ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) <u>Γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Α</u> λέγεται μια συνάρτηση f όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

2) <u>Γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Α</u> λέγεται μια συνάρτηση f όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

3) <u>Γνησίως μονότονη</u> λέγεται μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο A.

4) <u>Τοπικό μέγιστο:</u> μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή γύρω από το x_0

5) <u>Τοπικό Ελάχιστο:</u> μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

6) <u>ολικό μέγιστο</u> μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

7) <u>ολικό Ελάχιστο:</u> Μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

8) <u>Συνεχής στο x_0:</u> μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

9) <u>Συνεχής συνάρτηση:</u> μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι είναι συνεχής όταν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

10) <u>Παραγωγίσιμη στο x_0:</u> μια συνάρτηση f με π. ορισμού το A λέμε ότι είναι παραγωγ. στο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει το $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

10) <u>Παράγωγος της f:</u> Έστω B το σύνολο των x που ανήκουν στο π. ορισμού A μιας συνάρτησης f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε παράγωγος της f λέγεται μια συνάρτηση f' με π. ορισμού το B που ~~σε~~ κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

11) <u>ρυθμός μεταβολής:</u> Ρυθμός μεταβολής της f στο x_0 λέγεται το $f'(x_0)$;

13) <u>Ταχύτητα - επιτάχυνση:</u> Αν $x(t)$ η θέση ενός κινητού τότε η ταχύτητα είναι $u(t) = x'(t)$ και η επιτάχυνση είναι $\alpha(t) = u'(t)$

14) • Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

• Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

15) • Αν $f'(x_0) = 0$ και $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$

• Αν $f'(x_0) = 0$ και $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε

16) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$
τότε ισχύουν οι ιδιότητες

1) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$

2) $\lim (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

3) $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to x_0} g(x)$, όταν $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

4) $\lim_{x\to x_0}(k f(x)) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = k\ell_1$

5) $\lim_{x\to x_0}(f(x))^\nu = (\lim f(x))^\nu = \ell_1^\nu$

6) $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt{\ell_1}$, όταν $f(x) \geq 0$ σε μια περιοχή του;

17) 1) $(c)' = 0$ 2) $(x)' = 1$ ③ $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ ④ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

⑤ $(ημx)' = συνx$ ⑥ $(συνx)' = -ημx$ ⑦ $(εφx)' = \frac{1}{συν^2x}$ ⑧ $(σφx)' = -\frac{1}{ημ^2x}$

⑨ $(e^x)' = e^x$, ⑩ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x>0$

18) i) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

ii) $(c f(x))' = c f'(x)$

iii) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

iv) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

v) $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

vi) $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

<u>προσοχή</u> $(f(x))' = f'(x)$

$(f(5))' = 0 \neq f'(5)$

$(f(-x))' = f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(-x)$

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1) <u>Πληθυσμός</u> λέγεται ένα σύνολο που εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά

2) <u>Δείγμα</u> λέγεται το υποσύνολο του πληθυσμού που εξετάζω.

3) <u>Μεταβλητή</u> λέγεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζω τον πληθυσμό

4) Οι μεταβλητές χωρίζονται σε ποσοτική και ποιοτική
<u>Ποιοτική</u> λέγεται η μεταβλητή που οι τιμές της δεν είναι αριθμοί
<u>Ποσοτική</u> λέγεται η μεταβλητή που οι τιμές της είναι αριθμοί και χωρίζεται σε διακριτή (μεμονωμένες τιμές) και συνεχή (τιμές σε διάστημα (α,β))

5) <u>Αντιπροσωπευτικό δείγμα</u> είναι το δείγμα που έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί

6) <u>Απόλυτη συχνότητα</u> της τιμής x_i μιας μεταβλητής λέγεται ο φυσικός αριθμός ν_i που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο σύνολο των παρατηρήσεων

7) <u>Σχετική συχνότητα της τιμής x_i</u> είναι $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$; $i = 1, 2, \ldots, k$

8) $0 \leq f_i \leq 1$ και $f_1 + f_2 + \ldots f_k = 1$.

9) <u>Κατανομή συχνοτήτων</u> λέγεται το σύνολο των ζευγών (x_i, ν_i)

10) <u>Κατανομή σχετικών συχνοτήτων</u> λέγεται το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i)

11) <u>Οι αθροιστικές συχνότητες</u> εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του x_i

12) <u>Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες</u> εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του x_i

13) <u>Το ραβδόγραμμα</u> χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής

14) <u>Το κυκλικό διάγραμμα</u> χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση και των ποιοτικών και των ποσοτικών μεταβλητών

15) Το ιστόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των συνεχών μεταβλητών όταν έχω κλάσεις

16) <u>Είδη κατανομής</u> α) ομοιόμορφη, β) κανονική
γ) ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία δ) με αρνητ. ασυμμετρ.

17) <u>Μέτρα θέσης</u>: (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή) είναι τα μέτρα που μας δίνουν τη θέση του κέντρου των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα

18) <u>Μέτρα διασποράς</u>: (εύρος, διακύμανση ή διασπορά, τυπική απόκλιση) είναι τα μέτρα που μας δίνουν τη διασπορά των παρατηρήσεων γύρω από το κέντρο τους.

19) <u>Μέση τιμή</u> ενός συνόλου ν παρατηρήσεων λέγεται το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων ($\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$)

20) <u>Διάμεσος</u> (δ) ενός συνόλου ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά είναι η μεσαία παρατήρηση αν το πλήθος είναι περιττ[ό] και το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων αν το ν είναι άρτιος.

21) <u>Εύρος ή κύμανση</u> είναι η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από την μέγιστη παρατήρηση

22) <u>Διακύμανση</u> ή διασπορά των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots t_\nu$ είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από την μέση τιμή δηλαδή $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2}{\nu}$

23) <u>Τυπική απόκλιση</u>. ορίζεται η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης

<u>Προσοχή</u> η διακύμανση δεν έχει τις ίδιες μονάδες με τις παρατηρήσεις ενώ η τυπική απόκλιση έχει τις ίδιες και χρησιμοποιείται συχνότερα.

24) <u>Σταθμικός μέσος</u> $\bar{X} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 w_2 + \dots x_\nu \cdot w_\nu}{w_1 + w_2 + \dots w_\nu}$

χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2 \dots x_\nu$ έχουν διαφορετικούς συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2 \dots, w_\nu$.

26) <u>Συντελεστής μεταβολής</u> ή μεταβλητότητας είναι ένα μέτρο σχετικής διασποράς και είναι $CV = \frac{S}{|\bar{x}|}$

- Αν $CV \le \frac{1}{10}$ (10%) τότε το δείγμα λέγεται ομοιογενές
- Αν $CV_A < CV_B$ τότε το δείγμα Α έχει μεγαλύτερη ομοιογ. από το Β

27) <u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.</u>

α) $\bar{x} = \delta$ β) το 50% των παρατηρήσεων είναι $\le \bar{x}$
το 50% των παρατηρήσεων είναι $\ge \bar{x}$

γ) το 68% των παρατηρήσεων ανήκει στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$
δ) το 95% > > > > $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$
ε) το 99,7% > > > $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$
ς) $R \simeq 6S$

28) <u>Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = AX + B$</u>

Αν έχω μια μεταβλητή X με ν παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots x_\nu$ με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S_x

α) και κάθε τιμή x_i γίνει $\psi_i = x_i + \beta$ τότε $\bar{y} = \bar{x} + \beta$ και $S_y = S_x$
β) και κάθε τιμή x_i γίνει $\psi_i = \alpha x_i$ τότε $\bar{y} = \alpha\bar{x}$ και $S_y = |\alpha| \cdot S_x$
γ) και κάθε τιμή x_i γίνει $\psi_i = \alpha x_i + \beta$ τότε $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ και $S_y = |\alpha| S_x$

29) <u>Μέτρα ασυμμετρίας</u> λέγονται τα μέτρα που εκφράζονται ως συνάρτηση των μέτρων διασποράς και θέσης

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.

1) <u>Πείραμα τύχης</u> λέγεται ένα πείραμα του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμα.

2) <u>Δειγματικός χώρος</u> (Ω) λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης

3) <u>Ενδεχόμενο</u> λέγεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου

4) <u>Απλό ενδεχόμενο</u> λέγεται το ενδεχόμενο που περιέχει ένα στοιχείο

5) <u>Σύνθετο ενδεχόμενο</u> λέγεται το ενδεχόμενο που περιέχει πάνω από ένα στοιχε

6) <u>Αδύνατο ενδεχόμενο</u> ($\emptyset$) λέγεται το ενδεχόμενο που δεν έχει στοιχεία. (κενό)

7) <u>Βέβαιο ενδεχόμενο</u> είναι ο δειγματικός χώρος Ω

8) <u>ασυμβίβαστα ή ξένα</u> λέγονται δύο ενδεχόμενα που δεν έχουν κοινά στοιχεία. δηλαδή A, B όταν $A \cap B = \emptyset$.

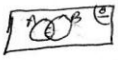
9) <u>Συμπληρωματικό του A</u> : A' είναι το ενδεχόμενο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A.

10) <u>ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ. ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ven</u>

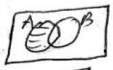
i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το A είναι A'

ii) το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B (A ή B) είναι το $A \cup B$ (ένωση)

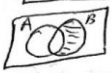
iii) το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A, B (A και B) είναι το $A \cap B$ (τομή)



iv) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το A και όχι το B (A όχι B) είναι το $A \cap B'$ ή $A - B$

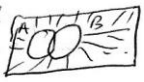


v) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το B και όχι το A (B όχι A) είναι το $A' \cap B$ ή $B - A$

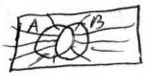


vi) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A, B (ή A ή B) είναι $(A-B)\cup(B-A)$

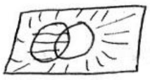
vii) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A, B είναι $A' \cap B'$ ή $(A \cup B)'$



viii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A, B είναι $(A \cap B)'$ ή $A' \cup B'$



xi) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί το A ή όχι το B $A \cup B'$



11) <u>Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου A</u>: Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ λέγεται σχετική συχνότητα του A

12) <u>Στατιστική ομαλότητα ή Νόμος μεγάλων αριθμών</u> είναι το συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους) καθώς ο αριθμός των δοκιμών αυξάνεται απεριόρι

13) <u>Κλασικός ορισμός πιθανότητας</u> (ισχύει όταν τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.) $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

14) <u>ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ</u> (ισχύει πάντα)

Έστω ένας δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu\}$. με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τότε σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε ένα αριθμό $P(\omega_i)$ τέτοιο ώστε

i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ και ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots P(\omega_\nu) = 1$.

ο αριθμός $P(\omega_i)$ λέγεται πιθανότητα του $\{\omega_i\}$.

και Αν $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\kappa\}$ $\kappa \le \nu$ ένα ενδεχόμενο.

Πιθανότητα του A ορίζουμε τον αριθμό $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots P(\omega_\nu$

Επίσης $P(\emptyset) = 0$ και $P(\Omega) = 1$.

15) Αν A, B ασυμβίβαστα· τότε $\begin{cases} P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$

16) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

17) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

18) $P(A') = 1 - P(A)$

19) Αν $A \subseteq B$ $\begin{cases} P(A) \le P(B) \\ P(A \cap B) = P(A) \\ P(A \cup B) = P(B) \end{cases}$

20) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

21) $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - (P(A) - P(A \cap B))$
$= \cancel{P(A)} + 1 - P(B) - \cancel{P(A)} + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$
$= 1 - (P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(B - A) = P(B - A)'$

22) $P[(A - B) \cup (B - A)] \overset{\text{ασυμβ.}}{=} P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$
$= \begin{cases} P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ \text{ή } P(A \cup B) - P(A \cap B) \end{cases}$

23) $\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} P(A) \le P(A \cup B) \\ P(B) \le P(A \cup B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) + P(B) \le 2P(A \cup B) \Rightarrow \dfrac{P(A) + P(B)}{2} \le P(A \cup B)$

24) $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} P(A \cap B) \le P(A) \\ P(A \cap B) \le P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow 2P(A \cap B) \le P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \le \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$

25) από 23, 24 $\Rightarrow P(A \cap B) \le \dfrac{P(A) + P(B)}{2} \le P(A \cup B)$