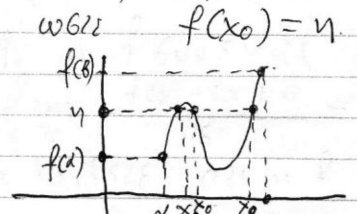
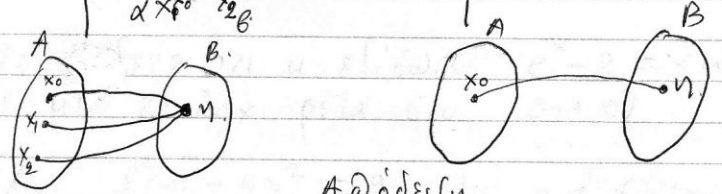
20/4/03

ΜΑΘΗΜΑ 26

- Θεώρημα Ενδιάμ. τιμών (Θ.Ε.Τ).
- Θεώρημα Μεγίστου Ελαχίστου
- Σύνολο Τιμών συνάρτησης.

A) $\boxed{\text{Θ.Ε.Τ.}}$ Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Τότε για κάθε αριθμό η ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχ. x_0 ανάμεσα στα α, β ώστε $f(x_0)=\eta$.





Απόδειξη.

- Έστω $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ και έστω $g(x) = f(x) - \eta$. τότε η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. ως πραξ. συνεχ. συναρτ.

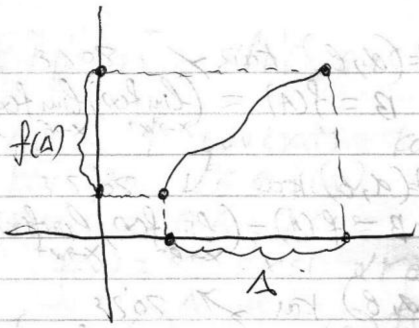
$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0 \\ g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0 \end{array}\right\} g(\alpha)\cdot g(\beta) < 0 \text{ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει } x_0 \in (\alpha,\beta) \text{ ώστε}$$

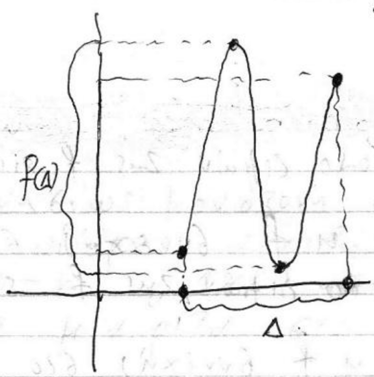
$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta.$$

- ομοίως αν $f(\beta) < \eta < f(\alpha)$

Σχόλιο 1) Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως μονότονη. τότε για κάθε η ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει ακριβώς ένα x_0 ανάμεσα στα α, β ώστε $f(x_0) = \eta$.

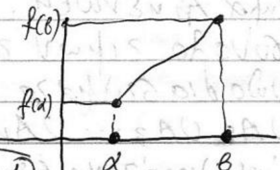
Σχόλιο 2) Αν η f συνεχής στο διάστημα Δ και μη σταθερή. τότε η εικόνα του Δ είναι το $f(\Delta)$ το οποίο είναι και αυτό διάστημα.





Β) Θεώρημα (μεγίστης και ελάχιστης τιμής)

Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

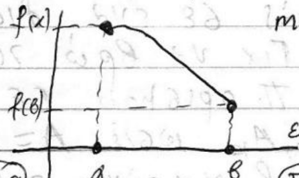


Σχ.1

Μεγ. $= f(\beta)$

Ελαχ $= f(\alpha)$

η f γνησ. αύξ.

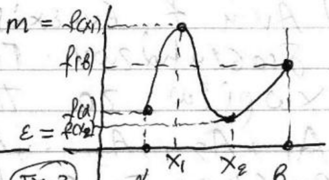


Σχ.2

Μεγ $= f(\alpha)$

Ελαχ $= f(\beta)$

η f γνησ. φθίν.



Σχ.3

Μεγ. $= f(x_1)$

Ελαχ $= f(x_2)$

Γ) Σύνολο τιμών συνάρτησης.

α) Αν η f συνεχής και $\nearrow$ στο $[\alpha, \beta]$ τότε Σύνολο Τιμών της f είναι το $B = [f(\alpha), f(\beta)]$ (σχήμα 1)

β) Αν η f συνεχής και $\searrow$ στο $[\alpha, \beta]$ τότε σύνολο Τιμών της f είναι το $B = [f(\beta), f(\alpha)]$ (σχήμα 2)

γ) Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όχι γνησίως μονότονη τότε Σύνολο τιμών της είναι $B = [\varepsilon, m]$.

όπου ε = ελάχιστο της f.

M = μέγιστο της f. (σχήμα 3.)

δ) Αν η f συνεχής στο $A=(\alpha,\beta)$ και ↗ τότε Σύνολο τιμών της f είναι $B = f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$

ε) Αν η f συνεχής στο $A=(\alpha,\beta)$ και ↘ τότε σύνολο τιμών της f είναι $B = f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$

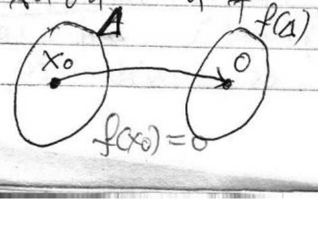
στ) Αν η f συνεχής στο $A=[\alpha,\beta)$ και ↗ τότε σύνολο τιμών της f είναι $B = f(A) = \left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$

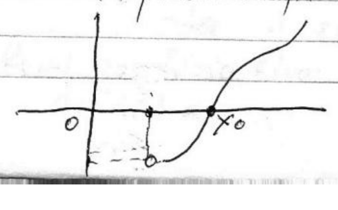
ζ) Αν η f συνεχής στο $A=(\alpha,\beta]$ και ↘ τότε σύνολο τιμών της f είναι $B = f(A) = \left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$

η) Αν η f συνεχής σε ένα διάστημα A ή ένωση διαστημάτων. Για να βρώ το σύνολο τιμών της χωρίζω το π. ορισμού σε υποδιαστήματα $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ώστε $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_k$ έτσι ώστε η f να είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα $A_1, A_2, \dots, A_k$. Βρίσκω στη συνέχεια τα επιμέρους σύνολα τιμών $f(A_1), f(A_2) \dots f(A_k)$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $B = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \cdots \cup f(A_k)$.

Δ) Ρίζες συνάρτησης f ή εξίσωσης $f(x)=0$.

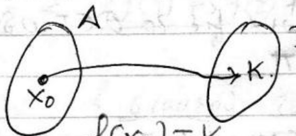
Αν η f συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και το 0 (μηδέν) ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(\Delta)$ τότε σύμφωνα με το Θ. ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \Delta$ ώστε $f(x_0)=0$ δηλαδή η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ.





Ε) ρίζες εξίσωσης $f(x) = K$.

Αν η f συνεχής και γνησίως μονότονη στο Δ. και το $K \in f(\Delta)$ τότε υπάρχει ακριβώς. ένα $x_0 \in \Delta$, ώστε $f(x_0) = K$ δηλαδή η εξίσωση $f(x) = K$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ.



$f(x_0) = K$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση 1) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $(f(1)-3)^2+(f(2)-4)^2=0$ ① να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f(x_0)=\pi$.

Λύση.

Από την ① έχω: $f(1)-3=0$ και $f(2)-4=0 \Leftrightarrow f(1)=3$ και $f(2)=4$.
Αφού το $3<\pi<4 \Leftrightarrow f(1)<\pi<f(2)$. Και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,2]$ και $f(1)\neq f(2)$ σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f(x_0)=\pi$.

Άσκηση 2) Αν η f συνεχής στο $[1,3]$ και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}$.

Λύση.

$$\left.\begin{array}{l} 1=1<3 \\ 1<2<3 \\ 1<3=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{f\nearrow} \left.\begin{array}{l} f(1)=f(1)<f(3) \\ f(1)<f(2)<f(3) \\ f(1)<f(3)=f(3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2f(1)=2f(1)<2f(3) \\ 5f(1)<5f(2)<5f(3) \\ 3f(1)<3f(3)=3f(3) \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} 10f(1)<2f(1)+5f(2)+3f(3)<10f(3) \Leftrightarrow$$
$$f(1)<\frac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}<f(3)$$

Αφού η f συνεχής στο $[1,3]$ και $f(1)\neq f(3)$ τότε από Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}$.

Άσκηση 3) Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,3]$ ώστε:
$$f(x_0)=\frac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}$$

(Προσοχή η διαφορά από την άσκηση 2 είναι ότι δεν γνωρίζω ότι η f είναι γνησίως μονότονη)

Λύση.

Αφού η f συνεχής στο $[1,3]$ τότε θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Έστω ε = ελάχιστη τιμή και M = μέγιστη τιμή τότε.

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon \le f(1) \le M \\ \varepsilon \le f(2) \le M \\ \varepsilon \le f(3) \le M\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2\varepsilon \le 2f(1) \le 2M \\ 5\varepsilon \le 5f(2) \le 5M \\ 3\varepsilon \le 3f(3) \le 3M\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$10\varepsilon \le 2f(1)+5f(2)+3f(3) \le 10M \Leftrightarrow \varepsilon \le \frac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10} \le M.$$

α) αν f σταθερή τότε $\varepsilon = M = \frac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}$ άρα για κάθε τιμή $x_0 \in [1,3]$ ισχύει $f(x_0) = \frac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}$

β) αν f μη σταθερή τότε λόγω Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0 \in [1,3]$ ώστε $f(x_0) = \frac{2f(1)+5f(2)+3f(3)}{10}$.

Άσκηση 4/ Αν η f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[1,5]$ και $f^2(1) + f(5)^2 = 4f(1) + 2f(5) - 5$.

Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $x \in [1,5]$.

Λύση.

Είναι $f^2(1) + f^2(5) - 4f(1) - 2f(5) + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$(f^2(1) - 4f(1) + 4) + (f^2(5) - 2f(5) + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(f(1)-2)^2 + (f(5)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) - 2 = 0$ και $f(5) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$f(1) = 2$ και $f(5) = 1$. Και αφού η f γνησίως μονότονη και $1 < 5 \Leftrightarrow f(1) > f(5)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$ άρα Σύνολο Τιμών $B = [f(5), f(1)] = [1, 2]$.

Άσκηση 5/ $f(x) = e^x + \ln x - 3$

α) Να βρείτε Π. ορισμού και να εξ. την f ως προς τη συνέχεια

β) Να βρεθεί η μονοτονία της f

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f όταν

i) $x \in [1, e]$ ii) $x \in (0, 1]$ iii) $x \in$ Π. ορισμού

δ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -e$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1]$.

210

Λύση

α) Π. ορισμού της f: $A=(0,+\infty)$.
Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτ.

β) Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:
$e^{x_1} < e^{x_2}$ ① και $\ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1 - 3 < \ln x_2 - 3$ ②
Από ① και ② έχω: $e^{x_1} + \ln x_1 - 3 < e^{x_2} + \ln x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
άρα η $f \nearrow$ στο $(0,+\infty)$

γ) ι) Για $x \in [1,e]$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα Σ. Τιμών είναι το $f([1,e]) = [f(1), f(e)] = [e-3, e^e-2]$

ιι) Για $x \in (0,1]$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα Σ. Τιμών είναι το $f((0,1]) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, e-3]$.

ιιι) Για $x \in (0,+\infty)$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα Σ. Τιμών είναι το $f((0,+\infty)) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x))$
$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

δ) Αφού το $0 \in$ στο Σύνολο τιμών της f και η f συνεχής και $\nearrow$ στο Π. ορισμού της. τότε η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,+\infty)$

ε) Για $x \in (0,1]$ η f συνεχής και $\nearrow$ άρα σύνολο τιμών είναι το $(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, e-3]$.

Αφού το $-e \in (-\infty, e-3]$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1]$ ώστε $f(x_0) = -e$.
Άρα η εξίσωση $f(x) = -e$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1]$.

Άσκηση 6/ Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(1) = 2007$, $f(2) = 2006$, $f(3) = 2008$
Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

Λύση.

Αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $[2,3]$.
και αφού $f(2) \neq f(3)$ και $f(2) < 2007 < f(3)$. τότε
κατά Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ ώστε $f(x_0) = 2007$
όμως $1 \neq x_0$ και $f(1) = f(x_0) = 2007$ άρα η f.
δεν είναι $1-1$.

<u>Άσκηση 7</u> Έστω $f(x) = e^x + e^{2x} - 2$.
i) Να εξετάσετε τη μονοτονία της f.
ii) Να βρείτε το Σύνολο τιμών της f.
iii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα. και να βρεθεί

Λύση.

i) Π.ορ της f είναι $A = \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)
και $e^{2x_1} - 2 < e^{2x_2} - 2$ (2) οπότε.
$e^{x_1} + e^{2x_1} - 2 < e^{x_2} + e^{2x_2} - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησ. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Αφού η f συνεχής και $\nearrow$ στο $A = (-\infty, +\infty)$.
Το Σύνολο τιμών της είναι $f(A) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))$
$= (-2, +\infty)$.

iii) Αφού η f συνεχής και $\nearrow$ στο Π. ορισμού της
και το $0 \in$ στο Σύνολο τιμών της τότε.
υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in$ Π.ορ. ώστε.
$f(x_0) = 0$ άρα η f έχει ακριβώς μια ρίζα.
και αφού $f(0) = 0$ η μοναδική ρίζα είναι το 0

<u>Άσκηση 8</u> Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + \ln x = \pi$.
έχει ακριβώς μια ρίζα.

Λύση

<u>1ος τρόπος</u> Έστω $f(x) = e^x + \ln x$.
Η f έχει Π.ορισμού το $(0, +\infty)$.

212

Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$

Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ \ln x_1 < \ln x_2 \end{cases} \Rightarrow e^{x_1} + \ln x_1 < e^{x_2} + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Σ. Τιμών της f είναι $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

αφού το $\pi \in$ Σ.Τ και η $f \nearrow$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f(x_0) = \pi \Leftrightarrow$
$e^{x_0} + \ln x_0 = \pi$ άρα η εξίσωση $e^x + \ln x = \pi$ έχει μοναδική ρίζα το x_0.

2ος τρόπος Η εξίσωση γράφεται $e^x + \ln x - \pi = 0$

Έστω $f(x) = e^x + \ln x - \pi$. Π. ορ. $A = (0,+\infty)$

Η $f \nearrow$ (εύκολο) άρα Σ.Τ. $= (-\infty, +\infty)$.

Το $0 \in$ Σ.Τ. άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,+\infty)$ ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + \ln x_0 - \pi = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + \ln x_0 = \pi$

δηλαδή η εξ. έχει μοναδ. ρίζα το x_0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν η $f \searrow$ στο $[2,4]$ και συνεχής να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,4)$ ώστε $f(x_0) = \dfrac{f(2) + 2f(3) + 4f(4)}{7}$

2) Αν η f συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ ώστε $f(x_0) = \dfrac{f(-\alpha) + 3f(0) + f(\alpha)}{5}$

3) Αν η f συνεχής στο $[0,5]$ και $\nearrow$ και ισχύει
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 3x + 6}{x^2} = 4$ και $\lim\limits_{x\to 5} \left[\dfrac{f(x) - 40}{x-5}\right] = 2$

Να βρεθεί το Σ. Τιμών της f για $x \in [0,5]$.

4) Αν η f συνεχής και γνησίως μονότονη στο R. και η γραφ. παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, 4)$ $B(1, 2)$ Να βρεθεί το Σύνολο Τιμών της f για $x \in [0, 1]$.

5). $f(x) = e^{x-1} + \ln(x-1) - 4$.

i) Μονοτονία της f

ii) Σύνολο Τιμών της f.

iii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

6) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} + 1$ με $x > 0$

i) Να δείξετε ότι η f είναι $\nearrow$ στο $(0, +\infty)$

ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

α) για $x \in [1, 2]$

β) για $x \in (0, 1]$

γ) για $x \in (0, +\infty)$

iii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, +\infty)$

7) Αν η f είναι συνεχής ~~και $\nearrow$~~ στο R και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+2} = 4$ και $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)\cdot(x^2+1)\right) = 2$

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι η f δεν έχει ρίζες.

ΜΑΘΗΜΑ 27 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ.

1) Εστω $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

α) Να βρείτε το Π. ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρεθεί ο τύπος της.

γ) Να υπολογίσετε $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

δ) Να υπολογίσετε $\lim_{x \to 0} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$

2) $f(x) = \frac{2e^x+1}{e^x-1}$, $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

α) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

β) Να βρεθεί η $f \circ g$ και η $(f \circ g)^{-1}$.

γ) Να βρεθεί $\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x)$, $\lim_{x \to -\infty} (f \circ g)^{-1}(x)$

3) Εστω $f: R \to R$ συνεχής για την οποία ισχύει $\frac{3}{2}(x-1) \leq (x-1) f(x) \leq x\sqrt{x} - 1$ για κάθε $x \geq 0$

i) Να βρεθεί το $f(1)$, και το $f(0)$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x+1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

4) Εστω μία συνεχής συνάρτηση f με Π. ορ. $A=[0,1]$ και $z = f(0) + i$, $\omega = 1 + f(1)i$ και ισχύει $|z+\omega| = |z-\omega|$

α) Να δείξετε $Re(\bar{z}\omega) = 0$

β) Να δείξετε $f(1) + f(0) = 0$.

γ) Η f έχει μία τουλαχ. ρίζα στο $[0,1]$

5) Εστω $f: [1,2] \to R$ συνεχής. και $z_1 = 1 + i f(1)$, $z_2 = f(2) + 4i$ και $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

α) Να δείξετε $Re(z_1 \bar{z}_2) = 0$

β) $f(2) + 4f(1) = 0$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλ. ρίζα στο $[1,2]$

(6) Δίνονται οι μιγαδικοί z, ω με $\omega = \frac{z+i}{1+iz}$, $z \neq i$

α) Να δείξετε ότι αν ο z ανήκει σε κύκλο με $K(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ τότε ο ω ανήκει στον άξονα xx'

β) Να δείξετε την ισοδυναμία. $\omega \in I \Leftrightarrow z \in I$

γ) Αν $f:[\alpha,\beta] \to R$ με $f(\alpha) > 1$ συνεχής συνάρτηση και $z = f(\alpha) i$, $\omega = f(\beta)\cdot i$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλαχ. ρίζα στο (α, β).

(7) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

α) Να βρεθεί η f^{-1}

β) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x) - \frac{1}{2}\right)$, $\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x) - \frac{1}{2}\right)$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

(8) Έστω $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ με π. ορισμού $A = (0,1]$

α) Να δείξετε ότι η f είναι ↓ στο A

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0,1]$ ώστε $\ln x_0 = \frac{1}{x_0} - \frac{3}{2}$.

(9) Έστω f συνεχής στο R για την οποία ισχύει
$$x^2 < 2f(x) < x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in R.$$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = x_0$

β) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0} x^2 f(1/x) = 1/2$

γ) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3 f(\frac{1}{x}) + \eta\mu 5x}{x^2 + \eta\mu 4x}\right)$

9ο

(10) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f^2(x) - 1 = 3ημ^2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 4$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f

β) Να βρεθεί $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

(11) $f(x) = (x-1)^2+1,\ x \geq 1$

α) Να βρεθεί η f^{-1}

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(2^x-5) = f^{-1}(2^x-5)$

δ) Να βρεθεί $\lim_{x\to+\infty} [f^{-1}(x) - x - 1]$

(12) Αν η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sqrt{x^2+5}-3)f(x) = x^2-4$.

α) Να υπολογίσετε το $f(2)$

β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

γ) Να υπολογ. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

13) Αν $(f\circ g)(x) = e^{x-3}+4x-13$ και $g(x) = x-3$.

i) Να δείξετε $f(x) = e^x+4x-1$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(g(x)) < e+3$.