = f(x)\cdot ημx$
για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Να βρεθεί η $f(x)$

Λύση.

Είναι $f'(x)\,ημx + f(x)\,συνx = f(x)\cdot ημx \Leftrightarrow$

$(f(x)\cdot ημx)' = f(x)\cdot ημx \Leftrightarrow$

$(g(x))' = g(x)$ αν θέσω $g(x) = f(x)\,ημx$.

οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη

εφαρμογή είναι $g(x) = c\cdot e^x$ άρα

$f(x)\cdot ημx = c\cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{ce^x}{ημx}$.

1 ΠΡΟΣΟΧΗ ΜΕΡΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ. ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ. ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ $f(x)$

1) $f'(x)+f(x)=\alpha \Leftrightarrow f(x)\cdot e^x+f'(x)e^x=\alpha e^x \Leftrightarrow$

$(f(x)\cdot e^x)'=(\alpha e^x)'$ τοτε $f(x)e^x=\alpha e^x+c$.

$f(x)=\alpha+\frac{c}{e^x}$.

2) $f'(x)+\lambda\cdot f(x)=\alpha \Leftrightarrow f'(x)e^{\lambda x}+\lambda\cdot e^{\lambda x}\cdot f(x)=\alpha\cdot e^{\lambda x}$.

$\Leftrightarrow (f(x)e^{\lambda x})'=\left(\alpha\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)'$

αρα $f(x)e^{\lambda x}=\frac{\alpha}{\lambda}\cdot e^{\lambda x}+c. \Leftrightarrow f(x)=\frac{\alpha}{\lambda}+c\cdot e^{-\lambda x}$.

3) $f(x)\cdot f'(x)=\alpha \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=2\alpha \Leftrightarrow$.

$(f^2(x))'=(2\alpha x)'$

αρα $f^2(x)=2\alpha x+c$.

αρα $f(x)=\sqrt{2\alpha x+c}$ αν $f(x)>0$ ή $f(x)=-\sqrt{2\alpha x+c}$ αν $f(x)<0$

4) $\frac{f'(x)}{f(x)}=\alpha$. και $f(x)>0$.

ειναι $\frac{f'(x)}{f(x)}=\alpha \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(\alpha x)'$ αρα.

$\ln f(x)=\alpha x+c. \Leftrightarrow f(x)=e^{\alpha x+c}$.

5) $\frac{f'(x)}{f(x)}=\alpha$ και $f(x)\neq 0$.

ειναι $\frac{f'(x)}{f(x)}=\alpha \Leftrightarrow f'(x)=\alpha f(x) \Leftrightarrow f'(x)-\alpha f(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{-\alpha x}-\alpha e^{-\alpha x}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-\alpha x})'=0$ αρα

$f(x)e^{-\alpha x}=c. \Leftrightarrow f(x)=c\,e^{\alpha x}$.

6) $f'(x)=-\frac{f(x)}{x}+k^{(x>0)} \Leftrightarrow f'(x)x+f(x)=kx. \Leftrightarrow$

$(f(x)\cdot x)'=\left(\frac{kx^2}{2}\right)' \Leftrightarrow f(x)\cdot x=\frac{kx^2}{2}+c$.

7) $f'(x) = f^2(x)$ με $f(x) \neq 0$.

είναι $f'(x) = f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = (x)'$

άρα $\frac{1}{f(x)} = -x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{-x+c}$ $x \neq c$.

8) $f'(x) = \sqrt{f(x)}$ με $f(x) > 0$

είναι $f'(x) = \sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{f(x)}\right)' = (x)'$.

$2\sqrt{f(x)} = x + c \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2$.

9) $f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{-f(x)} \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = (x)'$ άρα $e^{f(x)} = x + c$.

$\overset{x>-c}{\Longleftrightarrow} \ln e^{f(x)} = \ln(x+c) \Leftrightarrow f(x) = \ln(x+c)$.

10) $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$ (έστω $h'(x) = g(x)$)

τότε $f'(x) + h'(x) f(x) = 0$

$f'(x) e^{h(x)} + e^{h(x)} \cdot h'(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) e^{h(x)}\right)' = 0$.

άρα $f(x) e^{h(x)} = c \Leftrightarrow f(x) = c e^{-h(x)}$

11) $f''(x) = f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) \Leftrightarrow$

$\left(f'(x) + f(x)\right)' = \left(f'(x) + f(x)\right)$. άρα.

$f'(x) + f(x) = c e^x \Leftrightarrow f'(x) e^x + f(x) e^x = c \cdot e^{2x} \Leftrightarrow$

$\left(f(x) \cdot e^x\right)' = \left(\frac{c e^{2x}}{2}\right)' \Leftrightarrow f(x) e^x = \frac{c}{2} e^{2x} + c_1$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{2} e^x + c_1 e^{-x}$.

κτλ.

Άσκηση 15/ Αν $f'(x)+2f(x)=8$ και $f(0)=2$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Είναι $f'(x)+2f(x)=8 \Leftrightarrow f'(x)e^{2x}+2e^{2x}\cdot f(x)=8e^{2x}$.

$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{2x}\right)'=\left(4e^{2x}\right)'$ άρα $f(x)e^{2x}=4e^{2x}+c$.

$\Leftrightarrow f(x)=4+ce^{-2x}$. αφού $f(0)=4 \Leftrightarrow 4+c\cdot e^{0}=2 \Leftrightarrow$

$c=-2$ άρα $f(x)=4-2e^{-2x}$; $x\in R$

Άσκηση 16/ Αν $f'(x)=4x\sqrt{f(x)}$ και $f(x)>0$ και $f(1)=4$

Να βρεθεί ο τύπος της f

Είναι $f'(x)=4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'$

άρα. $\sqrt{f(x)}=x^2+c$. για $x=1$ είναι $\sqrt{f(1)}=1^2+c \Leftrightarrow$

$\sqrt{4}=1+c \Leftrightarrow c=1$

άρα $\sqrt{f(x)}=x^2+1$ άρα $f(x)=(x^2+1)^2$ $\cdot x\in R$.

Άσκηση 17/ Να δείξετε $ημ^2x+συν^2x=1$ για κάθε $x\in R$.

Λύση

Έστω $f(x)=ημ^2x+συν^2x$, $x\in R$ τότε

$f'(x)=2ημx\cdot συνx-2ημx\,συνx=0$ για κάθε $x\in R$

άρα $f(x)=c$ όμως $f(0)=1$ άρα $f(x)=1$

δηλαδή $ημ^2x+συν^2x=1$ για κάθε $x\in R$.

Άσκηση 18/ $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+4x^2$ $x>0$ και $f(1)=6$.

Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

$f'(x)\cdot x=f(x)+4x^3 \Leftrightarrow f'(x)x-f(x)=4x^3$

$\dfrac{f'(x)x-f(x)\cdot(x)'}{x^2}=4x \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(2x^2\right)'$ άρα

$\dfrac{f(x)}{x}=2x^2+c. \Leftrightarrow f(x)=2x^3+cx$.

όμως $f(1)=6 \Leftrightarrow c=4$ άρα $f(x)=2x^3+4x$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$f(x) = συν^4 x + 2ημ^4 x + 3ημ^2 x συν^2 x - ημ^2 x$. είναι σταθερή
ii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

2). Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = -f(x) \cdot 2συνx$.
και $f(0) = e$ και $g(x) = f(x) e^{2ημx}$.
i) Να δείξετε ότι η g σταθερή
ii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

3) Αν $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x}\left(-\frac{1}{x} - 1\right)$. και $f(1) = e$.
Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} e^{1/x}$.

4) Αν $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 6$. και $f(1) = 4$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

5) Αν $f''(x) = 12x - 6$ και η C_f έχει στο $A(1, f(1))$
εφαπτομένη την ευθεία $y = 2x + 4$ να βρεθεί $f(x)$.

6) Αν $3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = 2x$. για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

7) Αν $f'(x) = 2x e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

8) Αν $f'(x) = 4x f(x)$ και $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.
Να βρεθεί ο τύπος της f

9) Αν $f'(x) - 4f(x) = 2$ και $f(0) = 1$.
Να βρεθεί ο τύπος της f.

10) α) Αν $f'(x) = f(x)$ να δείξετε $f(x) = ce^x$.
β) Αν $f'(x) \cdot συνx - f(x) ημx = f(x) \cdot συνx$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
και $f(0) = 1$ να βρεθεί ο τύπος της f.

11) Αν $x(f'(x) - f(x)) = f(x)$ $x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = e$.
α) Να δείξετε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$. β) Να βρεθεί ο τύπος της f.